QUADRATURA DA LÚNULA DE HIPÓCRATES:

Uma interpretação

Ludiane Oliveira de Souza, Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Bolsista do Programa PET Matemática. e-mail: ludi_liveira@hotmail.com. Endereço: Rua Maria Aparecida da Cunha Souza, 388 - Jardim Maracanã, cep:38041-050, Uberaba-MG. Telefones: (34)3311-3581,(34)8841-3720. [1]

Orientadora: Mônica de Cássia Siqueira Martines, Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). e-mail: monica@matematica.uftm.edu.br. Endereço: Av. Dr. Odilon Fernandes, 249, apto 102B, Estados Unidos, CEP: 38017-030, Uberaba-MG. Telefones: (34) 3333-2408, (34)9806-1700.

RESUMO

O problema da quadratura de lúnulas foi um dos problemas gregos que antecedeu e colaborou para as demonstrações gregas sobre a quadratura do círculo, fato que mais tarde levou ao desenvolvimento de técnicas para o Cálculo Integral. Nesse trabalho destacaremos dois casos de quadraturas de lúnulas, apresentadas por Hipócrates de Chios, que possivelmente tenha vivido no século IV a.C.

Palavras-chave: História da Matemática. Hipócrates. Quadratura da Lúnula.

ABSTRACT

[1] Autor que receberá correspondência e apresentará o trabalho.

The problem of quadrature lunulae was one of the Greeks problems that preceded and contributed to the Greek statements about squaring the circle, a fact which later led to the development of techniques for the Integral Calculus. In this paper we will highlight two cases of quadratures of lunulae presented by Hippocrates of Chios, who possibly lived in the fourth century B.C.

Keywords: History of Mathematics. Hipocrates. Quadrature of the Lunula.

1 Tipo de Trabalho

Painel (Pôster)

2 Introdução

Durante nossos estudos de iniciação científica que trata sobre a história do Cálculo Diferencial e Integral, nos surpreendemos com um pouco da Matemática Grega que vimos. Os problemas gregos que dizem respeito ao cálculo de áreas, nos acentou a curiosidade de onde, possivelmente, surgiram tais problemas e de compreender as demonstrações utilizadas por essa civilização.

Particularmente o problema da quadratura da Lúnula proposto por Hipócrates de Chios no século IV a.C., apresentado no livro de BARON e BOS (1985) em seu primeiro volume sobre a História do Cálculo, nos refletiu o desejo de entender suas raízes e sua demonstração. É esse problema que apresentaremos a seguir.

3 Desenvolvimento

3.1 Quadratura da Lúnula

O problema mais conhecido como a quadratura do círculo é um dos *três problemas clássicos* dos gregos. Os outros são *a trissecção do ângulo* e *a duplicação do cubo*. O que nos interessa nesse trabalho é o problema da quadratura do círculo.

Sabemos que *quadrar uma região plana consiste em traçar, somente com régua e compasso, um quadrado cuja área seja igual à área da região dada*.

Os gregos já sabiam que através de uma sequência de transformações geométricas poderiam

> reduzir qualquer figura poligonal a um triângulo com igual área; o triângulo torna-se então um paralelogramo, o paralelogramo torna-se um retângulo e finalmente o retângulo torna-se um quadrado.(BARON e BOS, 1985, p.32)

Uma vez chegado a esse resultado, de que todas as figuras poligonais poderiam ser quadráveis, surge o problema de tentar quadrar figuras curvas.

Os primeiros problemas apresentados sobre tentativas de quadrar figuras curvas, foram os problemas de quadratura de regiões lunares. Essas regiões são envolvidas por arcos circulares com centros e raios diferentes.

Segundo BARON e BOS (1985), Hipócrates de Chios, parece ter demonstrado um teorema importante para a quadratura de círculos: “As áreas de círculos estão para si assim como os quadrados de seus diâmetros.” Ainda de acordo com esses autores, Hipócrates parecia estar certo para estabelecer que algumas lúnulas eram quadráveis e outras não, fato esse demonstrado recentemente, em 1947, usando técnicas matemáticas muito sofisticadas.

Vamos apresentar o problema e sua demonstração.

Problema de Hipócrates de Chios “Segmentos de círculos semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de sua base e os quadrados obtidos com os diâmetros estão na mesma proporção que os círculos".

Hipócrates provou esse problema usando "As áreas de círculos estão para si assim como os quadrados de seus diâmetros", que pode ser expresso algebricamente da seguinte forma:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

onde C_1 e C_2 representam as áreas de dois círculos e d_1 e d_2 representam, respectivamente, seus diâmetros.

Para provar o problema de Hipócrates vamos mostrar apenas dois casos:

caso 1) Triângulo retângulo isósceles inscrito num semicírculo;

caso 2) Hexágono inscrito num semicírculo.

- *caso 1*

  Tomemos um triângulo retângulo isósceles ABC inscrito num semicírculo com diâmetro $\overline{AC}$, vamos construir dois semicírculos com diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, conforme figura abaixo:

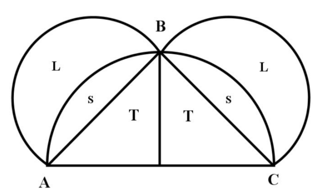

Figura 1:

Seja C_1 o semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$ e C_2 o semicírculo de diâmetro $\overline{AC}$, como o triângulo é isósceles temos que a medida do segmento AB é igual a medida do segmento BC, pelo teorema de pitágoras

$$AC^2 = 2(AB)^2 \Leftrightarrow \frac{(AB)^2}{(AC)^2} = \frac{1}{2}$$

Logo:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{2(AB)^2} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

De acordo com a figura 1 temos:

$$AB^2 = L + S$$

$$AC^2 = 2(AB)^2$$

$$AC^2 = 2(L+S) = 2L + 2S$$

$$\frac{L+S}{2S+2T} = \frac{1}{2}$$

$$2L + 2S = 2S + 2T$$

$$L = T$$

Temos que L é igual a T, o que significa que a área da lúnula é igual a área do triângulo, e como para toda figura poligonal plana é possível encontrar um quadrado com mesma área, concluimos que a lúnula, nesse caso, é quadrável.

- *caso 2)*

Vamos inscrever um hexágono em um círculo e tomemos a metade desse círculo. Agora usando as medidas dos diâmetros de seus lados, construimos semicírculos, conforme figura abaixo.

As dimensões são:

$$AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$$

Assim,

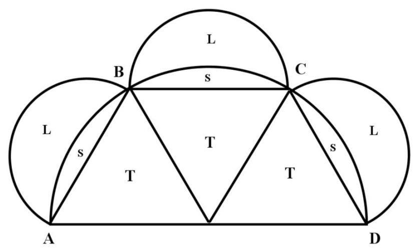

Figura 2:

$$\frac{semicirculoAB}{semicirculoAD} = \frac{AB^2}{AD^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Após calcularmos a relação entre suas medidas, ao relacionarmos com o teorema proposto temos que:

$$\frac{L+S}{3S+3T} = \frac{1}{4} = \frac{AB^2}{AD^2}$$

$$4L+4S = 3S+3T$$

$$4L+4S-3S = 3T$$

$$4L+S = 3T$$

$$3L+(L+S) = 3T$$

Como $L+S$ é a área do semicírculo sobre AB, segue-se que se o semicírculo for quadrável, então a lúnula também será quadrável.

Aqui notamos que Hipócrates conseguiu mostrar (caso 1) que algumas lúnulas podem ser quadráveis, mas que outras (caso 2) dependem de outros resultados que ainda não estavam demonstrados, dependiam do resultado principal: quadratura do círculo. Assim para mostrar que as lúnulas sempre eram quadráveis precisa encontrar uma forma de sempre ser possível quadrar o círculo. As tentativas de demonstrar a quadratura do círculo foram feitas por vários matemáticos, se destacando nesse grupo Arquimedes, mas que apenas foram resolvidas quando as técnicas do Cálculo Integral foram estabelecidas.

4 Conclusão

Durante os estudos percebemos que as técnicas utilizadas pelos gregos eram baseadas nos estudos geométricos, trabalhados apenas com régua sem graduação e compasso, e a partir das figuras, as demonstrações eram descritas. Para que pudéssemos compreender tais demonstrações, "traduzimos" para a algébra, uma vez que essa é a ferramente Matemática mais utilizada por nós, além de termos que refazer as construções usando régua e compasso.

No problema apresentado notamos a preocupação dos gregos, representados aqui na figura de Hipócrates, em encontrar uma forma de quadrar as figuras curvas depois de já terem demonstrado a possibilidade de quadrar qualquer área poligonal. A curiosidade dos gregos tornou-se uma curiosidade nossa, e assim o estudo de quadrar áreas curvas e mais especificamente o estudo sobre a quadratura da lúnula foi interessante e nos abriu possibilidades de aprofundamento, o que pretendemos fazer em um trabalho futuro.

5 Bibliografia

1. BARON, Margaret E. *Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*, por Margaret E. Baron e H.J.M.Bos. Trad. de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985, c1974.

2. BOYER, Carl B. *História da Matemática*, por Uta C. Merzbach. Trad. de Elza F. Gomide. 3.ed. São Paulo: Blucher , 2010.

3. Carvalho, João Pitombeira de. *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*,