TK006 - O CONCEITO DE FUNÇÃO: DE LEIBNIZ A RIEMANN

THE CONCEPT OF FUNCTION: LEIBNIZ UNTIL RIEMANN

Maria Aparecida Roseane Ramos
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
aparecidaroseane.ramos@yahoo.com.br

Resumo

No presente trabalho o conceito de função é examinado numa perspectiva histórica e epistemológica. Do ponto de vista histórico fizemos uma viagem no tempo remontando aos antigos babilônios, passando pela definição de função introduzida por Leibniz no século XVII, pela definição de Bernoulli do século XVIII até a definição mais moderna de Dirichlet-Riemann, do século XIX, que é a que encontramos nos livros de Matemática hoje. Do ponto de vista epistemológico examinamos o processo evolutivo do conceito de função em dois livros de Matemática do século XX e sua abordagem nos livros atuais do Ensino Médio.

Palavras-chave: Função; História; Matemática.

Abstract

In this paper outline a profile of the function concept of historical perspective, epistemological. From the historical point of view we will make a trip back in time dating back to the ancient Babylonians, through role definition introduced by Leibniz in the seventeenth century, the definition of Bernoulli eighteenth century to the modern definition of Dirichlet Riemann, nineteenth century, which is that found in math books today. From the epistemological point of view, we examine the evolution process of the concept of function in two Mathematical books of the 20th century and his approach in the current books of high school.

Keywords: Function; History; Mathematics.

Introdução

O conceito de função é uma das categorias mais importantes da Matemática e desde o século XVII vem fundamentando outros conceitos matemáticos, a exemplo dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Quando procuramos estabelecer regularidades de algum fenômeno, que instrumento utilizamos? Função está presente em várias situações do cotidiano sendo um campo próprio para o estudo das leis.

Por este motivo é inegável a importância do conceito de função, e grande é a sua aplicabilidade em variadas áreas, dentre outras, as áreas da Física, Química, Ciências Contábeis, Economia, Ciência da Computação.

Além disso, na linguagem do dia-a-dia é comum ouvirmos frases tais como: "Uma coisa depende da outra" ou "Uma coisa está em função da outra". A ideia de um fator variar em função do outro e de se representar essa variação por meio de gráficos, de certa forma, já se tornou familiar em nossos dias.

Nesse sentido é interessante conhecer como o conceito de função sofreu transformações até chegar ao conceito moderno que atualmente é ensinado nas aulas de Matemáticas.

Função e História da Matemática: panorama histórico

O conceito de função é antigo, pois perto do ano 200 a.C. a Aritmética babilônica já havia evoluído para uma Álgebra bem mais desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método que equivale atualmente ao da substituição, seja pelo método de completar quadrados, mas também se discutiam algumas expressões biquadradas e cúbicas:

> *[...] dever ia-se creditar aos babilônios uma definição operacional de função devido ao uso que faziam com tabelas, como por exemplo $n^3 + n^2$, $n = 1, 2, 3, 4,..., 30,...$, sugerindo a definição de que uma função é uma tabela ou uma correspondência entre n e $n^3 + n^2$.* (BAUMGART, 1992, p. 83)

No século XVII, encontramos a definição de função introduzida por Leibniz associando este conceito à curvas, onde curva e imagem geométrica de uma função se tornaram sinônimas.

Já no século XVIII, Johann Bernoulli e Euler consideraram uma função como uma expressão qualquer associada a uma variável e à constantes. Foi Euler que introduziu a notação *f(x)* mas também tinha uma segunda concepção que função não precisava ser expressa por uma fórmula, mas podia ser representada geometricamente por uma curva. Este último conceito corresponde à concepção que grande parte dos nossos estudantes tem sobre este conceito.

O conceito de Euler se manteve, até na segunda década do século XIX, Joseph Fourier usou as séries trigonométricas, em suas pesquisas sobre propagação de calor. Lançou-se com o ímpeto ao trabalho com séries trigonométricas e a teoria de funções de uma variável real. Essas séries envolviam uma forma de relação mais geral entre variáveis que não eram atendidas pelos conceitos existentes naquela época. Fourier afirmou que qualquer função de uma variável, contínua ou descontínua, pode ser expandida em uma série de senóides. Embora este resultado não seja correto, a observação de Fourier que algumas funções descontínuas são soma de séries infinitas foi um grande avanço na época. Embora estas série terem sido usadas antes, os estudos de Fourier, inicialmente foram criticados por sua falta de rigor, mais foi a sua teoria somente foi validada por Dirichlet que foi o primeiro a dar uma demonstração satisfatória desse resultado com condições restritivas.

Em consonância com o fim do século XVIII (o século das luzes, onde foram criadas as bases para as reformulações das ciências no século XIX), os matemáticos começaram a examinar as bases do saber matemático a fim de estabelecer uma fundamentação lógico-rigorosa ao saber existente. Fatos que levaram Dirichlet, no século XIX, a relacionar a noção de variável à noção de função da seguinte forma:

> *Uma variável é um símbolo que representa qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribuem valores arbitrários, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função*. (EVES, 1995, p. 660-661)

Essa é a definição mais moderna de função que encontramos nos livros de Matemática que nos apresenta de uma forma mais ampla a relação entre dois conjuntos numéricos que extrapola e independe da forma analítica de relação entre x e y.

A semântica da linguagem da Teoria dos Conjuntos de Cantor, permitiu a Riemann (século XIX) definir uma função f como uma relação dada por um conjunto de pares ordenados que obedecem à seguinte condição: se os pares (x_1,y_1) e (x_2,y_2) pertencem a f, e $x_1 = x_2$, logo $y_1 = y_2$. O conjunto dos primeiros elementos dos pares ordenados é o *domínio da função*, e o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem da função*. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos. (EVES, 1995, p. 660-661)

Em pleno século XX os problemas econômicos e tecnológicos ocasionados no século XIX pela industrialização da Europa Ocidental e dos EUA, o clima da guerra mundial no século XX e a luta pela conquista do espaço levaram a muitos progressos no campo da Matemática. Tornou-se necessária a generalização de conceitos fundamentais que se tornaram abstratos, e no desenvolvimento da computação eletrônica a elaboração de modelos de computação (resolução de problemas por uma máquina) a linguagem funcional pela sua simplicidade sintática e pela sua facilidade em descrever problemas recursivos, levou Alonzo Church em 1936 a criar o Lambda Cálculo (uma coleção de diversos sistemas formais baseados em uma notação para funções), utilizando a noção de variáveis que recupera o conceito de função na visão de Dirichlet-Riemann (séc. XIX).

Em suma, através dos séculos XVII a XIX, matemáticos famosos como Bernoulli, Euler, Fourier, Dirichlet, Riemann deram uma grande contribuição à Matemática com seus estudos sobre função.

Função em dois livros textos clássicos de Matemática do séculos XX

Schubring (2003) caracteriza livros-textos em Matemática assim:

> *[...] um livro-texto deveria seguir "la marche des inventeurs"- o caminho tomado pelos inventores para fazer suas descobertas*

> *matemáticas. [...] a simples criação desta palavra chave foi suficiente para mais uma vez disparar a imaginação dos filósofos, educadores e autores de livros didáticos, como recentemente, para aparecer como um método natural a fim de apresentar o conhecimento numa maneira evolutiva.* (SCHUBRING, 2003, p. 60.)

Na concepção de Schubring, apresentaremos um breve estudo do processo evolutivo de função em dois livros-textos clássicos de Matemática para identificar quais conceitos de função aparecem nessa obras: o de Leibniz, o de Bernoulli, ou o de Dirichlet-Riemann.

LIVRO 1: ***Conceitos Fundamentais da Matemática*****. Bento de Jesus Caraça (1989**)

Caraça (1989) em seu livro texto clássico de Matemática elementar cuja primeira edição é de 1948, portanto, antes da Matemática Moderna dos anos cinquenta, nos indica que os conceitos matemáticos surgem em face de uma necessidade capital, prática ou teórica a exemplo de número natural que surgiu da necessidade de contagem, do número racional da medida, a noção de limite de ordem cinemática, no sentido de estudar movimentos ou aproximação e o conceito de função, na busca de regularidade de fenômenos físicos ou matemáticos. (CARAÇA, 1989, p. 125, 126)

Nesta obra, o conceito de função aparece como instrumento próprio para os estudos das leis e encarando o ponto de vista puramente matemático são apresentadas três de definições:

- a definição utilizando a Teoria de Conjuntos (de Dirichlet –Riemann, séc. XIX):

> *Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x) se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido x → y. a x chama-se variável independente, a y variável dependente.* (CARAÇA, 1989, p. 129)

- a definição analítica de Bernoulli –séc. XVII:

> *Consiste este modo de definição em dar um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor de x um valor de y. Demos, por exemplo, a igualdade* $y = 4{,}9 \cdot x^2$. (CARAÇA, 1989, p. 130)

- a definição geométrica de função de Leibniz – séc. XVII:

> - *Seja um sistema cartesiano e uma curva C que não seja cortada em mais de um ponto por uma reta paralela ao eixo Oy.*

> *Essa curva permite definir uma função y(x)*. (CARAÇA, 1989, p. 133)

Ressaltamos que esta última definição é extremamente contraditória à definição mais moderna de Dirichlet que através de um exemplo de uma função descontínua de segunda espécie (Função de Dirichlet: Seja f: (0,1) → **R** definida para x racional o valor igual a zero e para x irracional o valor igual a 1) nos mostra que às vezes é impossível definirmos função através de gráficos de curvas, vez que existem funções que não podem ser representadas geometricamente. Com relação a essa contradição que é capaz de gerar noções opostas e complementares com a própria lei quando buscamos a generalização do próprio conceito, ainda observa Caraça que

> *"O conceito de função nasceu do de lei natural; ao procurar depurá-lo, generalizá-lo, encontramo-nos com o acaso, noção precisamente oposta à da lei! Condenação dos nossos instrumentos de trabalho que assim, flutuam entre duas noções opostas?"* (CARAÇA, 1989, p. 210).

LIVRO 2: *Qué es la Matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos* de Richard Courant & Hebert Robbins (1958)

O conceito e a aplicação de função também são capazes de gerar discussões divergentes a exemplo como encontramos em Courant e Robbins (1958, p. 288), que relatam que os físicos e os matemáticos divergem, algumas vezes em relação a esse conceito: os primeiros se interessam na operação matemática f e em f(x) que é o valor da função operado na variável x; por exemplo: a área de um círculo de raio igual a x é dada por $f(x) = \pi x^2$. Mas os físicos se interessam apenas pela variável y e não por uma fórmula específica para f(x), pois para eles o interesse primordial é a obtenção do fenômeno "y" por meio experimental; assim a fórmula matemática para eles funciona como modelagem matemática de fenômenos, exceto para o caso em que a fórmula é necessária para se analisar comportamentos; por exemplo: a equação horária de um corpo em movimento retilíneo uniforme num tempo t depende do tempo: $s(t) = s_0 + vt$ onde s_0 = posição inicial e v = velocidade do corpo. (COURANT & ROBBINS, 1958, p. 288, tradução nossa)

Nessa obra, encontramos a definição de função como estudo introdutório à noção de limite onde primeiramente é definida a noção de variável:

> *Chamaremos de variável a um objeto de um conjunto S de objetos, pertencente ao campo do domínio. É costume utilizar as últimas letras do alfabeto para designar as variáveis; por exemplo, se S é o conjunto de todos os números inteiros, a variável X definida no domínio S representa um inteiro arbitrário. Dizemos que a variável X varia no conjunto S significando que podemos identificá-la como um elemento qualquer do conjunto S. Convém utilizar variáveis*

> *quando desejamos fazer afirmações sobre os objetos escolhidos arbitrariamente dentro de um conjunto.*
>
> (COURANT & ROBBINS, 1958, p. 285; 288, tradução nossa)

Após discussões filosóficas sobre essa noção (com exemplos de domínios não necessariamente numéricos), encontramos a seguinte definição de função:

> *Pode ocorrer que a cada valor da variável X esteja associado a outro valor determinado de outra variável U. Diremos então que U é uma função de X. O modo como elas estão relacionadas se expressa mediante um símbolo, tal como U = F (X) (leia-se F de X).*
>
> *Se X varia em um conjunto S, a variável U variará em outro conjunto que chamaremos, por exemplo de T.* (COURANT & ROBBINS, p. 286, tradução nossa)

Percebemos nitidamente que a definição abordada nessa obra é a definição moderna de Dirichlet –Riemann do século XIX.

O estudo de função em cinco livros didáticos atuais de Matemática do Ensino Médio

Alguns matemáticos defendem o seu uso como princípio central na organização dos cursos elementares de Matemática desde as primeiras abordagens sobre funções, surgidas na antiguidade por meio da notória Álgebra Egípcia e da Babilônia.

Lima (2001) nos aponta que o livro didático é na maioria dos casos a única fonte de referência com que o professor de Matemática conta para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos. Também nos revela que a análise de livros didáticos de Matemática deve ser adequada a três componentes básicos: a *Conceituação*: que compreende a formulação de definições, o enunciado de proposições, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, bem como a interpretação e reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos; a *Manipulação*: que é de caráter algébrico (não exclusivamente). Diz respeito à habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares e a *Aplicação*: que é o emprego de noções e teorias da Matemática em situações que vão de problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis provenientes de outras áreas, quer científicas, quer tecnológicas. (LIMA, 2001, p. 1-3)

Sob essa ótica, os estudos de Pires & Souza (2005) apontam a abordagem dos tópicos: Função (introdução); Domínio; Contradomínio; Imagem; Gráficos em cinco livros didáticos atuais mais utilizados pelos professores de Matemática da Primeira Série do Ensino Médio. Revelamos alguns resultados interessantes:

1. Em relação à ***conceituação***: dos cinco livros analisados, quatro abordam o conceito de função de forma mecânica e desinteressante onde o formalismo é preponderante: o estudo é ancorado na memorização de definições e propriedades nesta ordem: pares ordenados, produto cartesiano, relação

binária,...; encontramos pouca referência à História da Matemática que esclareceria a escolha didática e epistemológica da definição do conceito abordada pelos autores: como a definição de Leibniz (séc. XVII) que expressa qualquer quantidade associada a uma curva, ou a definição analítica de Johann Bernoulli (séc. XVIII) que considera função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes (fórmulas), ou a definição mais moderna de Dirichlet - Riemann (séc. XIX) que expressa a correspondência entre duas variáveis e utiliza a teoria de conjuntos para expressar tal correspondência.

2. No que concerne à ***aplicação***: os exercícios são essencialmente numéricos e/ou sobre a construção de gráficos e um pouco mais da metade explora situações contextualizadas que permitem a apropriação do significado do conceito; tornando-se portanto, pouco estimulador à criatividade.
3. Quanto à ***manipulação***: dos cinco livros analisados, aqui denominados: (1), (2), (3), (4), e (5), constatamos que: a definição de Leibniz aparece apenas no livro (2); a definição de Bernoulli aparece nos livros (1), (2), (3) e que a definição de Dirichlet-Riemann aparece em todos os cinco livros com a apresentação de exemplos apenas numéricos o que ainda permanece nos exercícios resolvidos e propostos; também vale ressaltar que a definição de Bernoulli é utilizada para iniciar, motivar e dar significado ao estudo do conteúdo (em situações contextualizadas) e logo depois ela é "abandonada" nos estudos subsequentes para em seguida apresentar a última definição de maneira formal e descontextualizada como observado anteriormente. (PIRES & SOUZA, 2005.)

Tais estudos revelam que abordagem desse conceito é capaz de gerar noções opostas e complementares com a própria lei. Esse é um fator que pode proporcionar dificuldades de aprendizagem desses conteúdos; problemas estes decorrentes, muitas vezes, porque professores e alunos se deixam influenciar pelo conteúdo do livro didático, mesmo quando contraria seus conhecimentos e suas convicções. Nessa direção, o ensino de função nos livros didáticos sem a perspectiva histórica do conceito torna a sua aprendizagem desprovida de significados. A sua abordagem essencialmente formal traduz a concepção que um fator variar em função do outro é sinônimo da representação dessa variação por meio de equações e por esboço de gráficos. Alguns alunos conhecem alguns tipos de funções expressadas analiticamente por meio de expressões algébricas e até sabem esboçar seus gráficos porém, de uma forma geral, os alunos não sabem o verdadeiro significado de função.

Considerações finais

Aliado ao panorama histórico de como o conceito de função foi desenvolvido ao longo dos séculos XVII a XIX estabelecemos uma conexão diferenciada entre a abordagem desse conceito em dois livros clássicos do século XX e à maneira de como os estudos de função aparecem nos livros atuais de Matemática do Ensino Médio.

Percebemos que conceito de função passou por evoluções históricas e epistemológicas desde Leibniz, o primeiro que usou a palavra função no século XVII até à definição mais moderna do conceito de Dirichlet-Riemann no século XIX.

É do conhecimento de todos, que os textos sobre história da Matemática são utilizados como elementos "ilustrativos" em aulas de Matemática não como elementos de reflexão sobre o assunto a ser ensinado ou como promotores de uma problemática para hierarquização de conhecimentos no ensino.

Usamos Gonseth (*apud* CARAÇA, 1989) para expressar a importância da atividade histórica investigativa na dinâmica do ensino aprendizagem de funções para trazer à tona o verdadeiro espírito matemático, que é o de descobrir, estabelecer relações na promoção da autonomia intelectual do aprendiz, quando nos diz:

> lei e acaso são noções conjugadas que só adquirem todo o seu sentido quando tomadas uma em relação à outra. [...] todas as coisas devem ser estudadas em relação com o seu contexto. É nesse tribunal que devem ser julgados os resultados que os instrumentos analíticos, na sua forma mais geral, permitem adquirir. (CARAÇA, 1989, p. 210)

Referências Bibliográficas

BAUMGART, John K. Álgebra. *Tópicos de História da Matemática para uso de sala de aula*. Tradução de Hygino Domingues, São Paulo: Atual Editora, 1992.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. 9º ed. Lisboa: Sá da Costa ,1989.

COURANT, Richard; ROBBINS, Hebert. *Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos.* Tradução do inglês por Luis Bravo Gala, Madrid: Aguilar, 1958.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

LIMA, Elon L. (editor) et al. *Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: IMPA, VITAE, SBM, 2001.

PIRES, Elisabete Cristina, SOUZA, Fredson Pereira. *Análise didática sobre como o conceito de função é abordado nos livros de Matemática da Primeira Série do Ensino Médio*. Monografia final do Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Orientadora: Profa. Maria Aparecida Roseane Ramos, Vitória da Conquista: UESB, 2005, 54 p.

SCHUBRING, Gert. *Análise histórica de livros de Matemática*. Traduzido por Maria Laura M. Gomes, Campinas: Editora Autores Associados, 2003.