

**TK029 - A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA PRESENTE NA OBRA DE
TRIANGULIS DE REGIOMONTANUS****Ana Carolina Costa Pereira**

Universidade Estadual do Ceará - UECE

carolinawx@gmail.com

RESUMO

A Trigonometria, parte da matemática conectada ao estudo dos triângulos, desenvolveu-se a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação. Ela pode ser dividida em Trigonometria Plana e Esférica em que a primeira é conhecida por estudantes do Ensino Fundamental, Médio e Superior. A Trigonometria Esférica, hoje, desconhecida no nível básico de ensino, se faz presente em currículos de cursos como Cartografia, Astronomia, Bacharelado em Matemática e em alguns cursos de Licenciatura em Matemática. Uma forma de resgatar o ensino de Trigonometria Esférica é atrelar o uso da História da Matemática ao seu ensino. A obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* escrita por volta de 1464, e publicada postumamente em 1533 de Johann Müller, o Regiomontanus (1436-1476) aborda nos livros III, IV e V o estudo de triângulos esféricos. Ressaltamos que essa obra apresenta a primeira exposição europeia sistemática de Trigonometria Plana e Esférica, num tratamento independente da astronomia. Esse artigo pretende discutir a importância da Trigonometria Esférica no Ensino Superior e quais os conceitos, teoremas e demonstrações estão presentes no livro *De Triangulis*.

Palavras-chave: Trigonometria Esférica. *De Triangulis*. Regiomontanus.**ABSTRACT**

The Trigonometry, part of mathematics to the study of connected triangles, developed from practical needs, especially related to Astronomy, Navigation and Surveying. It can be divided into Spherical Trigonometry Plane and where the first is known to students of Elementary Education, Middle and Upper. The Spherical Trigonometry, today, unknown at the basic level of education, is present in the curricula of courses such as cartography, astronomy, BS in Mathematics and in some courses in Mathematics. One way to restore teaching of Spherical Trigonometry is pegging the use of history of mathematics to its teaching. The work *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* written around 1464, and published posthumously in 1533 by Johann Müller, Regiomontanus (1436-1476) discusses the books III, IV and V the study of spherical triangles. We emphasize that this work presents the first systematic exposition of European Flat and Spherical Trigonometry, a treatment independently of astronomy. This article discusses the importance of Spherical Trigonometry in Higher Education and which concepts, theorems and demonstrations are present in the book *De Triangulis*.

Keywords: Spherical Trigonometry. *De Triangulis*. Regiomontanus.**INTRODUÇÃO**

A Trigonometria, atualmente um dos ramos da Matemática, surgiu e desenvolveu-se como instrumento cuja finalidade era auxiliar a Astronomia ainda na Antiguidade. A relação entre essas duas áreas era tão intrínseca que se tornou proveitoso considerar sua separação somente na Idade Média. Atualmente seu significado está atrelado às funções circulares.

Brummelen (2009, p. 9) discute o significado do termo Trigonometria do ponto de vista do desenvolvimento da ciência: “A própria palavra, que significa ‘medição de triângulo’, fornece pouca ajuda: é um termo muito antigo, do século XVI, e a trigonometria medieval utilizava círculos e seus arcos ao invés de triângulos, como seus valores de referência”. Se quiséssemos definir Trigonometria como uma ciência, duas condições necessárias surgiria imediatamente:

- uma medida padrão quantitativa da inclinação de uma linha para outra linha;
- a capacidade para, e interesse em, calcular os comprimentos dos segmentos de linha.

Assim, a definição da Trigonometria desenvolveu-se com o tempo, porém “o que fez a trigonometria uma nova ciência foi a capacidade de assumir um determinado valor de um ângulo e determinar a esse um comprimento correspondente” (BRUMMELEN, 2009, p. 9).

A Trigonometria desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação. Foi um longo caminho até ela se tornar uma disciplina matemática independente. O tratado de Johann Müller Regiomontanus¹, escrito por volta de 1464 e publicado postumamente, em 1533, é o *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos) e consiste na primeira exposição europeia sistemática de Trigonometria Plana e Esférica, uma tentativa importante de tratamento da Trigonometria de modo independente da Astronomia.

Deste modo, este trabalho pretende discutir a importância da Trigonometria Esférica no Ensino Superior e quais os conceitos, teoremas e demonstrações estão presente no livro *De Triangules*.

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA: CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

No início do século XIX, na Academia Real Militar, criada por D. João VI em 1810, a Trigonometria Esférica fazia parte no currículo, além das disciplinas de Física, Astronomia, Geodésica, Geografia Geral, Desenho (SILVA, 2003, p.33). No que se

¹ Vida e Obras de Johann Müller Regiomontanus poderá ser visto no trabalho intitulado A História da Trigonometria sob o olhar de Regiomontanus publicado nos Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática, Aracaju-SE, 2011.

refere ao ensino secundário ela aparece no currículo do Colégio Pedro II, criado em 1837, como parte inicial para o estudo da Astronomia².

A Trigonometria Esférica em cursos do Ensino Superior, desconhecida para os alunos do Ensino Fundamental e Médio, atualmente, está atrelada a disciplina básica dos cursos técnicos ou das engenharias ligadas a: cartografia, astronomia entre outros. Segundo Rocha (2009, p. 02)

As disciplinas: Astronomia Matemática, assim como para um grande elenco de disciplinas mais recentes como Geodésia, Navegação Oceânica, Navegação Aérea, Mecânica de Satélites Artificiais, Transmissão de Rádio de Grande Alcance, Cálculo de Trajetórias de Mísseis Intercontinentais, Cálculo do Aquecimento Solar em Arquitetura são exemplos do uso da trigonometria esférica nos cursos em questão.

No curso de Bacharelado em Matemática no Brasil, uma disciplina que aborda a Trigonometria Esférica é a Geometria não-Euclidiana, no estudo da Geometria Elíptica. Porém, na formação do professor de Matemática, ou seja, nos cursos de Licenciaturas, numa pesquisa realizada em 2005, por Barreto e Tavares (2007, p.02) das 47 Instituições de Ensino Superior brasileiras pesquisadas por eles somente 5 abordavam conceitos de Geometrias não-Euclidianas nas suas matrizes curriculares, conseqüentemente o estudo de triângulos esféricos. Isso nos leva a concluir que a Trigonometria Esférica está perdendo lugar no ensino de Matemática.

Existem ainda pesquisas que propõem a inserção da Geometria não-Euclidiana, e conseqüentemente da Trigonometria Esférica no Ensino Médio (MARTOS, 2002; ANDRADE, 2011; CARVALHO & CARVALHO, 2010; THOMAZ; FRANCO, 2012). Porque não atrelar o ensino de Trigonometria Esférica junto com a História da Matemática? Uma opção é a utilização da obra de Regiomontanus, *De Triangulis*, como uma forma de ensino para esse conteúdo, principalmente nos cursos de Licenciaturas em Matemática que não disponibilizam essa disciplina. Isso pode ser realizado por meio de cursos extensão universitária, oficinas e *workshop* nas Semanas Universitárias, ou mesmo seminários temáticos. A seguir, apresentaremos uma visão panorâmica dos livros III, IV e V de Regiomontanus que tratam sobre Trigonometria Esférica.

² Já iniciamos uma pesquisa sobre o percurso histórico do conteúdo de Trigonometria Esférica nos currículos das escolas brasileiras, posteriormente divulgaremos o estudo.

A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA DO "DE TRIANGULIS"

A obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* tinha por finalidade apresentar de modo condensado as regras sobre Triângulos que seriam úteis aos leitores do *Epítome do Almagesto*³. Esse trabalho poderia servir como base para cálculos geométricos e astronômicos como ele havia originalmente planejado e deveria ser usado para calcular diariamente as coisas do céu e o tamanho e distância de cometas. A verdadeira ferramenta útil aqui era a Trigonometria. Infelizmente, é uma obra inacabada: o Livro V, com suas aplicações das Leis de Cossenos, apresentadas ali pela primeira vez, é apenas um fragmento.

Regiomontanus primeiramente completou os Livros sobre Trigonometria Esférica, que mais tarde formaria os Livros III e IV. Como no Epítome, o *De Triangulis* contém a Lei de Seno que relaciona os lados e ângulos de um triângulo esférico. Ele escreveu no Livro II um tratamento para triângulos planos, embora apareça esse tratamento também no Livro I. Ele começou este trabalho em 1462 e deve ter escrito o Livro V ainda na Itália.

O foco desse estudo é os três últimos livros, III, IV e V, da obra *De Triangulis*. O Livro III é uma fundamentação da Trigonometria Esférica com a Geometria Espacial. Do Teorema 01 ao Teorema 34, Regiomontanus aborda a geometria de grandes círculos em esferas; do Teorema 35 ao Teorema 56, estuda triângulos esféricos. Segundo Zeller (1944), alguns dos teoremas mostram certa originalidade. Determinados teoremas se assemelham ao “Sphaera de Menelaus”, enquanto alguns dos números têm uma semelhança com os do trabalho de Geber⁴. Nesse livro, não há o emprego de função trigonométrica; ele aborda mais a geometria esférica.

O Livro VI, outros aspectos nos chamam a atenção. Nos Teoremas 16⁵ e 17⁶, Regiomontanus indica a Lei dos Senos para um triângulo retângulo e para todos os triângulos. Segundo Zinner (1944), o Teorema 18 é igual ao Teorema de Geber: “Em

³ Tratado astronômico que abriu caminho para futuras investigações fundamentais e resultados da épocas passadas. Ressaltamos que tanto Copérnico quanto Galileu usaram-no como livro texto

⁴ al-Ishbili Abu Muhammad Jabir ibn Aflah (1100 – 1160) mais conhecido como Geber, forma latina de seu nome. Ele foi um importante matemático árabe, em que suas obras foram traduzidas para o latim, enquanto trabalhos como o de Abu'l-Wafa não foram traduzidas em latim.

⁵ **L4 - Teorema 16:** Em todo triângulo retângulo a razão dos senos de todos os lados para os senos dos ângulos que os lados subtendam é o mesmo.

⁶ **L4 - Teorema 17:** Em todo triângulo não-retângulo os senos dos lados para os senos dos ângulos opostos a esses lados terão a mesma razão.

todo triângulo que tem somente um ângulo reto, a razão do seno de um ângulo não-reto para o seno do ângulo reto está para a razão do seno do complemento do ângulo restante para seno do complemento do lado que subtende ao ângulo” (HUGHES, 1967, p. 227).

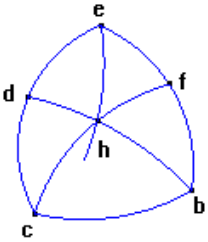
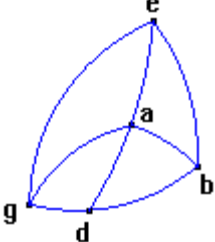
No Teorema 26, encontramos a lei dos senos para triângulos esféricos. Para sua demonstração, Regiomontanus utiliza a fórmula em que o cosseno de um arco é igual ao seno do seu complemento (figura 3.7.):

$$\frac{\text{seno } \angle \text{BAD}}{\text{seno } \angle \text{reto BAG}} = \frac{\text{seno complemento do } \angle \text{AGB}}{\text{seno complementar do lado AB}}$$

Os Teoremas 25, 26 e 27 tratam de triângulos esféricos com ângulos retos, e nos Teoremas 28⁷, 29⁸, 30⁹, 31¹⁰, 32¹¹, 33¹² e 34¹³ são dados os seis casos de resolução de triângulos esféricos oblíquos.

Zeller (1944, p. 28) comenta que alguns dos teoremas do Livro IV do *De Triangulis* apresentam semelhanças com os teoremas do Livro V, de Nasir Eddin al-Tusi “Tratado sobre quadrilátero”, como por exemplo:

Tabela 3.2. Comparação de Zeller (1944)

Tratado sobre Quadriláteros Nasir Eddin al-Tusi - Livro V, capítulo III	<i>De Triangulis Libri Quique</i> Regiomontanus - Livro IV
<p>Leis</p>  <p>(Ç) Todo triângulo que tem três ângulos agudos terão com seus lados menores que</p>	<p>Teoremas</p>  <p>9. Em qualquer triângulo que tem três ângulos agudos, terão os lados menores</p>

⁷ L4 - Teorema 28: Quando os dois lados que cercam um dado ângulo de um triângulo não-retângulo forem conhecidos, podem ser encontrados o lado restante e os outros ângulos.

⁸ L4 - Teorema 29: Conhecendo dois lados e um ângulo oposto de um triângulo não-retângulo é suficiente para a determinação do outro lado e dos outros ângulos.

⁹ L4 - Teorema 30: Quando dois lados de um triângulo não-retângulo são conhecidos juntamente com o seu ângulo oposto, e se fosse estabelecido qual a lei que a perpendicular oposta ao ângulo dado cai, então o lado restante e os outros ângulos podem ser encontrados.

¹⁰ L4 - Teorema 31: Se qualquer triângulo não-retângulo tivesse dois ângulos dados juntamente com o seu lado, o ângulo restante e os outros lados podem ser encontrados.

¹¹ L4 - Teorema 32: Quando dois ângulos de um triângulo não-retângulo são conhecidos juntamente com o lado que subtender um deles, o ângulo restante e o outro lado podem ser encontrados.

¹² L4 - Teorema 33: Quando três ângulos de um triângulo esférico não-retângulo são dados, seus três lados podem ser medidos.

¹³ L4 - Teorema 34: Em qualquer triângulo que tem três lados conhecidos, os três ângulos podem ser encontrados.

um quadrante; seus pólos cairão fora do triângulo.	que um quadrante.
--	-------------------

O Quinto Livro é uma continuação da solução de problemas, envolvendo triângulos esféricos. Nesse livro, encontramos a Lei dos Cossenos para triângulos esféricos no Teorema 2 (figura 3.8), com a terminologia de seno versado. Esta foi a primeira vez que a lei dos cossenos foi dada de forma útil para o cálculo: “Em todo triângulo esférico que é construído a partir de arcos de grandes círculos, a razão do seno versado de qualquer ângulo para a diferença de dois senos versados, do qual o seno versado do lado subtendido a este ângulo, quando o outro é o seno versado da diferença dos dois arcos incluindo este ângulo, assim como a razão do quadrado do seno reto total para o produto retangular dos senos dos arcos colocado ao redor do ângulo mencionado” (HUGHES, 1967, p.271).

Usando a notação moderna de Trigonometria

$$\frac{\text{sen vers } A}{\text{sen vers } A - \text{sen vers}(b - c)} = \frac{1}{\text{sen } b \cdot \text{sen } c} \text{ ou } \cos A = \frac{\text{cos } a - \text{cos } b \cdot \text{cos } c}{\text{sen } b \cdot \text{sen } c}$$

Vale ressaltar que a função seno versado ($r - \cos \theta$) ainda pode ser encontrada no Teorema 11¹⁴ e nas demonstrações dos Teoremas 3¹⁵, 10¹⁶ e 12¹⁷. Segundo Hughes (1967), Regiomontanus teve o primeiro contando com a Lei dos Cossenos quando, em Viena, estudava al-Battānī. Ele reconheceu sua importância e refez a lei em sua primeira fórmula prática.

DISCURSÕES FINAIS

¹⁴ **L5 - Teorema 11:** Quando o seno versado de algum arco tem uma razão conhecida do seno reto do mesmo arco, o próprio arco é conhecido.

¹⁵ **L5 - Teorema 3:** Quando três lados dados de um triângulo esférico são construídos por arcos de grandes círculos, todos os ângulos de seus [triângulos] podem ser medidos.

¹⁶ **L5 - Teorema 10:** Se existem dois triângulos retângulos dos quais o ângulo agudo de um é igual ao ângulo agudo do outro e [do qual] os dois lados que subtendem os ângulos retos têm uma diferença conhecida, e similamente se os dois lados subjacentes ao ângulo reto e o ângulos agudos dado tem uma diferença conhecida, todos os lados destes [dois triângulos] podem ser encontrados.

¹⁷ **L5 - Teorema 12:** Se há dois triângulos retângulos dos quais um ângulo agudo de um é igual a um dado ângulo agudo do outro, e se a diferença dos lados opostos aos ângulos retos é dada juntamente com a diferença dos lados que subtendem aos ângulos agudos, então todos os lados dos triângulos podem ser encontrados.

A obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* teve uma grande importância para a História da Matemática, pois ela é a primeira exposição europeia sistemática da Trigonometria Plana e Esférica, num tratamento independente da astronomia. Nos livros III, IV e V podemos encontrar um estudo sobre triângulos esféricos, elemento essencial da Trigonometria Esférica.

A exposição do conteúdo presente na obra possibilita um estudo histórico-conceitual, pois inicia com teoremas que contendo definições básicas, tais como a geometria de grandes círculos em esferas e triângulos esféricos, lei dos Senos e Cossenos para triângulos esféricos, indo até a problemas envolvendo triângulos esféricos e primeiro teorema prático para a lei dos Cossenos na Trigonometria Esférica (Livro 5 - Teorema 2).

Nosso estudo da Trigonometria Esférica está apenas iniciando. Mostrar sua importância dentro da formação de professores e sua inserção no ensino básico é um desafio que estamos dispostos a enfrentar, principalmente tomando como recurso a História da Matemática. Uma forma de agregar essa idéia é utilizar a obra *De Triangulis* de Regiomontanus, como forma de complementação curricular em cursos, oficinas e seminários para Ensino Médio e para os cursos de Licenciatura Plena em Matemática. Uma pesquisa mais aprofundada sobre as origens da disciplina de Trigonometria Esférica no currículo brasileiro também faz parte do nosso projeto assim como o estado atual da arte nas instituições de Ensino Superior do país.

Referências Bibliográficas

ANDRADE, Maria Lúcia Torelli Doria de. **Geometria Esférica**: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares do ensino Básico. 2011. 120 f. Dissertação (Mestrado) - PUC, São Paulo, 2011.

BARRETO, Mylane dos Santos, TAVARES, Salvador. **Do mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias Não Euclidianas**. Vértices: Campos dos Goytacazes, v. 9, n. 1/3, jan./dez. 2007.

BRUMMELEN, Glen Van. **The mathematics of the heavens and the earth**: The Early History of Trigonometry. New Jersey: Princeton University, 2009.

CARVALHO, A. S. & CARVALHO, A. M. F. T. (2010). **A Questão da Ansiedade no Ensino e Aprendizagem das Geometrias não Euclidianas**. Anais... X Encontro de Educação Matemática - ENEM, SBEM, Salvador (BA), 07 – 09 de julho.

MARTOS, Z.G. (2002). **Geometrias Não Euclidianas**: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental. Rio Claro, 2001. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A História da Trigonometria sob o olhar de Regiomontanus**. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2011, Aracajú. **Anais...** Aracajú: Sbhmat, 2011. v. 1, p. 1 - 10.

ROCHA, Maria Lúcia Pessoa Chaves. **Notas conceituais e históricas da trigonometria plana e esférica**. In: CONGRESSO DE PESQUISA E INOVAÇÃO DA REDE NORTE E NORDESTE DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA, 4., 2009, Belém. **Anais...** . Belém: Ufpa, 2009. v. 1, p. 1 - 7.

SILVA, Clóvis Pereira da. **A Matemática no Brasil**: uma história do seu desenvolvimento. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2003. 163 p.

THOMAZ, Mara Lucia; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria Não-Euclidiana/Geometria Esférica**. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf>>. Acesso em: 13 out. 2012.

ZELLER, M. C. **The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus**. Ann Arbor: University of Michigan doctoral dissertation, 1944.