TK049 - O PAPEL DA SIMPLICIDADE NA GEOMETRIA CARTESIANA

Davide Crippa
Université Paris Denis Diderot (Sphere)
davide.crippa@gmail.com

Palavras chaves: *Algebra, Analise, Curvas, Descartes, Geometria, Simplicidade.*

Minha apresentação se ocupará das conexões entre pureza e simplicidade na geometria cartesiana. Com esse termo, queria me referir à teoria apresentada principalmente no texto *La Géométrie*, (publicado em 1637 junto ao Discurso do método, a Dioptrica e as Meteoras) e em algumas cartas tirada da correspondência que seguiu à essa publicação.
Com o termo "simplicidade", entendemos certo caractere epistêmico das provas e das teorias (por exemplo, provas ou soluções são mais simples cuja inteligência é mais "imediata" e melhor de outras provas ou soluções). O surgimento da geometria algébrica na Europa no século XVII e o estudo mais detalhado dos métodos clássicos apontavam para a questão da simplicidade na pratica matemática.Em particular, o programa cartesiano detalhado na *Géométrie,* modificando essencialmente os pedidos de Pappus, relativamente às escolhas dos melhores métodos para a solução de um problema, introduziu importantes reflexões teóricas acerca da simplicidade.
Vale a pena lembrar que, segundo a exposição encontrada na *Coleçao Matematica* do geometra Pappus, cada problema precisava ser resolvido segundo a "natureza" dele. Em caso contrario, o geometra cometeria um erro. Na tradução dessa obra por o humanista italiano Commandinus (publicada em Urbino em 1588) esse precepto era ainda mais ressaltado: resolver um problema por meio de um método contrario a natureza dele não seria somente um erro, porém um "pecado" (*peccatum*).
A versão commandiniana da *Coleçao* teve grande difusão em meados do século XVII. Em particular, a regra metodologica ali enunciada teve grande influencia sobre a *Géométrie* de Descartes.
Observamos porém como Descartes, por meio de uma subtil reformulação, deu uma interpretação desse precepto en termos de simplicidade (uma interpretação que, aliais,

não pode ser encontrada, pelo menos explicitamente, no texto original): cada problema precisa ser resolvido aplicando o método mais “simples”.

Esse pedido é feito objecto, na *Géométrie*, de uma separação precisa em três tipos de simplicidade, que chamaremos de “facilidade”, “simplicidade descritiva” e enfim “simplicidade dimensional”. Descartes exige que a solução mais simples de um problema, na Geometria, seja efectuada por meio das curvas de género mais simples, ou seja, respeitando a simplicidade dimensional. Neste caso, como o género de uma curva geométrica é determinado por o grau da equação algébrica associada, a simplicidade é medida de modo algébrico.

Por outro lado, esse pedido responde, segundo Descartes, à duas exigências. a primeira é uma condição que reconheceremos hoje como uma consequência de um teorema, *ergo* como um fato matemático: o matemático tem que evitar a escolha de curvas simples demais ao respeito de um problema dado, porque em caso contrario ele faria um esforço inútil tentando resolver o que não pode ser resolvido com tais meios.

Por outro lado, é imediato pensar em casos (alguns discutidos pelos geometras do XVII século) nos quais a solução de um problema pode ser tecnicamente correcta independentemente da complexidade das curvas escolhidas, aposto que elas ofereçam a resposta ao problema.A restrição à curva de máxima simplicidade é finalmente uma condição que não encontra tradução imediata em um fato da matemática.

Ainda por cima, a escolha de soluções que respeitam a simplicidade dimensional encontra, na teoria cartesiana, algumas objeções intuitivas, devidas ao fato que, por certos tipos de problemas, soluções que violam este tipo de simplicidade apresentam vantagens cognitivas evidentes. Elas são, em outros termos, mais “fáceis”. Descartes apresenta um contrasto claro entre simplicidade dimensional e facilidade, e até exclui explicitamente soluções do segundo tipo como soluções erradas, apesar da atractiva delas em termos de compreensão imediata.

Na minha apresentação, tentarei fazer algumas observações para explicar essa escolha da simplicidade dimensional. Em particular, seguindo uma sugestão de Henk Bos, pretendo considerar e esclarecer o que pode ser chamado de “papel estrutural” da álgebra para o ordenamento de curvas e problemas.

A comparação entre o critério de facilidade e da simplicidade dimensional mostra, de modo bastante evidente, que a facilidade não depende de uma ordem entre os métodos de solução. Resolver um problema com a curva mais fácil, em outras palavras, responde muito bem ao estilo que Descartes atribuía, criticamente, aos antigos, ou seja de resolver qualquer problema em modo casual, sem prestar atenção à um critério de organização racional dos resultados.

A simplicidade dimensional possui vantagens claras ao respeito da facilidade. Para argumentar isso com mais detalhe, queria me concentrar sobre algumas propriedades da redução de curvas ou problemas geométricos à objectos algébricos, ou seja, equações.

Como Paolo Mancosu discute em *Descartes and mathematics*, as curvas não sao objetos intencionais: o mesmo objeto pode ser descrito geometricamente em varias maneiras ou construído segundo procedimentos diferentes.

A passagem da descrição geométrica de uma curva (e, nesse caso, de um problema também) à uma equaçao, garantida para o método analítico cartesiano, comporta algumas modificações linguisticas fundamentais.

Por um lado, encontramos, no caso da álgebra, o mesmo fenómeno que se dava em geometria: a mesma curva pode ser descrita por meio de equações diferentes, por exemplo devidas à escolhas diferentes dos eixos. Nesse caso, porém, as equações possuem mesmo grau – entao elas oferecem a mesma informação relativamente à classificação da curva.

Essa propriedade representa uma das razoes que fazem a álgebra, en quanto linguagem, uma ferramenta particularmente útil na tarefa de classificação das entidades geométricas. A ideia fundamental movimentada por Descartes é aquela de invariante: uma colecção potencialmente infinita de objectos algébricos que descrevem a mesma curva (em nosso caso, cada equação obtida em base à uma escolha particular dos eixos de referencia) possui porém uma propriedade invariante, como o grau, que permite de associar à um objecto geométrico uma única classe de equivalência.

Por outro lado, a álgebra possui um papel semelhante em relação aos problemas. Neste caso, por causa de escolhas diferentes da incógnita, equações diferentes podem descrever o mesmo problema. Todavia, a existência (pelo menos na opinião de Descartes) de métodos efectivos para determinar a equação de mínimo grau, associada à um problema, garante a possibilidade de reduzir a colecção de equações associáveis à um problema à um único representante.

Esta convicção cartesiana é obviamente discutível sob vários aspectos. Todavia, achamos importante mostrar como algumas propriedades semânticas da álgebra, já ressaltadas por Descartes, justificam a escolha da simplicidade dimensional, acreditamos mesmo na frente de evidentes vantagens derivadas da escolha de outros tipos de simplicidade.

BIBLIOGRAFIA

A.G.Molland. Shifting the foundations: Descartes' transformation of ancient geometry. Historia Mathematica , 3:21–49, 1976.

Henk J. Bos. Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory; the "construction of equations", 1637 - ca 1750. Archive for the History of Exact Sciences , 30:331– 380, 1984.

Henk J. Bos. Redefining Geometrical Exactness . Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001.

René Descartes. The Geometry of René Descartes, ed. D. E. Smith and M. L. Latham . Open Court, La Salle, 1952.

René Descartes. Oeuvres, Vol. 1 . Publiées par Charles Adam et Paul Tannery. Nouvelle Présentation, Paris, 1964-1974.

René Descartes. Oeuvres, Vol. 10 . Publiées par Charles Adam et Paul Tannery. Nouvelle Présentation, Paris, 1964-1974.

René Descartes. Oeuvres, Vol. 2 . Publiées par Charles Adam et Paul Tannery. Nouvelle Présentation, Paris, 1964-1974.

René Descartes. Oeuvres, Vol. 6 . Publiées par Charles Adam et Paul Tannery. Nouvelle Présentation, Paris, 1964-1974.

Jesper Lützen. The algebra of geometric impossibilities: Descartes and Montucla on the impossibility of the duplication of the cube and the trisection of the angle. Centaurus , 52:4–37, 2010.

Jan Van Maanen. Review symposium: John pell (1611-1685): Mathematical utopian. Metascience , 15:217–249, 2006.

Michael Mahoney. The Mathematical Career of Pierre de Fermat . Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1973.

Paolo Mancosu, Descartes and Mathematics, in A companion to Descartes, Janet Broughton, John Carriero (editors), 2007.

Marin Mersenne. Correspondance du P. Marin Mersenne: religieux minime . Editions du Centre national de la recherche scientifique, 1986.

Marco Panza. Newton et les Origines de l'Analyse . Editions Albert Blanchard, Paris, 2005. Marco Panza. Rethinking geometrical exactness. Historia Mathematica, 38:42–

95, 2011.

François Viète. The Analytic Art: Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the Opus restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebrâ Novâ . Dover, Mineola, New York, 1983.