TK065 - UM BREVE ESTUDO DA OBRA *TREATISE ON ALGEBRA* (1842, 1845): O PAPEL HISTÓRICO-FILOSÓFICO DA AXIOMATIZAÇÃO MATEMÁTICA

Marta F dos Anjos
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
martafigueredo@yahoo.com.br

Mércia de Oliveira Pontes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
merciaopontes@gmail.com

RESUMO
Apresentaremos e discutiremos a obra *Treatise on Algebra* (1842, 1845), escrita por George Peacock (1791-1858), que defende uma visão revolucionária de Matemática, pois anuncia a Álgebra como um sistema axiomático, o qual se diferencia do conceito aristotélico de axiomatização, aproximando a concepção de Matemática de um sistema formal que prioriza o rigor à intuição. Assim, para compreender como se deu a construção dessas ideias faremos uma breve análise do contexto sócio-matemático que George Peacock viveu e, em seguida, apresentaremos algumas características da obra sua obra e o cerne revolucionário de tais características. Por fim, estudaremos o impacto dessas ideias revolucionárias sobre a comunidade matemática europeia do inicio do século XIX.

Palavras-chave: História da Matemática; Àlgebra; Axiomatização.

UM BREVE ESTUDO DA OBRA TREATISE ON ALGEBRA (1842, 1845): O PAPEL HISTÓRICO-FILOSÓFICO DA AXIOMATIZAÇÃO MATEMÁTICA

George Peacock e seu contexto de produção

George Peacock (1791-1858), matemático inglês nascido em Denton, condado de Yorkshire, ao norte do país, construiu uma vertiginosa ascensão no mundo da Ciência. Seu profundo conhecimento dos clássicos foi decisivo para que fosse agraciado em 1815 com bolsa de estudo do *Trinity College*, do qual, posteriormente foi nomeado tutor e palestrante. Naquela época o ensino da Matemática em *Cambridge* não tinha boa reputação, devido ao chauvinismo dos matemáticos britânicos, o que provocou o isolamento em relação à Europa continental de onde eram oriundos os melhores matemáticos da época.

Peacock percebeu, então, a necessidade de reforma e no mesmo ano formou com o astrônomo John Herschel (1792-1871) e o matemático Charles Babbage (1792-1871) a *Analytical Society*. Em 1817, Peacock tornou-se examinador de *Cambridge*, cargo que lhe possibilitou implementar suas ideias reformistas dentre as quais destaca-se o uso da notação diferencial no exame de Cambridge. Colocou em prática a manipulação simbólica da Álgebra que, segundo Schroeder (1997), interferiu significativamente no ensino da Álgebra e abriu novos caminhos para a Álgebra Simbólica.

Um passo bastante significativo para a separação da Álgebra e da Aritmética foi dado por Peacock, em 1830, com a publicação do *Treatise on Algebra*. Imprimiu ele uma verdadeira base científica ao ensino da Álgebra. Àquela época, na Grã-Bretanha as ciências exatas em geral, e mais especificamente a Matemática, sofreram um período de estagnação. Para superar esse problema, Peacock também fez parte da criação da *Astronomical Society of London* e *Philosophical Society of Cambridge*.

A obra

Treatise on Algebra, expõe a posição matemática revolucionária de seu autor, que liderou um movimento de redimensionamento das bases da Matemática inglesa. Peacock fez parte do momento de fertilidade matemática oriunda dos avanços econômicos e sociais que a Inglaterra estava vivenciando, o qual estava atrelado à revolução industrial e, principalmente, às novas condições de produção intelectual em que os matemáticos ingleses estavam inseridos, decorrente da abertura ao conhecimento matemático originários do resto do continente europeu.

A primeira edição de 1830 é ampliada para dois volumes, o primeiro em 1842 e o segundo em 1845, apresentando, respectivamente, os subtítulos *Arithmetical Algebra* e *On Symbolical Algebra, and its applications to the geometry of position*. Anuncia uma nova visão da Álgebra que ampliou sua concepção anteriormente restrita à Aritmética Simbólica, que se utiliza de letras para representar os números.

Nessa nova visão ficou estabelecida uma distinção entre *Álgebra Aritmética* e *Álgebra Simbólica*, pela qual, conforme Assis Neto (1995), Peacock procurava, particularmente, solucionar a questão da subtração $a–b$ quando $a < b$. Com isso, na Álgebra Aritmética eram permitidas apenas as operações com os inteiros positivos, enquanto na Álgebra Simbólica tal restrição era removida, embora as regras da Álgebra

Aritmética ainda permanecessem. Portanto, Peacock apresentou a Álgebra Simbólica como detentora de liberdade ao lidar com símbolos, desde que as leis para a manipulação dos mesmos não sejam incompatíveis entre si.

A obra *Treatise on Algebra* contempla 45 capítulos em seus dois livros. O volume I foi projetado em primeira instância para ser uma segunda edição do *Treatise on Algebra*, de 1830, mas a incorporação aos princípios desenvolvidos naquele trabalho de uma abordagem mais moderna fez com que o autor o considerasse um tratado completamente novo.

Conforme Pontes e Anjos (2012), o primeiro volume foi completamente dedicado à exposição dos princípios da Aritmética, da sua aplicação para a teoria dos números e de processos aritméticos. Nele regras foram aplicadas aos números. No prefácio desse volume, o autor manifesta a dificuldade em abordar separadamente os princípios das Álgebras Aritmética e Simbólica, uma vez que os princípios da primeira originam os da segunda. Porém, uma consideração mais madura do assunto, o convenceu da necessidade da separação por ser extremamente difícil manter seus princípios e resultados separados, quando as duas ciências são simultaneamente tratadas.

Peacock (1842) considera que os símbolos na Álgebra Aritmética são representações numéricas, e as operações as quais estão submetidos são incluídas nas mesmas definições como na aritmética usual. Os dez capítulos desse volume abordaram: princípios da Álgebra Aritmética; operações fundamentais na Aritmética; extração de raízes de números e propriedades dos números irracionais; razões e proporções; resoluções de equações; progressões aritmética, geométrica e harmônica; combinações e permutações; produtos binomiais e potências; resolução, nos números inteiros, de equações indeterminadas do primeiro grau; representação simbólica e propriedades dos números.

O segundo volume que contempla os princípios da Álgebra Simbólica, pretende apresentá-los como um sistema uniforme e conectado, foi elaborado em 35 capítulos que abordam: operações de adição, subtração, multiplicação e divisão na Álgebra Simbólica; simplificação e determinação dos maiores divisores comuns, e dos menores múltiplos comuns de expressões algébricas; princípio da permanência de formas equivalentes; teoria dos índices; extração de raízes quadradas na Álgebra Simbólica, origem de raízes ambíguas e do sinal $\sqrt{-1}$; aplicações das operações fundamentais da Álgebra Simbólica para expressões envolvendo o sinal $\sqrt{-1}$; resolução das equações quadráticas, cúbicas e biquadradas; teorema binomial; uso das raízes quadradas ou raízes maiores que 1 como sinais modificadores; propriedades simbólicas de diferentes ordens da raiz de 1; princípios gerais da interpretação dos sinais modificadores que são simbolizados pelas raízes de 1; fórmula e a expressão de Demoivre, por meio da raiz de 1 e de $a \pm b\sqrt{-1}$.

O volume II aborda também a representação e a medida de ângulos; teoria dos senos, cossenos, tangentes, cotangentes, secantes, cossecantes de ângulos; representação de retas em posição e magnitude, e a aplicação de Álgebra para a teoria das figuras planas; determinação dos lados e ângulos do triângulo; uso e aplicação de ângulos suplementares; logaritmos; séries exponenciais e logarítmicas; limites dos valores de séries procedendo conforme potências crescentes ou decrescentes dos símbolos, que são capazes de diminuição ou crescimento infinito; séries e expressões exponenciais para o seno e o cosseno de um ângulo; relações de zero e infinitude; decomposição de frações racionais com denominadores compostos em frações parciais; suposição e determinação de séries; redução e solução de equações infinitas; resolução de equações simultâneas e a teoria de eliminação; solução algébrica de equações binomiais; origem de ambiguidade.

Nesse volume Peacock (1845) considera a Álgebra como um cálculo não-interpretado. Nela, os símbolos são manipulados segundo regras previamente estipuladas. Portanto, a Álgebra Simbólica é concebida como um sistema formal, gerando, segundo Medeiros e Medeiros (1992), uma ampla mudança nos critérios de aceitação dos números negativos. De acordo com Fossa (2007, p. 52), “[...] a sua intenção foi criar uma álgebra ampliada que não somente contemplaria os números positivos, mas também os números negativos”.

Para efetivar essa nova posição, Peacock (1842) expressou o que ficou configurado como *princípio da permanência das formas equivalentes*[1]: para quaisquer formas algébricas equivalentes, quando os símbolos são gerais na forma, mas específicos no valor, serão igualmente equivalentes, quando os símbolos são gerais no valor e na forma. Portanto, esse princípio garante a validade da Álgebra Simbólica dos princípios básicos da Álgebra Aritmética.

As contribuições do sistema axiomático apresentado por Peacock

Na visão dos princípios de Álgebra Simbólica suas operações são determinadas pelas definições da Álgebra Aritmética, até onde elas ocorrem em comum, e pelo *princípio da permanência das formas equivalentes* em todos os outros casos que essas definições não podem abranger, seguirá então que em todos esses casos, o significado da operação ou do resultado obtido, sempre que tal significado possa ser nomeado, deve ser determinado em conformidade com as condições que tem que satisfazer e, por conseguinte, tem que variar conforme essas condições. De fato, o tratado Peacock supera obstáculos matemáticos, até então existentes, que impedem, por exemplo, a aceitação dos números negativos. Sobre isso Fossa (2007) ressalta que:

> Antes era difícil conceber a natureza dos números negativos; mas, talvez ainda mais importante, era quase impossível imputar um significado às regras dos sinais (especialmente a que reza que menos vezes menos dá mais), mesmo quando se usava [...] analogias como débitos para moldar os negativos em si. Com o tratado de Peacock, porém, os números negativos, bem como os positivos, eram apenas símbolos não-interpretados e as regras eram nada mais do que consequências da estrutura de um dado sistema axiomático (FOSSA, 2007, p. 53).

Nagel (1935) apresenta tal princípio como um princípio heurístico que estabelecia que as leis fundamentais dos números inteiros positivos da Aritmética eram preservadas para os novos números. Apresentando, assim, a Matemática como uma complexa estrutura de símbolos empregados sobre as leis de combinação, em que as questões de verdade e falsidade não dependiam do significado desses símbolos.

---

[1] Whatever algebraical forms are equivalent, when the symbols are general in form but specific in value, will be equivalent likewise when the symbols are general in value as well as in form" (PEACOCK, 1845, p. 59).

O princípio da permanência das formas equivalentes exposto por Peacock, atualmente, não é relevante, mas provocou uma mudança significativa na forma de compreender a Álgebra. Segundo Eves (2004), após a publicação de *Treatise on Algebra*, alguns contemporâneos de Peacock levaram adiante seus estudos e fizeram com que a noção de álgebra se aproximasse da maneira em que é atualmente entendida. Matemáticos como William Rowan Hamilton (1805-1865) e Hermann Gunther Grassmann (1809-1877) publicaram resultados de grande alcance, que levaram à libertação da álgebra, por meio do desenvolvimento da álgebra abstrata.

Segundo Anjos (2012), ao observarmos a postura de Peacock exposta em seu tratado podemos identificar indício do distanciamento ao apelo à intuição para justificar as proposições matemáticas, levando a um apuramento do processo formal e caminhando insistentemente em direção ao processo de axiomatização envolto de fortes implicações filosóficas, que foram expostas nas discussões sobre a fundamentação da matemática que reinaram durante o século XIX e XX.

A postura de Peacock a respeito dos princípios fundamentais da Álgebra consiste em tratá-la sob um princípio lógico o que equipara sua obra a Os Elementos de Euclides, sendo por isso considerado "Euclides da Álgebra". Portanto, deu um passo importante no entendimento da matemática como sistema formal. Como consequência, as regras de sinais, da mesma forma que todas as outras definições que governavam as frações e inteiros negativos não poderiam ser "provadas". Elas dão liberdade de operação e preservam as leis fundamentais da aritmética.

A possibilidade de sistematizar o conceito de número pela axiomatização trouxe consequências significativas ao modo de compreender e abordar os conceitos matemáticos. De acordo com Servidoni (2006), até então, a matemática era concebida e construída com base na observação e na experiência. As novas descobertas fizeram com que o eixo temático se deslocasse dos problemas entre o conhecimento do mundo externo para o problema da dinâmica e da cognição. Consequentemente, matemáticos começaram a refletir sobre suas próprias construções mentais.

O apuramento do referido processo eventualmente levou à ruptura com o conceito aristotélico de axiomatização, que, de acordo com Fossa (2001), considerava os axiomas como proposições intuitivamente verdadeiras. Essa postura perdurou até o século XIX, quando vários acontecimentos levaram os matemáticos a desenvolverem uma nova concepção a cerca do conhecimento matemátrico. Esse fato culminou, por exemplo, na chamada “aritmetização da análise”, o que contribuiu para a visão da matemática como uma “ciência” formal. Além disso, a descoberta das geometrias não-euclidianas mostrou que consistência não é sinônimo de verdade. Mais tarde, os paradoxos da Teoria dos Conjuntos vieram a fortalecer a nova atitude.

Ainda segundo Fossa (2001), na nova visão da matemática os axiomas são pontos de partida arbitrários, dos quais os matemáticos começam a fazer suas deduções. Portanto, a Matemática supera a questão da verdade das suas proposições, preocupando-se apenas com a validade das deduções e/ou a adequação dos axiomas para a tarefa específica sob consideração, seja ela teórica ou aplicada. Entretanto, acontecem vozes dissidentes, como a de L. E. J. Brouwer, que queria fundamentar a Matemática na intuição kantiana, ou, mais recentemente, Philip Kitcher, que quer fundamentar a Matemática no empirismo. No entanto, a visão majoritária parece ser de que a Matemática é uma “ciência” formal.

Tal caracterização do conhecimento matemático tende a ver a Matemática como manipulação de símbolos, predominando o rigor sobre a intuição. Assim, a dicotomia Rigor *versus* Intuição pode ser compreendida como elemento presente no movimento natural do caminho da construção do conhecimento humano e, de fato, ao longo de nosso transcurso investigativo do desenvolvimento histórico-epistemológico dos números negativos, evidenciamos dicotomias isomórficas a esta. Um exemplo claro é a dicotomia Prática *versus* Teoria, explícita nas discussões a legitimidade do uso dos números negativos.

A principal contribuição de Peacock para a análise matemática foi o fato de dar uma base estritamente lógica à Álgebra. Segundo Macfarlane (1916), Peacock foi o fundador do que é chamado de “escola filológica ou simbólica”.

REFERÊNCIAS

ANJOS, Marta F. dos. Um estudo histórico-epistemológico do conceito de número negativo**.** In: FOSSA, John A. (org). **Arquivo para a história da teoria dos números e da lógica**. Natal, RN: EDUFRN, 2012.

ASSIS NETO, Fernando Raul. Duas ou Três Coisas sobre o "Menos Vezes Menos dá Mais". **Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática da Ufpe**. 1995. Disponível em: http://www.ufpe.br/filosofia/arquivos/10%20Duas%20ou%20tres%20coisas%20sobre%20o%20menos%20vezes%20menos%20da%20mais.pdf.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FOSSA, J. A. O que há de errado com o quinto postulado de Euclides? In: FOSSA, John A. **Ensaios sobre a Educação Matemática**. Belém: UEPA, 2001.

FOSSA, J. A. Uma pequena história dos números inteiros. *In*: FOSSA, J. A. **Cabelos negros, olhos azuis** e outras feições das matemáticas puras e aplicadas. Natal: EDUFRN, 2007.

MACFARLANE, A. **Lectures on ten British mathematicians of the 19th century.** New York: John Wiley & Sons, 1916. pp. 7-18.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. Números Negativos: uma história de incertezas. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 7, n. 8, p. 49 -59, 1992.

NAGEL, Ernest. **Studies in the history of ideas**: impossible numbers: a chapter in the history of modern logic. Columbia University Press, 1935. v. 3.

O'CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F. **George Peacock**. 1996. Disponível em: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Peacock.html. Acesso em: 20 de jun. 2010.

PEACOCK, G. **A Treatise on Algebra**. V. I. London: J. & J. J. Deighton, Cambridge, 1842.

PEACOCK, G. **A Treatise on Algebra**. V. II. London: J. & J. J. Deighton, Cambridge, 1845.

PONTES, M. O.; ANJOS, M. F. Possibilidades de inserção da obra de George Peacock no ensino de matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Norte. **Anais**. 3 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012.

SCHROEDER, M. A Brief History of the Notation of Boole's Algebra. **Nordic Journal of Philosophical Logic**, v. 2, n. 1, Oslo,1997.

SERVIDONI, Maria do Carmo Pereira. **A axiomatização da aritmética e a contribuição Hermann Günther Graβmann.** 2006. Pontifícia Universidade Católica. PUC- São Paulo (Dissertação de Mestrado), 2006.