Teoremas de ajuste de derivabilidade e normalização em dedução natural

Palavras-chave: lógicas paracompletas, lógicas da indeterminação formal, Intuicionismo, deduções normais, conectivos de (in)determinação

Resumo: Em *Natural Deduction*, Prawitz demonstra que, dada uma dedução em um certo cálculo clássico de Dedução Natural, é possível obter sua forma normal através de certas operações, chamadas de reduções. Em particular, as reduções que têm a ver com a regra clássica do absurdo têm uma forma particular: a consequência de toda aplicação da regra clássica do absurdo é atômica. Nós demonstramos esse resultado como corolário de um Teorema de Ajuste de Derivabilidade e da propriedade de propagação de um conectivo de determinação definido na Lógica Intuicionista.

Abstract:

1. Teorema de Normalização

1.1 Introdução

No capítulo III de *Natural Deduction*, Prawitz considera a possibilidade de se obter deduções "normais" na Lógica Clássica, isto é, deduções nas quais uma conclusão seja obtida a partir das premissas de modo direito, sem complicações desnecessárias. Ele demonstra o Teorema de Normalização para o cálculo de Dedução Natural que, em termos informais, expressa que toda dedução clássica Π de α a partir de Γ pode ser transformada em uma dedução Π' na qual a conclusão α seja obtida sem rodéios (*detours*) a partir de Γ (cf. PRAWITZ, 1965: 34). O Teorema de Normalização proposto por Prawitz para o sistema de Dedução Natural é um dos resultados mais importantes em teoría da prova e resulta equivalente ao *Hauptsatz* proposto por G. Gentzen (GENTZEN, 1936) para o Cálculo de Sequentes.[1]

1.2 Cálculo de Dedução Natural

É bem sabido que nos cálculos de Dedução Natural os conectivos da linguagem dos sistemas lógicos são caracterizados pelas regras de inferência que, com exceção das

1 O *Hauptsatz*, por sua vez, expressa que toda dedução Π no Cálculo de Sequentes pode ser transformada em uma dedução Π', com o mesmo sequente final, na qual a regra do corte não seja aplicada. Daqui, que o *Hauptsatz* o Teorema Fundamental seja conhecido, também, como Teorema da Eliminação do Corte.

regras do absurdo, são regras de introdução (regras I) e regras de eliminação (regras E). Em particular, os sistemas de Dedução Natural para a Lógica Clássica (**LC**) e para a Lógica Intuicionista (**LI**) na assinatura $\Sigma^{\perp\to\wedge\vee}$ contêm as mesmas regras de introdução e de eliminação dos conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\to$, e se diferenciam apenas nas regras do absurdo. Essas regras comuns para **LC** e **LI** são:

$$\text{I}\wedge \quad \frac{\alpha \quad \beta}{\alpha\wedge\beta} \qquad\qquad \text{E}\wedge \quad \frac{\alpha\wedge\beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha\wedge\beta}{\beta}$$

$$\text{I}\to \quad \frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \Pi\\ \beta\end{array}}{\alpha\to\beta} \qquad\qquad \text{E}\to \quad \frac{\alpha \quad \alpha\to\beta}{\beta}$$

$$\text{I}\vee \quad \frac{\alpha}{\alpha\vee\beta} \qquad \frac{\beta}{\alpha\vee\beta} \qquad\qquad \text{E}\vee \quad \frac{\alpha\vee\beta \quad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \Pi_1\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\beta]\\ \Pi_2\\ \gamma\end{array}}{\gamma}$$

Observação 1: A notação

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \Pi\end{array}}{\psi}$$

significa que a regra supõe, como hipótese, a existência de uma derivação Π de ψ a partir de φ. O cancelamento da hipótese φ, denotado $[\varphi]$, é resultado da aplicação da regra.

A respeito das regras do absurdo, **LI** aceita uma versão fraca do absurdo clássico $\perp_c$, admitindo-se apenas a regra $\perp_i$:

$$\perp_i \qquad\qquad\qquad \perp_c \quad \begin{array}{c}[\alpha\to\perp]\\ \Pi\end{array}$$

$$\frac{\perp}{\alpha} \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\perp}{\alpha}$$

Na versão do cálculo de Dedução Natural apresentado por Prawitz, estas duas regras do absurdo recebem as seguintes restrições: a) em $\perp_i$ a fórmula final α é diferente de $\perp$; b) em $\perp_c$ a fórmula final α não é da forma $\beta \rightarrow \perp$.

As deduções em um cálculo de Dedução Natural costumam ser apresentadas como árvores de derivação (árvores de dedução), tal que o topo —folhas— da árvore são as suposições, ou hipóteses, e a raiz é a fórmula final. As fórmulas que não estão no topo são obtidas das fórmulas que estão acima por meio da aplicação de alguma das regras de inferência do cálculo. Cada regra E, para um certo conectivo $\boxdot$, contém uma premissa maior, que é a premissa na qual o conectivo lógico $\boxdot$ aparece; as outras premissas, se existirem, são chamadas de premissas menores.

1.3 Inversão, Reduções e Normalização

1.3.1 Regras de Introdução e de Eliminação

Como fica claro, a ordem de aplicação das regras de inferência não é determinada nem pela fórmula final, nem pelas suposições iniciais da inferência. Assim, existem diversas deduções possíveis para uma fórmula α, a partir de um conjunto de suposições Γ. E, ainda, podem existir deduções nas quais a fórmula final seja obtida por aplicações desnecessárias das regras de inferência. Assim, o objetivo da normalização das deduções consiste em demonstrar que toda dedução pode ser transformada em uma dedução que não contenha passos inferenciais desnecessários. Uma fórmula que seja consequência de uma regra I ou de uma regra para $\perp$ e que seja também premissa maior de uma regra E constitui uma complicação na dedução e deve, portanto, ser removida. Um primeiro teorema demonstrado por Prawitz expressa que uma ocorrência de uma fórmula em uma dedução Π que seja consequência da aplicação de uma regra I e que seja, também, premissa maior de uma aplicação de uma regra E pode ser removida da dedução. Com tal finalidade, Prawitz mostra, para cada uma das constantes $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$($\forall$ e $\exists$), a maneira de se reduzir tais deduções desnecessárias. Prawitz demonstra o seguinte Teorema de Inversão.

Teorema 2: (Teorema de Inversão) Se $\Gamma\vdash\alpha$ então existe uma dedução de α a partir de Γ na qual nenhuma ocorrência de uma fórmula é tanto consequência de uma aplicação de uma regra I, quanto premissa maior de uma aplicação de uma regra E (cf. PRAWITZ, 1965: 34).

Exemplo 3: Na seguinte redução, a dedução à direita é uma $\vee$-redução da dedução à esquerda:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Theta\\ \alpha_i\end{matrix}}{\alpha_1\vee\alpha_2} \quad \begin{matrix}[\alpha_1]\\ \Pi_1\\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\alpha_2]\\ \Pi_2\\ \gamma\end{matrix}}{\begin{matrix}\gamma\\ \Omega\end{matrix}} \qquad\qquad \begin{matrix}\Theta\\ \alpha_i\\ \Pi_i\\ \gamma\\ \Omega\end{matrix}$$

com i = 1 ou 2.

O Teorema de Inversão expresa que é possível remover as complicações e se obter deduções que não façam rodéios (*detours*). No entanto, o Teorema de Inversão requer certas modificações para se considerar também o caso da regra $\perp_c$; esse Teorema não fala à respeito dos rodéios ocasionados pelas aplicações da regra do absurdo cujas conclusões sejam, por sua vez, premissa de uma regra E, pois a regra $\perp_c$ fica fora da distinção entre regras de Introdução e regras de Eliminação.

No entanto, como Prawitz assinala, seria possível ter um cálculo clássico de Dedução Natural na linguagem $\Sigma^{\neg\wedge\vee\rightarrow}$, no qual todas as regras fossem, bem regras I, bem regras E. Um tal sistema poderia se obter substituindo a regra clássica $\perp_c$ pelas seguintes duas regras de Introdução e Eliminação para o conectivo da negação $\neg$:

$$\mathrm{I}\neg\ \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \Pi_1\\ \beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\alpha]\\ \Pi_2\\ \neg\beta\end{matrix}}{\neg\alpha} \qquad\qquad \mathrm{E}\neg\ \dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

Contudo, como Prawitz nota, a dedução do Princípio de Terceiro Excluído (PTE): $\alpha\vee\neg\alpha$ evidencia que essas regras para a negação, e portanto, um tal cálculo clássico nessa linguagem, não satisfazem o Teorema de Inversão. Com efeito, a fórmula $\neg\neg(\alpha\vee\neg\alpha)$ é conclusão da aplicação da regra I $\neg$ e premissa maior da aplicação da regra E $\neg$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]}{\alpha\vee\neg\alpha} \quad \neg(\alpha\vee\neg\alpha)}{\neg\alpha}}{\alpha\vee\neg\alpha} \qquad [\neg(\alpha\vee\neg\alpha)]}{\neg\neg(\alpha\vee\neg\alpha)}$$

Assim, no capítulo III de *Natural Deduction*, Prawitz amplia o escopo do **Teorema 2**, apresentando as reduções correspondentes à regra $\perp_c$.

1.3.2 Regra para o Absurdo

Para minimizar problemas com a regra clássica $\perp_c$, Prawitz considera o fragmento clássico **LC'** escrito na assinatura reduzida $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$, e na qual o conectivo da disjunção $\vee$ é definido da maneira usual a partir dos restantes conectivos da linguagem. Assim, o sistema clássico **LC'** contém apenas regras de Introdução e de Eliminação dos conectivos $\wedge$ e $\rightarrow$, e regras para o absurdo $\perp$.[2] Para um tal cálculo **LC'**, Prawitz demonstra que as aplicações da regra clássica $\perp_c$ podem ser restringidas a casos nos quais a conclusão da regra seja atômica.

Teorema 4: Seja **LC'** o sistema clássico escrito na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$. Se $\Gamma\vdash_{\mathbf{LC'}}\alpha$, então existe uma dedução em **LC'** de α a partir de Γ na qual a consequência de toda aplicação da regra $\perp_c$ é atômica (cf. PRAWITZ, 1965: 39).

Demonstração: (cf. PRAWITZ, 1965: 39) Seja Π uma dedução em **LC'** de α a partir de Γ na qual d é o grau maior da consequência da aplicação de uma regra $\perp_c$, com $d > o$.[3] Seja φ uma consequência de uma aplicação ρ da regra $\perp_c$ em Π, tal que o seu grau seja d e nenhuma consequência de uma aplicação da regra $\perp_c$ em Π que esteja acima de φ seja de grau d. Assim, Π é da forma:

---

2 A rigor, o sistema clássico **LC'** contém, também, $\forall$ como signo primitivo a partir do qual $\exists$ é definido.

3 O *grau d* de uma fórmula α é a quantidade de ocorrências de constantes lógicas em α, exceptuando $\perp$ (cf. PRAWITZ, 1965: 15).

$$\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \Sigma \\ \bot \\ \hline \varphi \\ \Pi_1 \end{array}$$

em que $[\neg\varphi]$ é o conjunto de suposições descarregadas por ρ. Assim, φ é da forma $\beta\wedge\gamma$ ou $\beta\rightarrow\gamma$ (ou $\forall x B$). Para o nosso fim, é suficiente mostrar a maneira na qual são removidas aplicações da regra $\bot_c$, transformando Π nos casos em que $\varphi = \beta\wedge\gamma$ ou $\varphi = \beta\rightarrow\gamma$. Assim:

Caso 1: $\varphi = \beta\wedge\gamma$

$$\begin{array}{cc} [\beta\wedge\gamma] \qquad\qquad & [\beta\wedge\gamma] \qquad\qquad \\ \beta \qquad [\neg\beta] & \gamma \qquad [\neg\gamma] \\ \bot & \bot \\ \hline \neg(\beta\wedge\gamma) & \neg(\beta\wedge\gamma) \\ \Sigma & \Sigma \\ \bot & \bot \\ \hline \beta & \gamma \\ \multicolumn{2}{c}{\beta\wedge\gamma} \\ \multicolumn{2}{c}{\Pi_1} \end{array}$$

Caso 2: $\varphi = \beta\rightarrow\gamma$

$$\begin{array}{c} [\beta] \quad [\beta\rightarrow\gamma] \qquad\qquad \\ \gamma \qquad\qquad [\neg\gamma] \\ \bot \\ \hline \neg(\beta\rightarrow\gamma) \\ \Sigma \\ \bot \\ \hline \gamma \\ \beta\rightarrow\gamma \\ \Pi_1 \end{array}$$

As novas aplicações da regra $\perp_c$ que surgem a partir dessas transformações têm consequências de grau menor do que *d*. Logo, aplicando sucesivamente essas transformações, são obtenidas deduções de α a partir de Γ nas quais a conclusão de toda aplicação da regra $\perp_c$ é atômica. ■

Desse modo, como a consequência de toda aplicação da regra do absurdo $\perp_c$ é atômica, então ela não pode ser, por sua vez, premissa maior de qualquer regra de Eliminação.[4] Assim, o Teorema de Inversão junto com o **Teorema 4** expressam que as derivações podem ser reduzidas de modo que elas não contenham nenhuma ocorrência de uma fórmula que seja tanto consequência de uma regra I ou de uma regra para $\perp$, quanto premissa maior de uma regra E. O Teorema de Normalização expressa que as deduções podem ser transformadas em *deduções normais*.

Teorema 5: (Teorema de Normalização) Seja Π uma dedução em **LC**. Então Π pode ser efetivamente transformada em uma dedução Π' em **LC'** tal que Π' esteja na forma normal (cf. PRAWITZ, 1965: 40s).

Observação 6: Assim como a demonstração do PTE evidencia a falha do Teorema de Inversão para o cálculo clássico com regras para o conectivo da negação, o PTE não satisfaz, também, o Teorema de Normalização: não é possível obter uma demonstração de $\alpha\vee\neg\alpha$ por aplicações da regra $\perp_c$, cujas conclusões sejam apenas fórmulas atômicas.

A seguir, nosso objetivo será demonstrar o **Teorema 4** usando ideias surgidas no âmbito das Lógicas da Inconsistência Formal e estendidas, posteriormente, para o âmbito das Lógicas da Indeterminação Formal (*Logics of Formal Undeterminedness* - LFUs).

2. **Lógicas paracompletas e LFUs**

---

4 No entanto, a conclusão de uma aplicação desta regra poderia ser, tal como se afirma em (BASTOS MASSI, 1990: 11), premissa menor da regra E$\rightarrow$, cuja premissa maior é uma fórmula do topo da árvore da forma $\alpha\rightarrow\perp$. Contudo, neste caso a aplicação de $\perp c$ pode ser removida.

Levando em consideração a dualidade entre as lógicas paraconsistentes e as lógicas paracompletas, em (MARCOS, 2005) foi proposto o conceito de Lógicas da Indeterminação Formal (**LFUs**). Como é bem sabido, uma lógica é paracompleta com relação à negação $\neg$, se tal conectivo de negação não satisfaz o Princípio de Terceiro Exluído (PTE). Em termos da relação de consequência com conclusão múltiplas $\Vdash$, uma lógica se diz paracompleta com relação a uma negação $\neg$, se ela não satisfaz o Princípio de Implosão (PI):

$$\Vdash \alpha, \neg\alpha.$$

As **LFUs** são um tipo especial de lógica paracompleta. Apesar de terem uma negação paracompleta, elas podem expressar a indeterminação da negação e satisfazer uma versão fraca do PTE ou do PI. A internalização da noção de indeterminação é feita, em termos gerais, a partir de um conjunto $\circledast(\ )$ de fórmulas, tal que $\circledast(p)$ é um conjunto de fórmulas que depende apenas da variável p. No caso de $\circledast(p)$ ser um conjunto unitário, $*p$ expressará o único elemento desse conjunto. Nesse caso particular, $*$ é um conectivo unário de indeterminação, de modo que $*\alpha$ denota que a fórmula α é indeterminada. Assim, por sua capacidade de expressar a noção de indeterminação na linguagem objeto, as **LFUs** podem validar a seguinte versão fraca do PTE, chamada de Princípio de Terceiro Excluido Gentil (PTEG):

$$\Vdash \alpha \vee \neg\alpha \vee *\alpha$$

ou do PI, isto é: Princípio de Implosão Gentil (PIG):

$$\Vdash \alpha, \neg\alpha, *\alpha.$$

Assim, mediante um conectivo de indeterminação $*$, as **LFUs** conseguem recuperar uma versão do PTE perdido nas lógicas completas, acrescentando alternativas indeterminadas. Por outro lado, o conceito de determinação das fórmulas pode ser definido na linguagem a partir do conectivo unário de indeterminação e da negação paracompleta da seguinte maneira:

Definição 7: $\circ\alpha =_{def} \neg *\alpha$

Desse modo, nas LFUs teremos, também, a seguinte versão fraca do PTE:

$$\circ\alpha \Vdash \alpha\vee\neg\alpha.$$

A ideia geral que está por trás destas versões dos princípios da lógica completa é a de que as **LFUs**, por sua capacidade de assumir explicitamente a (in)determinação das fórmulas por meio da introdução do conceito de (in)determinação na linguagem objeto, podem recuperar tanto versões fracas do PTE ou do PI, quanto da totalidade das inferências da lógica completa. A recuperação das inferências da lógica completa no âmbito da lógica paracompleta é expressa no Teorema de Ajuste de Derivabilidade (DAT), cuja formulação geral expomos a seguir.

Teorema 8: (DAT) Considere duas lógicas, $\mathbf{L}_1 = <For(\Sigma^1), \Vdash_1>$ e $\mathbf{L}_2 = <For(\Sigma^2), \Vdash_2>$ tais que $\Sigma^1 = \Sigma^2$, tal que $\mathbf{L}_1$ satisfaz PTE e tais que $\Vdash_2 \subset \Vdash_1 \subseteq \wp(For(\Sigma^{\mathbf{L}})) \times (For(\Sigma^{\mathbf{L}}))$ é um fragmento dedutivo próprio de $\mathbf{L}_1$ que valida as inferências de $\mathbf{L}_1$ se, e somente se, elas forem compatíveis com a falha do PTE. E seja ©(p) um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas de $\mathbf{L}_2$ que depende exatamente da variável proposicional p. Então:

$$\forall\Gamma\forall\alpha\exists\Delta(\Gamma \Vdash_1 \alpha \Leftrightarrow ©(\Delta), \Gamma \Vdash_2 \alpha).$$

Assim como é possível obter uma versão determinada de PTE, o DAT expressa que cada inferência completa perdida na lógica paracompleta pode ser recuperada nas **LFUs** pelo acréscimo de premissas determinadas.

2.1 Conectivos de determinação e Teoremas de Ajuste de Derivabilidade

Neste trabalho, proporemos dois conectivos de determinação para a Lógica Intuicionista e mostraremos a maneira de se recuperar o raciocínio completo acrescentando premissas determinadas no âmbito desta lógica paracompleta. Definiremos dois conectivos de determinação $\ominus$ e $\oslash$ em termos de princípios clássicos não aceitos em **LI**, demonstraremos dois teoremas DATs e, finalmente, demontraremos o **Teorema 4** proposto por Prawitz.

Como é bem sabido, um sistema axiomático para **LC** pode ser obtido acrescentando apenas uma das seguintes fórmulas como esquemas de axiomas à base axiomática para **LI**:

PTE: $\alpha\vee\neg\alpha$

DN: $\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$

Definição 9: Definimos dois novos conectivos em termos daqueles princípios clássicos da seguinte maneira:

1. $\oslash\alpha =_{def} \alpha\vee\neg\alpha$,
2. $\ominus\alpha =_{def} \neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$.

O conectivo $\oslash$ recupera as derivações de **LC** em **LI** da maneira seguinte.

Teorema 10: (DAT_1 **LC-LI**) Para todo conjunto Γ e toda fórmula α tal que $\Gamma\cup\{\alpha\}\subseteq For(\Sigma^{\perp\wedge\vee\rightarrow})$. Então:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } \oslash\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha.$$

Demonstração: Por indução no comprimento da dedução, em Dedução Natural, de $\Gamma\vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$.

$\Rightarrow$ Assuma $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. Então existe uma dedução Π, no sistema clássico de Dedução Natural, de α a partir de Γ. Caso base: comprimento da dedução $c(\Pi) = 1$. Como o sistema de Dedução Natural na versão de Prawitz não contém axiomas, apenas devemos demonstrar o caso em que $\alpha\in\Gamma$. Se $\alpha\in\Gamma$, então pela propriedade de reflexividade de $\vdash_{\mathbf{LI}}$ temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Logo, pela propriedade de monotonicidade obtemos $\oslash\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$.

Se $\alpha\notin\Gamma$, então Π é uma dedução de α a partir de Γ que resulta da aplicação de algumas das regras de inferência para **LC**: I$\wedge$, E$\wedge$, I$\vee$, E$\vee$, $\perp_c$, etc. Como a diferença entre o cálculo de Dedução Natural de **LC** e de **LI** reside nas regras do absurdo, apenas devemos analisar o caso em que α for resultado da aplicação da regra do absurdo clássico. Seja, então, $c(\Pi) = n$ o comprimento da dedução de α a partir de Γ por meio da regra $\perp_c$. Então, existe uma dedução Σ de $\perp$ a partir de $\neg\alpha, \Gamma$ tal que $c(\Sigma) = m$, com $m<n$. Por hipótese de indução, temos então que existe uma dedução intuicionista de $\perp$ a partir de $\oslash\perp, \neg\alpha, \Gamma$, *i.e.*, $\perp\vee\neg\perp, \neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$. Como $\neg\perp =_{def} \perp\rightarrow\perp$ e temos que $\vdash_{\mathbf{LI}} \perp\rightarrow\perp$, então por I$\vee$ temos que $\vdash_{\mathbf{LI}} \perp\vee(\perp\rightarrow\perp)$ que equivale, por definição de $\neg$, a $\vdash_{\mathbf{LI}} \perp\vee\neg\perp$. Logo, usando o corte obtemos $\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$. Por I$\rightarrow$, temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\alpha\rightarrow\perp$, que

equivale, pela definição de $\neg$, a $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha$. Por outro lado, temos que $\neg\alpha, \neg\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \bot$ a partir do qual obtemos, aplicando a regra $\bot_i$, $\neg\alpha, \neg\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Como temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha$, então pela propriedade do corte temos que $\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Como temos também que $\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, então aplicando a regra E$\vee$ às duas demonstrações temos que $\alpha\vee\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Daqui, pela definição de $\oslash$, temos então $\oslash\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$.

$\Leftarrow$ Assuma $\oslash\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Como **LC** estende **LI**, temos que $\oslash\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$ que, pela definição de $\oslash$ equivale a $\alpha\vee\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. Como $\vdash_{\mathbf{LC}} \alpha\vee\neg\alpha$, então pela regra do corte, temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. ■

Exemplo 11: Considere os seguintes exemplos:

1. $\vdash_{\mathbf{LC}} \neg\neg p\to p$, mas $\nvdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg p\to p$. Porém, $(\neg\neg p\to p)\vee\neg(\neg\neg p\to p)\vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg p\to p$.
2. $\vdash_{\mathbf{LC}} p\vee(p\to q)$, mas $\nvdash_{\mathbf{LI}} p\vee(p\to q)$. Porém, $(p\vee(p\to q))\vee\neg(p\vee (p\to q))\vdash_{\mathbf{LI}} p\vee(p\to q)$.
3. $\neg p\to q\vdash_{\mathbf{LC}} p\vee q$, mas $\neg p\to q\nvdash_{\mathbf{LI}} p\vee q$. Porém, $(p\vee q)\vee\neg(p\vee q),\neg p\to q\vdash_{\mathbf{LI}} p\vee q$.
4. $\neg(\neg p\vee\neg q)\vdash_{\mathbf{LC}} p\wedge q$, mas $\neg(\neg p\vee\neg q)\nvdash_{\mathbf{LI}} p\wedge q$. Porém, $(p\wedge q)\vee\neg(p\wedge q),\neg(\neg p\vee\neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p\wedge q$.

Um segundo DAT vinculando **LC** e **LI** pode ser obtido trocando o operador $\oslash$ pelo operador $\ominus$ no **Teorema 10**. O conectivo $\ominus$ recupera as derivações de **LC** em **LI** do seguinte modo.

Teorema 12: (DAT$_2$ **LC-LI**) Para todo conjunto Γ e toda fórmula α tal que $\Gamma\cup\{\alpha\}\subseteq For(\Sigma^{\bot\wedge\vee\to})$. Então:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } \ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha.$$

Demonstração: $\Rightarrow$ Como no caso anterior, apenas consideramos o caso em que α é obtida a partir de Γ pela aplicação da regra $\bot_c$. Usando a hipótese de indução obtemos $\ominus\bot, \neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \bot$. Pela definição de $\ominus$ obtemos $\neg\neg\bot\to\bot, \neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \bot$. Como $\neg\neg\bot\to\bot$

$=_{def}$ $((\bot\to\bot)\to\bot)\to\bot$ e, como $\vdash_{\mathbf{LI}}$ $((\bot\to\bot)\to\bot)\to\bot$, pois $\vdash_{\mathbf{LI}}$ $((\alpha\to\alpha)\to\alpha)\to\alpha$, então $\neg\alpha$, $\vdash_{\mathbf{LI}}$ $\bot$. Logo, aplicando a regra I$\to$, obtemos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha$. Daqui, e pelo fato de $\neg\neg\alpha\to\alpha, \neg\neg\alpha \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, então por corte obtemos $\ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$.

$\Leftarrow$ Como no **Teorema 10**, observando o fato de $\ominus\alpha =_{def} \neg\neg\alpha\to\alpha$ e de $\vdash_{\mathbf{LC}} \neg\neg\alpha\to\alpha$. ■

Exemplos 13: Considere os seguintes exemplos:

1. $\neg p\to\neg q, q \nvdash_{\mathbf{LI}} p$. Porém, $\neg\neg p\to p, \neg p\to\neg q, q \vdash_{\mathbf{LI}} p$.
2. $\neg(p\to q) \nvdash_{\mathbf{LI}} p\wedge\neg q$, mas $\neg\neg(p\wedge\neg q)\to(p\wedge\neg q), \neg(p\to q) \vdash_{\mathbf{LI}} p\wedge \neg q$.
3. $\neg p\to q \nvdash_{\mathbf{LI}} p\vee q$, mas $\neg\neg(p\vee q)\to(p\vee q), \neg p\to q \vdash_{\mathbf{LI}} p\vee q$.
4. $\neg(p\wedge\neg q) \nvdash_{\mathbf{LI}} p\to q$, mas $\neg\neg(p\to q)\to(p\to q), \neg(p\wedge\neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p\to q$.

Esses dois Teoremas DATs —DAT$_1$ **LC-LI** e DAT$_2$ **LC-LI**— mostram que toda dedução clássica $\Gamma \Vdash \alpha$, com $\Gamma\cup\{\alpha\}\subseteq For(\Sigma^{\bot\wedge\vee\to})$ pode ser recuperada em **LI** se a transformarmos em uma dedução na qual a conclusão da inferência for acrescentada como única premissa determinada, isto é, se acrescentarmos —unicamente— $\oslash\alpha$ ou $\ominus\alpha$. Assim, temos que toda dedução clássica Π da forma

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi\\ \alpha\end{array}$$

pode ser transformada em uma dedução intuicionista Π' da forma

$$\begin{array}{c}\Gamma\cup\{\alpha\vee\neg\alpha\}\\ \Pi'\\ \alpha\end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c}\Gamma\cup\{\neg\neg\alpha\to\alpha\}\\ \Pi'\\ \alpha\end{array}$$

Apesar da similitude entre os teoremas **Teoremas DATs 10** e **12**, a seguir mostraremos uma diferença importante entre eles: o **DAT 10**, a diferença do **Teorema DAT 12** pode ser, em um certo sentido, simplificado.

Definição 14: Dizemos que um *conectivo* unário $\boxdot$ é *propagado* na assinatura Σ do sistema L, sse $\boxdot\alpha_1,\ldots,\boxdot\alpha_n \Vdash \boxdot®(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, para todo conectivo *n*-ário $® \in \Sigma$ da linguagem de L.

Explicaremos a diferença entre esses DATs em termos da (não)propagação dos conectivos de determinação $\oslash$ e $\ominus$ em LI.

Proposição 15: O conectivo $\oslash$ é propagado em **LI** na assinatura $\Sigma^{\bot\neg\wedge\vee\rightarrow}$:

1. $\vDash_{\mathbf{LI}} \oslash\bot$,
2. $\oslash\alpha \vDash_{\mathbf{LI}} \oslash\neg\alpha$,
3. $\oslash\alpha, \oslash\beta \vDash_{\mathbf{LI}} \oslash(\alpha\wedge\beta)$,
4. $\oslash\alpha, \oslash\beta \vDash_{\mathbf{LI}} \oslash(\alpha\vee\beta)$,
5. $\oslash\alpha, \oslash\beta \vDash_{\mathbf{LI}} \oslash(\alpha\rightarrow\beta)$.

Demonstração: (Cf. CORBALAN, 2012: 183s) ■

Como notamos, o **Teorema 10** garante que as inferências clássicas da forma $\Gamma \Vdash \alpha$ perdidas em **LI** podem ser recuperadas se acrescentarmos a conclusão da inferência como única premissa $\oslash\alpha$ determinada. Como demonstramos que o conectivo de determinação $\oslash$ usado em tal DAT é propagado em LI na assinatura $\Sigma^{\bot\neg\wedge\vee\rightarrow}$, então podemos apresentar uma versão simplificada do **Teorema DAT 10**. Nesta nova versão propomos recuperar as inferências clássicas perdidas em **LI** acrescentando apenas *premissas* determinadas *atômicas*.

Teorema 16: Seja $var(\alpha) = \{p_1,\ldots,p_n\}$ o conjunto de variáveis proposicionais de α. Então:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } \oslash p_1,\ldots,\oslash p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha.$$

Demonstração: Considere $\alpha \in For(\Sigma^{\bot\neg\wedge\vee\rightarrow})$ tal que $var(\alpha) = \{p_1,\ldots,p_n\}$. Pela **Proposição 15**, temos que $\oslash p_1,\ldots,\oslash p_n \vDash_{\mathbf{LI}} \oslash\alpha$. Pela completude da semântica de modelos, temos que $\oslash p_1,\ldots,\oslash p_n \vdash_{\mathbf{LI}} \oslash\alpha$. Pelo **Teorema 10** temos que $\oslash\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$ sse $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. Daqui temos que $\oslash p_1,\ldots,\oslash p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$ sse $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. ■

Exemplo 17: Considere os seguintes exemplos e confronte-os com 1 - 4 do **Exemplo 11**:

1. $\nvdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg p\rightarrow p$, mas $\oslash p \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg p\rightarrow p$,
2. $\nvdash_{\mathbf{LI}} p\vee(p\rightarrow q)$, mas $\oslash p \vdash_{\mathbf{LI}} p\vee(p\rightarrow q)$,
3. $\neg p\rightarrow q \nvdash_{\mathbf{LI}} p\vee q$, mas $\oslash p, \neg p\rightarrow q \vdash_{\mathbf{LI}} p\vee q$,
4. $\neg(\neg p\vee\neg q) \nvdash_{\mathbf{LI}} p\wedge q$, mas $\oslash p, \oslash q, \neg(\neg p\vee\neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p\wedge q$.

Este novo **DAT 16** pode ser considerado como uma versão simplificada do **DAT 10**, porquanto a recuperação em **LI** das inferências clássicas é possível pelo acréscimo de premissas atômicas e, portanto, com estrutura de menor complexidade que a premissa determinada do **DAT 10**. Com efeito, o novo **DAT 16** permite afirmar que toda dedução clássica Π de α a partir de Γ, com $\Gamma\cup\{\alpha\}\subseteq For(\Sigma^{\perp\neg\wedge\vee\rightarrow})$,

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi\\ \alpha\end{array}$$

pode ser transformada em uma dedução intuicionista Π' de α a partir de $\Gamma\cup\{p_1\vee\neg p_1,\ldots,p_n\vee\neg p_n\}$, desde que $var(\alpha) = \{p_1,\ldots,p_n\}$

$$\begin{array}{c}\Gamma\cup\{p_1\vee\neg p_1,\ldots,p_n\vee\neg p_n\}\\ \Pi'\\ \alpha\end{array}$$

No entanto, nesta nova versão **DAT 16**, a quantidade de premissas a serem acrescentadas para garantir a recuperação das inferências clássicas pode ser maior que no **Teorema 10**. Com efeito, a versão 10 do DAT entre **LC** e **LI**, garante que é suficiente acrescentarmos apenas uma premissa determinada; se utilizamos a versão 16, não temos como garantir que apenas uma premissa deva ser acrescentada.

A situação do **DAT 12** é diferente à do **DAT 10**, pois em **LI** o conectivo de determinação $\ominus$ não é, em geral, propagado na assinatura $\Sigma^{\perp\neg\wedge\vee\rightarrow}$, mas apenas em $\Sigma^{\perp\neg\wedge\rightarrow}$.

Proposição 18: Em LI temos:

1. $\vDash_{\mathbf{LI}} \ominus\perp$,
2. $\ominus\alpha \vDash_{\mathbf{LI}} \ominus\neg\alpha$,
3. $\ominus\alpha, \ominus\beta \vDash_{\mathbf{LI}} \ominus(\alpha\wedge\beta)$,
4. $\ominus\alpha, \ominus\beta \nvDash_{\mathbf{LI}} \ominus(\alpha\vee\beta)$,
5. $\ominus\alpha, \ominus\beta \vDash_{\mathbf{LI}} \ominus(\alpha\rightarrow\beta)$.

Demonstração: (Cf. CORBALAN, 2012: 187s) ■

Pelo fato da inferência clássica $\neg\neg p\rightarrow p \Vdash p\vee\neg p$ não ser válida em **LI**, o conectivo de determinação $\ominus$ não é propagado para o conectivo da disjunção em **LI**. Embora não tenhamos a propagação do conectivo de determinação $\ominus$ na assinatura de **LI**, os seguintes exemplos sugerem que poderiamos obter uma versão simplificada do **Teorema 12**, na qual apenas premissas atômicas determinadas sejam acrescentadas para recuperarmos as inferências de **LC** perdidas.

Exemplo 19: Considere os seguintes exemplos:

1. Em 13 dissemos que $\ominus(p\rightarrow q), \neg(p\wedge\neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p\rightarrow q$. Mas também temos que $\ominus q, \neg(p\wedge\neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p\rightarrow q$.
2. Em 13 dissemos que $\ominus(p\wedge\neg q), \neg(p\rightarrow q) \vdash_{\mathbf{LI}} p\wedge\neg q$. Mas também temos que $\ominus p, \neg(p\rightarrow q) \vdash_{\mathbf{LI}} p\wedge\neg q$.

2.1.1 Propagação e restauração

Como notamos, o **Teorema DAT 12** não pode ser simplificado tal como o **Teorema DAT 10**, pois a inferência $\neg\neg p\rightarrow p \Vdash p\vee\neg p$ não é válida em **LI** e, portanto, em **LI** o conectivo de determinação $\ominus$ não é propagado para o conectivo da disjunção. Desse modo, embora $p\vee\neg p$ seja um teorema clássico perdido em **LI**, não temos como recuperá-lo acrescentando apenas $\ominus p$ como premissa de restauração.

No entanto, como mostramos na **Proposição 18** a propagação do conectivo de determinação $\ominus$ falha, apenas, para a disjunção. Desse modo, considerando o fato do conectivo $\ominus$ ser propagado na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$, podemos propor uma versão simplificada do **Teorema DAT 12** para o fragmento de **LI** escrito em tal assinatura reduzida. Assim, uma versão simplificada do **Teorema DAT 12** entre **LC** e **LI**, que garanta que é suficiente acrescentar variáveis proposicionais determinadas da forma $\ominus p$ para recuperarmos em **LI** as inferências clássicas perdidas, pode ser demonstrado se restringirmos a assinatura de **LI**, e consequentemente de **LC**, a $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$. Para isso, a seguir apresentamos, em primeiro lugar, uma versão do **DAT 12** na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$.

Lema 20: Seja **LC'** o fragmento da lógica clássica escrito na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$ e seja **LI'** o fragmento da lógica intuicionista escrito nessa assinatura. Para todo $\Gamma\cup\{\alpha\}\subseteq For(\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow})$. Então:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha \text{ sse } \ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI'}} \alpha.$$

Demonstração: Similar à demonstração do Teorema 12, observando que as regras da disjunção não foram utilizadas naquela demonstração. ■

Teorema 21: Seja $\Gamma\cup\{\alpha\}\subseteq For(\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow})$. Seja $var(\alpha) = \{p_1,\ldots,p_n\}$ o conjunto das variáveis proposicionais de α. Então:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha \text{ sse } \ominus p_1,\ldots,\ominus p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI'}} \alpha.$$

Demonstração: Similar à demonstração do **Teorema 16**, levando em consideração o **Lema 20** e a **Proposição 18**, cláusulas 1, 3 e 5. ■

3. Teorema de Ajuste de Derivabilidade e Normalização

Considerando essa nova versão simplificada do **Teorema 12**, cuja demonstração é baseada na propagação do conectivo $\ominus$ em **LI** na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$ propomos, a seguir, uma nova demonstração do **Teorema 4** proposto por Prawitz. Para maior clareza, lembramos a formulação daquele teorema.

Teorema 4: Seja **LC'** o sistema clássico escrito na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$. Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha$, então existe uma dedução em **LC'** de α a partir de Γ na qual a consequência de toda aplicação da regra $\perp_c$ é atômica (cf. PRAWITZ, 1965: 39).

Demonstração: Seja $\Pi^{\mathbf{C'}}$ uma dedução clássica de α a partir de Γ em **LC'**. Se a regra $\perp_c$ não foi utilizada em $\Pi^{\mathbf{C'}}$ ou $\perp_c$ foi utilizada e tem conclusão atômica, então o teorema vale trivialmente. Se a regra $\perp_c$ foi utilizada em $\Pi^{\mathbf{C'}}$ —e não pode ser substituída por aplicações das regras intuicionistas— então $\Gamma \nvdash_{\mathbf{LI'}} \alpha$. Porém, pelo **DAT 21**, como $\Gamma \nvdash_{\mathbf{LI'}} \alpha$, existe uma dedução intuicionista $\Sigma^{\mathbf{I}}$ de α a partir de $\Gamma\cup\{\ominus p_1,\ldots,\ominus p_n\}$, em que $\{p_1,\ldots,p_n\} = var(\alpha)$. Em consequência, temos que toda aplicação da regra clássica $\perp_c$ em $\Pi^{\mathbf{C'}}$ pode ser substituída por aplicações de regras intuicionistas, se acrescentarmos as fórmulas $\ominus p_1,\ldots,\ominus p_n$ como premissas da dedução. Assim, pelo **DAT 21**, temos uma dedução de α a partir de $\Gamma\cup\{\ominus p_1,\ldots,\ominus p_n\}$ na qual a regra $\perp_c$ não é utilizada, isto é, $\ominus p_1,\ldots,\ominus p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI'}} \alpha$. Daqui obtemos que existe uma dedução em **LC'** de α a partir de $\Gamma\cup\{\ominus p_1,\ldots,\ominus p_n\}$ na qual a regra $\perp_c$ não é utilizada. Para cada i, considere a seguinte dedução: $\neg\neg p_i, \neg p_i \vdash_{\mathbf{LC'}} \perp$. Daqui, aplicando a regra de absurdo clássico obtemos $\neg\neg p_i \vdash_{\mathbf{LC'}} p_i$ e, daqui, por aplicação da regra I$\rightarrow$, obtemos $\vdash_{\mathbf{LC'}} \neg\neg p_i\rightarrow p_i$. Como $\ominus p_i =_{\text{def}} \neg\neg p_i\rightarrow p_i$, construimos uma dedução de $\ominus p_i$ para cada variável $p_i\in var(\alpha)$ e cada instância de $\ominus p_i$ que é usada como premissa de uma inferência em $\Sigma^{\mathbf{I}}$. Assim, cada dedução de $\ominus p_i$, para cada variável $p_i\in var(\alpha)$ e cada instância de $\ominus p_i$ que é usada como premissa de uma inferência, é uma dedução clássica e tem conclusão atômica. Aplicando a regra do corte às deduções $\vdash_{\mathbf{LC'}} \ominus p_1,\ldots, \vdash_{\mathbf{LC'}} \ominus p_n$ e $\ominus p_1,\ldots,\ominus p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha$ obtemos uma dedução clássica de α a partir de Γ na qual toda aplicação da regra $\perp_c$ tem conclusão atômica. Em consequência, se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha$, então existe uma dedução clássica em **LC'** de α a partir de Γ na qual a consequência de toda aplicação da regra $\perp_c$ é atômica. ■

4. Considerações Finais

Neste artigo usamos a ideia das **LFIs** de definir na linguagem conectivos que façam a tarefa de recuperar o raciocínio clássico no ambiente não-clássico. Em particular, definimos dois conectivos de determinação no ambiente da lógica intuicionista. Por meio dos teoremas DATs mostramos diferentes maneiras de recuperar as inferências da lógica clássica. Mostramos que é possível recuperar versões intuicionistas das inferências clássicas perdidas no ambiente intuicionista acrescentando, tanto premissas atômicas, quanto premissas complexas. Como resultado final, mostramos que, se assumimos o nosso teorema **DAT 21**, podemos demonstrar o **Teorema 4**, proposto por Prawitz. E, por outro lado, mostramos por que esse teorema de Prawitz não pode ser demonstrado na assinatura de **LC** e pode apenas ser demonstrado na assinatura reduzida **LC'**.

Referências bibliográficas

- BASTOS MASSI, C. D. *Provas de normalização para a Lógica Clássica.* (Tese). Campinas: IFCH-Universidade Estadual de Campinas, 1990.
- CORBALAN, M. I. *Conectivos de restauração local.* (Dissertação). Campinas: IFCH-Universidade Estadual de Campinas, 2012.
- GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische Schließen I. *Mathematische Zeitschrift.* 39:176-210, 1934. (Tradução em inglês em SZASBO, M. E. (editor). *The collected papers of Gerhard Gentzen.* Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1969.)
- MARCOS. J. Modality and Paraconsistency. Em BILKOVA, M. e L. BEHOUNEK. (editores). *The Logica Yearbook 2004. Proceedings of the XVIII International Symposium.* Hejnice: Institute of Philosophy of the Academy of Sciences of the Czech Republic. 213-222, 2005.
- PRAWITZ, D. *Natural Deduction. A Proof–Theoretical Study.* Stockholm: Almquist&Wiksell, 1965.