Combinação de Lógicas (Tutorial)

Primeira Mini-Escola de Lógica PUC–Rio, Setembro de 2005

Marcelo E. Coniglio

Departamento de Filosofia

e

Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE)

Universidade Estadual de Campinas

Campinas, SP, Brazil

coniglio@cle.unicamp.br

Resumo

O objetivo deste tutorial é introducir as noções básicas de composição e decomposição de lógicas, assim como analisar algumas técnicas introduzidas na literatura. Do ponto de vista da composição de lógicas, analisaremos a fibrilação (*fibring*, no original em inglês) de lógicas, tanto na perspectiva original de D. Gabbay quanto na perspectiva algébrica (categorial) de A. Sernadas e seus colaboradores. A forma oposta de combinar lógicas (isto é, a decomposição de uma lógica dada em lógicas mais simples), denominada *splitting logics*, será também analisada, através de diferentes métodos: Semântica de Traduções Possíveis e Fibrilação Básica de Matrizes. Finalmente, a questão de recuperar uma lógica a través da combinação de seus fragmentos será também abordada. Vários exemplos e aplicações serão discutidos.

Sumário

1 Introdução

O uso da lógica formal na representação do conhecimento propiciou, principalmente a partir do primeiro quarto do século XX, o desenvolvimento das lógicas chamadas "não-clássicas", cuja aparição já tinha sido largamente justificada na tentativa de se obter representações formais de raciocínios característicos da linguagem natural, como aqueles já expressos por Aristóteles na famosa questão do futuro contingente, e por diversas outras motivações filosóficas.

Uma análise dos trabalhos realizados na área da lógica aplicada revela que o uso de lógicas não-clássicas em teorias complexas impõe a necessidade de integrar diferentes módulos de inferência, cada um deles governado por uma certa lógica, em sistemas de inferência mais complexos. Isto acarreta a necessidade de se dispor de mecanismos que permitam combinar lógicas de diferente tipo. Evidentemente, a este tipo de necessidade pragmática devemos contrapor o interesse próprio que desperta a possibilidade de se obter lógicas de tipo híbrido, nas quais certos conectivos apresentam características de lógicas conhecidas de diferente tipo. Assim, a guisa de exemplo, podemos pensar numa lógica dotada de uma negação mais fraca — isto é, proveniente de uma lógica de tipo *paraconsistente* ou *intuicionista* — junto com uma implicação relevante — ou seja, satisfazendo as propriedades de uma lógica de tipo *relevante* — ou uma modalidade alética — isto é, uma modalidade governada pelos princípios das lógicas modais *aléticas*.

Deve ser observado que nos processos de integração ou combinação de lógicas acima mencionados, estamos sempre pensando na adjunção de lógicas "simples" para formar uma lógica mais complexa. Seguindo a terminologia introduzida no artigo [Carnielli e Coniglio, 1999], chamaremos a este processo de *composição* (*splicing*, no original em inglês) de lógicas. O processo de composição de lógicas é do tipo sintético, isto é: sintetizamos lógicas dadas para obter uma nova lógica a partir destas. Um exemplo típico de síntese de lógicas é a técnica de fibrilação (*fibring*, no original em inglês) introduzida na literatura pelo lógico Dov Gabbay em [Gabbay, 1996] (veja também [Gabbay, 1999]). Por outro lado, podemos pensar num processo analítico que permita decompor uma lógica dada em componentes mais simples. Este tipo de processo é chamado de *decomposição* (*splitting*, no original inglês) de lógicas em [Carnielli e Coniglio, 1999]. Esta perspectiva surge, principalmente, na tentativa de explicar uma determinada lógica em termos de lógicas mais simples (ou mais conhecidas), através de traduções entre a lógica objeto e as lógicas auxiliares, como no caso das chamadas *semânticas de traduções possíveis*, introduzidas por W. Carnielli em [Carnielli, 1990] e estudadas posteriormente em [Marcos, 1999] e [Carnielli, 2000].

De maneira resumida, podemos considerar então duas perspectivas complementares no processo de combinar sistemas lógicos:

(1) Composição de Lógicas (Splicing logics): Perspectiva *bottom–up* (sintética). Exemplo: Fibrilação de D. Gabbay

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{L} & \\
\mathcal{L}_1 \arrow[ur, "i_1"] & & \mathcal{L}_2 \arrow[ul, "i_2"']
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2$

Isto significa: $\mathcal{L}$ é sintetizada a partir de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$

(2) Decomposição de Lógicas (Splitting logics): Perspectiva *bottom–down* (analítica).
Exemplo: Semântica de Traduções Possíveis de W. Carnielli

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{L} \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\
\mathcal{L}_1 & \cdots & \mathcal{L}_n
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{L}_n$

Isto significa: $\mathcal{L}$ é analizada através de $\mathcal{L}_1$ e $\ldots$ e $\mathcal{L}_n$

É importante observar que não existe uma distinção fundamental entre decompor e compor de lógicas, da mesma forma em que não uma diferença fundamental entre decompor um número em fatores primos ou multiplicar números primos para compor um número. Porém, existe uma diferença de atitudes e de expectativas, que se reflete na distinção entre a informação com a que contamos e o resultado que esperamos obter.

Se, como propusemos anteriormente, representamos o resultado de um processo de combinar lógicas pela expressão $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2$, existem duas maneiras de interpretar esta equação:

- Se nosso ponto de partida são as lógicas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ (conhecidas), e se $\mathcal{L}$ é a nossa "incógnita", podemos dizer que estamos frente a um caso típico de composição das lógicas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ para se obter $\mathcal{L}$.

- Analogamente, se a lógica $\mathcal{L}$ é conhecida, estamos portanto frente a uma situação típica de decomposição de $\mathcal{L}$ em fatores $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, presumivelmente mais simples. Por sua vez, estes fatores podem ser lógicas novas (ou novos fragmentos de lógicas conhecidas), ou podem ser lógicas já conhecidas, em cujo caso encontramos uma nova relação entre $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. Observe que esta ultima situação pode ser vista indistintamente como composição e decomposição.

Os atuais desenvolvimentos e estudos na área da composição e decomposição de lógicas têm alguns predecesores na literatura: assim, alguns ingredientes das semânticas de traduções possíveis, ainda que numa forma incipiente, podem ser reconhecidos em algumas variantes da fibrilação de Gabbay. Mesmo que a formulação de Gabbay tenha sido posterior (1996), sua intuição coincidiu em forma independente com as de [Carnielli, 1990]. Ainda anteriormente, traços da lógica discussiva de S. Jaśkowski (cf. [Jaśkowski, 1949]) são reconhecíveis na idéia geral da *semântica de sociedades*, introduzidas no artigo [Carnielli e Lima-Marques, 1999] e posteriormente generalizadas no artigo [Fernández e Coniglio, 2003]). Por outro lado, a fibrilação básica de matrizes (cf. [Coniglio e Fernández, 2005]), por sua vez, é precedida tanto pela noção original de fibrilação de lógicas modais de Gabbay quanto pela definição de produto de matrizes lógicas introduzida por J. Łukasiewicz em [Łukasiewicz, 1953] para estudar as suas modalidades quatro-valoradas.

2 Noções preliminares

Uma questão fundamental e que, de certa maneira, deve ser prévia a qualquer análise sobre a possibilidade de combinar sistemas lógicos, consiste precisamente no problema de representar às lógicas envolvidas. A pergunta básica é a seguinte: a qual tipo de estrutura ou de noção estamos nos referindo quando falamos em "sistema lógico", ou "lógica"? Tratar-se-ia de um mecanismo de prova (tablô, dedução natural, sistema axiomático, etc.) ou de um método semântico (valorações, matrizes lógicas, semântica de Kripke etc.)? A resposta pode ser qualquer das anteriores, e a abundante literatura sobre lógica contemporânea apoia esta afirmação. Mas isto nos coloca frente a uma multiplicidade de conceitos que nos conduziria a uma ambigüidade de representações sem uma saída imediata. Contudo, os celebrados trabalhos de Alfred Tarski sobre o conceito de lógica *in abstrato* (cf. [Tarski, 1956]) nos apontam uma possível saída para este dilema: com efeito, o que há em comum em qualquer dos métodos que permitem realizar inferências num sistema lógico (independentemente dos atributos formais que possam ser requeridos no conceito de "sistema" aqui mencionado) é precisamente a existência de uma noção de *conseqüência lógica*.

No seu artigo *On Some Fundamental Concepts of Metamathematics* de 1930 (ver [Tarski, 1956]) A. Tarski apresenta um programa em que propõe um tratamento axiomático do conceito de conseqüência lógica, visando a sua utilização para caracterizar certas noções metamatemáticas. Na concepção de Tarski, as noções de sentença e de conseqüência lógica seriam conceitos metamatemáticos gerais, sendo tomados como primitivos.

Assumindo esta perspectiva tarskiana, uma lógica, digamos $\mathcal{L}$, é caracterizada apenas por uma relação de consequencia, denotada por $\vdash$, definida sobre o conjunto das sentenças ou fórmulas de $\mathcal{L}$. Assim, o fato de que uma fórmula φ pode ser deduzida na lógica $\mathcal{L}$ a partir do conjunto de premissas Γ é representado simplesmente pela expressão formal

$$\Gamma \vdash \varphi.$$

É importante observar que a expressão formal acima é uma *metapropriedade* da lógica $\mathcal{L}$, sendo portanto uma *afirmação* ou uma *proposição* acerca de uma derivação válida na lógica $\mathcal{L}$. Isto é, a expressão acima pode ser vista como um enunciado pertencente a uma *metalógica* ou lógica de um nível superior àquele da logica em questão, podendo portanto esta afirmação, pertencente à *metalinguagem* da lógica, ser *verdadeira* ou *falsa*. Esta observação é importante, como veremos na Seção 7. Chegamos assim à seguinte definição.

Definição 2.1 (Tarski) Seja X um conjunto não-vazio (cujos elementos são chamados de *fórmulas*). Um *operador de conseqüência* sobre X é uma função $\mathsf{C} : \wp(X) \to \wp(X)$ satisfazendo os seguintes postulados, para todo $A, B \subseteq X$:

(c1) $A \subseteq \mathsf{C}(A)$;
(c2) $A \subseteq B$ implica $\mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(B)$;
(c3) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \subseteq \mathsf{C}(A)$. ■

De aqui, é imediato que um operador de conseqüência C satisfaz

(c4) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) = \mathsf{C}(A)$;
(c5) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A) \cup \mathsf{C}(B)) = \mathsf{C}(\mathsf{C}(A) \cup B) = \mathsf{C}(A \cup \mathsf{C}(B)) = \mathsf{C}(A \cup B)$.

(Exercício: provar esta afirmação.)

Definição 2.2 Seja X um conjunto não-vazio de objetos chamados *fórmulas*. Uma *relação de conseqüência* sobre X é um conjunto $\vdash \subseteq \wp(X) \times X$ satisfazendo os seguintes postulados, para todo $A, B \subseteq X$ e para todo $x \in X$:

(r1) $x \in A$ implica $A \vdash x$;
(r2) $A \vdash x$ e $A \subseteq B$ implica $B \vdash x$;
(r3) $A \vdash x$ e $B \vdash A$ implica $B \vdash x$. ■

Na definição acima, $B \vdash A$ é uma abreviatura para "$B \vdash y$ para todo $y \in A$". Observe que, se $\vdash$ satisfaz (r1) e (r3) então satisfaz (r2). (Exercício: provar esta afirmação.)

Veremos a seguir que relações de conseqüência e operadores de conseqüência são duas faces da mesma moeda.

Definição 2.3
(1) Dada uma função $\mathsf{C} : \wp(X) \to \wp(X)$, definimos *a relação* $\vdash_{\mathsf{C}}$ *associada a* C como sendo a relação $\vdash_{\mathsf{C}} \subseteq \wp(X) \times X$ tal que, para todo $A \subseteq X$ e para todo $x \in X$,

$$A \vdash_{\mathsf{C}} x \ \text{ sse } \ x \in \mathsf{C}(A).$$

(2) Dada uma relação $\vdash \subseteq \wp(X) \times X$, definimos *a função* $\mathsf{C}_\vdash$ *associada a* $\vdash$ como sendo a função $\mathsf{C}_\vdash : \wp(X) \to \wp(X)$ tal que, para todo $A \subseteq X$,

$$\mathsf{C}_\vdash(A) = \{x \in X \ : \ A \vdash x\}.$$

■

Proposição 2.4
(i) Se C satisfaz (c1), (c2), (c3) então $\vdash_{\mathsf{C}}$ satisfaz (r1), (r2), (r3).
(ii) Se $\vdash$ satisfaz (r1), (r2), (r3) então $\mathsf{C}_\vdash$ satisfaz (c1), (c2), (c3).
(iii) $\mathsf{C}_{\vdash_{\mathsf{C}}} = \mathsf{C}$ e $\vdash_{\mathsf{C}_\vdash} = \vdash$.

Demonstração: Deixada como exercício para o leitor. ■

Vemos portanto que uma *lógica tarskiana* pode ser definida indistintamente como sendo um par $\langle X, \mathsf{C}\rangle$ tal que C é um operador de conseqüência sobre X, ou como um par $\langle X, \vdash\rangle$ tal que $\vdash$ é uma relação de conseqüência sobre X. Observe que o item (iii) da proposição anterior vale para qualquer função $\mathsf{C} : \wp(X) \to \wp(X)$ (não necessariamente um operador de conseqüência) e para qualquer relação $\vdash \subseteq \wp(X) \times X$ (não necessariamente uma relação de conseqüência).

Continuando com a idéia original de Tarski sobre lógicas abstratas, deve ser observado que as fórmulas de uma lógica 'concreta', assim como as sentenças das linguagens naturais, obedecem as leis de uma certa gramática, constituindo portanto uma linguagem formal. Neste tutorial apenas trataremos o caso das lógicas *proposicionais*, isto é, baseadas numa linguagem de tipo proposicional. Estas linguagens são definidas a partir de um conjunto de conectivos lógicos (tais como conjunção, disjunção etc.) a partir do qual são geradas as fórmulas, utilizando as variáveis proposicionais como 'atomos' (geradores). Dado que trataremos as lógicas e as linguagens de maneira geral (isto é, sem pensar apenas na lógica clássica ou intuicionista), e dado que poderia ser preciso trabalhar com lógicas não-clássicas com uma quantidade infinita de conectivos lógicos (principalmente pelo fato de permitir a combinação de uma quantidade possivelmente infinita de lógicas, obtendo como resultado uma lógica com possivelmente infinitos conectivos) definimos a seguinte noção geral de assinatura proposicional.

Definição 2.5 Uma *assinatura proposicional* é uma família $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cada C_n é um conjunto, sendo que $C_n \cap C_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Os elementos do conjunto C_n são chamados de *conectivos n-ários.* Em particular, os elementos de C_0 são chamados de *constantes.* O *domínio* de C é o conjunto

$$|C| = \bigcup\{C_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dadas duas assinaturas C^1 e C^2, dizemos que C^1 *esta contida em* C^2 (denotado por $C^1 \subseteq C^2$) se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $C^1_n \subseteq C^2_n$. ■

No processo de definição das fórmulas a partir de uma assinatura (assumindo fixado de antemão o conjunto de variáveis proposicionais) utilizaremos, por simplicidade de leitura, alguns símbolos auxiliares: parênteses '(' e ')' e vírgulas ','.

Definição 2.6 Seja $\mathcal{V} = \{p_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto fixo, cujos elementos são chamados de *variáveis proposicionais*. Seja $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma assinatura. A *linguagem gerada por* C é o conjunto $L(C)$ definido como sendo o menor dos conjuntos X que satisfazem as seguintes propriedades:

- $\mathcal{V} \subseteq X$;
- se $n \in \mathbb{N}$, $c \in C_n$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X$ então $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in X$ (em particular, $C_0 \subseteq X$). ■

Os elementos de $L(C)$ são chamados de *fórmulas* ou *sentenças* ou *proposições* sobre C.

Observação 2.7 Em termos de *álgebra universal* podemos dizer que $L(C)$ é a álgebra de tipo C livremente gerada por $\mathcal{V}$. Portanto, $L(C)$ tem a seguinte propriedade: se $f_0 : \mathcal{V} \to A$ é uma função, e A é uma álgebra de tipo C (isto é, A possui uma operação n-ária $c^A : A^n \to A$ associada a cada conectivo c de C_n) então existe uma única extensão $f : L(C) \to A$ de f_0 que é um homomorfismo de álgebras de tipo C, isto é: para cada $c \in C_n$ e cada $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(C)$, $f(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = c^A(f(\varphi_1), \ldots, f(\varphi_n))$. É por esta razão que, por exemplo, para definir uma valoração da lógica proposicional clássica, basta definir a valoração apenas no conjunto das variáveis proposicionais: os valores para as fórmulas complexas são obtidos de maneira unívoca aplicando as tabelas de verdade. (Exercício: explique o último argumento). ■

Exemplo 2.8 A assinatura C^0 consiste dos seguintes conectivos:

- $C^0_1 = \{\neg\}$ (*negação*);
- $C^0_2 = \{\vee\}$ (*disjunção*);
- $C^0_n = \emptyset$ se $n \neq 1$, $n \neq 2$.

Logo $|C^0| = \{\neg, \vee\}$ e $L(C^0)$ consiste no conjunto de fórmulas que utilizam apenas a disjunção e a negação. ■

Exemplo 2.9 A assinatura C^1 consiste dos seguintes conectivos:

- $C^1_1 = \{\neg\}$ (*negação*);
- $C^1_2 = \{\Rightarrow\}$ (*implicação*);
- $C^1_n = \emptyset$ se $n \neq 1$, $n \neq 2$.

Logo $|C^1| = \{\neg, \Rightarrow\}$ e $L(C^1)$ consiste no conjunto de fórmulas que utilizam apenas a implicação e a negação. ■

Exemplo 2.10 A assinatura C^2 consiste dos seguintes conectivos:

- $C^2_1 = \{\neg\}$ *(negação);*
- $C^2_2 = \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$ *(disjunção, conjunção e implicação);*
- $C^2_n = \emptyset$ *se* $n \neq 1$, $n \neq 2$.

Temos que $|C^2| = \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow\}$, e $L(C^2)$ é o conjunto de fórmulas construído a partir destes conectivos. ■

Uma *substituição* é um homomorfismo de álgebras $\sigma : L(C) \to L(C)$. Em virtude da Observação 2.7, é suficiente definir uma função $\sigma : \mathcal{V} \to L(C)$ para se obter uma substituição. A partir dos conceitos introduzidos, podemos definir agora a noção abstrata de sistema lógico no estilo tarskiano.

Definição 2.11 Uma *lógica proposicional* é um par $\mathcal{L} = \langle C, \vdash\rangle$ tal que C é uma assinatura proposicional e $\vdash$ é uma relação de conseqüência sobre $L(C)$ (ver Definição 2.2). $\mathcal{L}$ é dita *estrutural* se satisfaz, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$:

(r4) se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\varphi)$ para toda substituição σ.

$\mathcal{L}$ é dita *finitária* (ou *compacta*) se satisfaz, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$:

(r5) se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma_0 \vdash \varphi$ para algum $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito.

$\mathcal{L}$ é dita *padrão* se for estrutural e finitária. ■

Observação 2.12 É importante observar que podem existir assinaturas $C \neq C'$ tais que $L(C) = L(C')$. (Exercício: provar esta afirmação.) Portanto, uma lógica deve ser caracterizada como um par $\langle C, \vdash\rangle$ no lugar de um par $\langle L(C), \vdash\rangle$, por causa de propriedades tais como (r4). (Exercício: provar que se uma lógica é definida como um par $\langle L(C), \vdash\rangle$ então a propriedade (r4) poderia estar mal definida.) ■

Duas lógicas podem ser comparadas em termos de extensão da maneira seguinte:

Definição 2.13
(*i*) Seja $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$ uma lógica, e seja $C' \subseteq C$. O *C'–fragmento de $\mathcal{L}$* é a lógica $\mathcal{L}|_{C'} := \langle C', \vdash_{\mathcal{L}|_{C'}}\rangle$ em que $\vdash_{\mathcal{L}|_{C'}} = \vdash_{\mathcal{L}} \cap (\wp(L(C')) \times L(C'))$. Isto significa que, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C')$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}|_C} \varphi$ sse $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.
(*ii*) A lógica $\mathcal{L}' = \langle C', \vdash_{\mathcal{L}'}\rangle$ é uma *extensão forte* de $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$ se $C \subseteq C'$ e

$\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vdash_{\mathcal{L}'}$.
(iii) A lógica $\mathcal{L}' = \langle C', \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$ é uma *extensão fraca* de $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ se $C \subseteq C'$ e $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ implica que $\vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$, para todo $\varphi \in L(C)$.
(iv) A lógica $\mathcal{L}' = \langle C', \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$ é uma *extensão conservativa* de $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ se $C \subseteq C'$ e $\mathcal{L} = \mathcal{L}'|_C$.
(v) A lógica $\mathcal{L}' = \langle C', \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$ é uma *extensão conservativa fraca* de $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ se $C \subseteq C'$ e $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ sse $\vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$, para toda $\varphi \in L(C)$. ■

A partir das definições anteriores o seguinte resultado é imediato (Exercício).

Teorema 2.14
(i) Cada C–fragmento de qualquer lógica (estrutural, finitária, padrão) também é uma lógica (estrutural, finitária, padrão).
(ii) Toda lógica $\mathcal{L}$ é uma extensão conservativa de qualquer um dos seus C–fragmentos.

3 Semântica de Traduções Possíveis

Nesta seção o método conhecido como *semântica de traduções possíveis* (STP) para combinar lógicas será brevemente descrito.

O conceito de STP, introduzido em [Carnielli, 1990], esta baseado na idéia de definir uma relação de conseqüência a partir da combinação de outras relações de conseqüência, pressumivelmente mais simples, através de traduções entre as lógicas. Desta maneita, como mencionado na Seção 1, as STPs podem ser vistas em duas direções opostas: como um processo de decomposição de lógicas, e como um processo de composição de lógicas.

A idéia básica é a de considerar uma família de lógicas de maneira tal que uma relação de conseqüência para uma nova lógica pode ser definida através de traduções entre uma linguagem fixa e a coleção de lógicas dadas.

Precisamos previamente definir um conceito central na teoria de combinações de lógicas: o conceito de *tradução* (ou morfismo) entre lógicas.

Definição 3.1 Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C_i, \vdash_{\mathcal{L}_i} \rangle$ (para $i = 1, 2$) duas lógicas, e seja $f : L(C_1) \to L(C_2)$ uma função.
(a) f é dita uma *tradução* entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ se preserva deductibilidade, isto é, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C_1)$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ implica que $f(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_2} f(\varphi)$.
(b) f é dita uma *tradução conservativa* entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ se, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C_1)$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ sse $f(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_2} f(\varphi)$. ■

Definição 3.2 Seja $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ uma lógica, e seja $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ uma família de lógicas tal que $\mathcal{L}_i = \langle C_i, \vdash_{\mathcal{L}_i} \rangle$ para todo $i \in I$. Um *enquadramento de traduções possíveis para* $\mathcal{L}$ é um par $P = \langle \{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ tal que $f_i : L(C) \to L(C_i)$ é uma tradução entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_i$, para todo $i \in I$. Dizemos que $P = \langle \{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$

é uma *semântica de traduções possíveis para* $\mathcal{L}$ (ou, mais sucintamente, uma STP) se, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \text{ sse } f_i(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_i} f_i(\varphi) \text{ para todo } i \in I.$$

■

O caso em que I é finito, digamos que $I = \{i \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq i \leq n\}$, pode ser representado da maneira seguinte:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\ \mathcal{L}_1 & \cdots & \mathcal{L}_n \end{tikzcd}$$

Assim, testar se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ equivale a realizar n testes: $f_i(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_i} f_i(\varphi)$ para $1 \leq i \leq n$.

Como foi mencionado anteriormente, uma STP para uma lógica $\mathcal{L}$ pode ser visto como uma maneira de decompor a lógica $\mathcal{L}$ na família $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ de lógicas através das traduções $\{f_i\}_{i \in I}$.

A seguir analisaremos dois exemplos de aplicação de STPs.

Considere a assinatura C° tal que $C_1^\circ = \{\neg, \circ\}$; $C_2^\circ = \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$; e $C_n^\circ = \emptyset$ se $n \neq 1$, $n \neq 2$. Seja $For^\circ = L(C^\circ)$.

A lógica **mbC** é definida sobre For° através dos seguintes axiomas-esquema e regras de inferência:

Axiomas-esquema:

(Ax1) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

(Ax2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$

(Ax3) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

(Ax4) $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$

(Ax5) $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \beta$

(Ax6) $\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(Ax7) $\beta \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(Ax8) $(\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma))$

(Ax9) $\alpha \vee (\alpha \Rightarrow \beta)$

(Ax10) $\alpha \vee \neg\alpha$

(bc1) $\circ\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \beta))$

regra de inferência:

(MP) $\dfrac{\alpha,\ \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$

Note que os axiomas (Ax1)-(Ax11) mais (MP) constituem uma 'base subclassica' para **mbC** (no sentido de que este fragmento de **mbC** está contido na lógica proposicional clássica). O axioma (bc1) expressa que uma contradição *mais* o fato de que a fórmula contraditória é consistente (denotado por $\circ\alpha$) produz uma explossão. Este tipo de lógicas paraconsistentes (em que a explossão a partir de uma contradição deve ser apoiada na hipótese adicional de que a fórmula envolvida na contradição é consistente) são chamadas de *Lógicas da Inconsistência Formal* (ver [Carnielli e Marcos, 2002] e [Carnielli et al., 2005b]).

A lógica **mbC** é caracterizada semanticamente pela classe de todas as funções $v : For^{\circ} \to \mathbf{2}$ (em que $\mathbf{2} := \{0, 1\}$, com 1 como único valor designado) respeitando as seguintes cláusulas:

(v1) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$;
(v2) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$;
(v3) $v(\alpha \to \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$;
(v4) $v(\neg\alpha) = 0$ implica $v(\alpha) = 1$;
(v5) $v(\circ\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$.

(Veja [Carnielli et al., 2005b].) Tais funções (bivalorações) são chamadas de **mbC**-*valorações*. Porém, a utilização desta semântica nem sempre resulta fácil. Por outro lado, também em [Carnielli et al., 2005b] foi demonstrado que **mbC**, junto com várias outras lógicas da inconsistência formal, não podem ser caracterizadas por uma semântica de matrizes finitas. A análise deste tipo de lógicas evidencia a utilidade das STPs.

Considere agora as seguintes tabelas-verdade a três valores, em que T e t são os valores designados:

$\wedge$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	F	F	F

$\vee$	T	t	F
T	t	t	t
t	t	t	t
F	t	t	F

$\Rightarrow$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	t	t	t

	$\neg_1$	$\neg_2$	$\circ_1$	$\circ_2$
T	F	F	t	F
t	F	t	F	F
F	T	t	t	F

Esta coleção de tabelas-verdade constitue uma matriz, que chamaremos $\mathcal{M}_0$, e será utilizada como base para prover uma semântica de traduções possíveis para **mbC**. Seja $For^0_{\mathcal{M}}$ a álgebra de fórmulas gerada por $\mathcal{V}$ sobre a assinatura

$C^{\mathcal{M}_0}$ de $\mathcal{M}_0$, e considere o conjunto $\textsc{Tr}_0$ de todas as funções $* : For^\circ \to For^0_{\mathcal{M}}$ obedecendo as seguintes cláusulas:

$$\begin{array}{ll}
(tr0) & p^* = p, \text{ se } p \in \mathcal{V}; \\
(tr1) & (\alpha \# \beta)^* = (\alpha^* \# \beta^*), \text{ para todo } \# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}; \\
(tr2) & (\neg\alpha)^* \in \{\neg_1\alpha^*, \neg_2\alpha^*\}; \\
(tr3) & (\circ\alpha)^* \in \{\circ_1\alpha^*, \circ_2\alpha^*, \circ_1(\neg\alpha)^*\}.
\end{array}$$

Dizemos que o par $\mathrm{TP}_0 = \langle \mathcal{M}_0, \textsc{Tr}_0 \rangle$ é uma *estrutura semântica de traduções possíveis para* **mbC**. Se $\vDash^0_{\mathcal{M}}$ denota a relação de conseqüência em $\mathcal{M}_0$, a relação de conseqüência sobre For° associada, $\models_{\mathrm{TP}_0}$, é definida como segue:

$$\Gamma \models_{\mathrm{TP}_0} \varphi \text{ sse } \Gamma^* \vDash^0_{\mathcal{M}} \varphi^* \text{ para toda função } * \text{ em } \textsc{Tr}_0.$$

Teorema 3.3 [Correção] Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de fórmulas de **mbC**. Então $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \varphi$ implica $\Gamma \models_{\mathrm{TP}_0} \varphi$.

Demonstração: É suficiente provar que a coleção (finita) de todas as traduções possíveis de cada axioma produz tautologias nas matrizes de $\mathcal{M}_0$ e que todas as traduções possíveis da regra (MP) preservam validade. (Exercício.) ■

Corolário 3.4 Para cada função $*$ em $\textsc{Tr}_0$ seja $\mathcal{L}_* = \langle C^{\mathcal{M}_0}, \vDash^0_{\mathcal{M}} \rangle$. Então $\mathrm{TPS}_0 = \langle \{\mathcal{L}_*\}_{* \in \textsc{Tr}_0}, \textsc{Tr}_0 \rangle$ é um enquadramento de traduções possíveis para **mbC**. ■

Para provar completude, isto é, que TPS_0 é de fato uma semântica de traduções possíveis para **mbC**, a estratégia é provar que cada **mbC**-valoração v determina uma tradução $*$ e uma valoração w nas matrizes de $\mathcal{M}_0$ tal que, para toda fórmula φ de **mbC**,

$$w(\varphi^*) \in \{T, t\} \text{ sse } v(\alpha) = 1$$

e então utilizar a prova de completude de **mbC** para bivalorações.

O resultado seguinte foi obtido em [Marcos, 2005]:

Teorema 3.5 [Representabilidade] Dada uma **mbC**-valoração v existe uma tradução $*$ em $\textsc{Tr}_0$ e uma valoração w em $\mathcal{M}_0$ tal que, para toda fórmula φ em **mbC**:

$$w(\varphi^*) \in \{T, t\} \text{ sse } v(\varphi) = 1.$$

■

Teorema 3.6 [Completude] Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de fórmulas em **mbC**. Então $\Gamma \models_{\mathrm{TP}_0} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \varphi$.

Demonstração: Suponhamos que $\Gamma \models_{\mathrm{TP}_0} \varphi$, e seja v uma **mbC**-valoração tal que $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Pelo Teorema 3.5, existe uma tradução $*$ e uma valoração w em $\mathcal{M}_0$ tal que, para toda formula β em **mbC**, $w(\beta^*) \in \{T, t\}$ sse $v(\beta) = 1$. A partir daqui, $w(\Gamma^*) \subseteq \{T, t\}$ e então $w(\varphi^*) \in \{T, t\}$, porque $\Gamma \models_{\mathrm{TP}_0} \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$. Isto é: para toda **mbC**-valoração v, $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$ implica $v(\alpha) = 1$. Usando a completude de **mbC** com relação a **mbC**-valorações obtemos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \varphi$, como era desejado. ■

A partir deste resultado, podemos checar validade para inferências em **mbC** usando a SPT acima como mostraremos no seguinte exemplo.

Exemplo 3.7 [Carnielli et al., 2005b] Provaremos que $\circ\varphi \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg(\neg\varphi \wedge \varphi)$ usando semântica de traduções possíveis. Temos que, para cada tradução $*$ em $\mathrm{T}\textsc{r}_0$,

$$(\circ\varphi)^* \in \{\circ_1(\varphi^*), \circ_2(\varphi^*), \circ_1\neg_1(\varphi^*), \circ_1\neg_2(\varphi^*)\},$$

$$(\neg(\neg\varphi \wedge \varphi))^* \in \{\neg_i(\neg_j(\varphi^*) \wedge \varphi^*) \ : \ i, j \in \{1, 2\}\}.$$

Seja $*$ uma tradução em $\mathrm{T}\textsc{r}_0$, w uma valoração em $\mathcal{M}_0$, e $D = \{T, t\}$. Seja $x = w(\varphi^*)$, $y = w((\circ\varphi)^*)$ e $z = w((\neg(\neg\varphi \wedge \varphi))^*)$, e suponhamos que $y \in D$; isto elimina a tradução $(\circ\varphi)^* = \circ_2(\varphi^*)$ pois $\circ_2(x) \notin D$. Para provar que $z \in D$ devemos analisar os seguintes casos:

1. $(\circ\varphi)^* = \circ_1(\varphi^*)$. Então $\circ_1(x) \in D$, logo $x \in \{T, F\}$.
   (a) $x = T$. Então $\neg_j(x) = F$ $(j \in \{1, 2\})$, logo $\neg_i(\neg_j(x) \wedge x) \in D$ para $i, j \in \{1, 2\}$.
   (b) $x = F$. Então $(\neg_j(x) \wedge x) = F$ $(j \in \{1, 2\})$, logo $\neg_i(\neg_j(x) \wedge x) \in D$ para $i, j \in \{1, 2\}$.
2. $(\circ\varphi)^* = \circ_1\neg_1(\varphi^*)$. Então $(\neg\varphi)^* = \neg_1(\varphi^*)$ e $\circ_1\neg_1(x) \in D$, logo $\neg_1(x) \in \{T, F\}$ e $z = \neg_i(\neg_1(x) \wedge x)$.
   (a) $\neg_1(x) = T$. Então $x = F$ e a prova é como em (1b).
   (b) $\neg_1(x) = F$. Neste caso a prova é como em (1a).
3. $(\circ\varphi)^* = \circ_1\neg_2(\varphi^*)$. Então $(\neg\varphi)^* = \neg_2(\varphi^*)$ e $\circ_1\neg_2(x) \in D$, logo $\neg_2(x) \in \{T, F\}$ e $z = \neg_i(\neg_2(x) \wedge x)$. A partir da tabela-verdade para $\neg_2$ obtemos que $\neg_2(x) = F$, e a prova é como em (1a).

Isto prova o resultado desejado. Por outro lado, podemos provar que a recíproca $\neg(\neg\varphi \wedge \varphi) \vdash_{\mathbf{mbC}} \circ\varphi$ não é verdadeira em **mbC**. Para uma dada tradução $*$ em $\mathrm{T}\textsc{r}_0$ e uma valoração w em $\mathcal{M}_0$, definamos como antes $x = w(\varphi^*)$, $y = w((\circ\varphi)^*)$ e $z = w((\neg(\neg\varphi \wedge \varphi))^*)$. É suficiente considerar φ como sendo uma variável proposicional p, e escolher $*$ e w tais que $x = F$, e $(\circ\varphi)^* = \circ_2(\varphi^*)$. Então $z \in D$ e $y = F$. Para obter outro (contra)exemplo, tome $x = t$, $(\neg(\neg\varphi \wedge \varphi))^* = \neg_2(\neg_2(\varphi^*) \wedge \varphi^*)$ e $(\circ\varphi)^* \in \{\circ_1(\varphi)^*, \circ_1(\neg_2\varphi)^*\}$. ■

Este exemplo mostra que as semânticas de traduções possíveis oferecem um método de decisão imediato para qualquer lógica **L** que é correta e completa com relação a um enquadramento de traduções possíveis da forma $\mathrm{TP} = \langle \mathcal{M}, \mathrm{T{\scriptstyle R}} \rangle$, em que $\mathcal{M}$ é decidível (por exemplo, se $\mathcal{M}$ é uma lógica matricial finita) e $\mathrm{T{\scriptstyle R}}$ é recursivo. De fato, dada uma fórmula φ, para testar se φ é um teorema de **L** é suficiente considerar as (neste caso, finitas) traduções possíveis de φ, e checar cada fórmula traduzida nas correspondentes matrizes finitas. Questões sobre a complexidade de tais métodos de decisão poderiam ser respondidas se levando em conta a complexidade das traduções e das matrizes envolvidas. No exemplo anterior, é imediato observar que o método de decisão de **mbC** é NP-completo: de fato, existe uma tradução conservativa de **CPL** a **mbC** computável em tempo polinomial (ver [Carnielli et al., 2005b]).

Finalizamos esta seção com outro exemplo de STPs aplicado a lógicas da inconsistência formal. Seja **Ci** a lógica obtida de **mbC** acrescentado os axiomas-esquema seguintes:

(Ax11) $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$

(ci) $\neg{\circ}\alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)$

O axioma (Ax11) ainda é 'subclássico'. Por outro lado, o axioma (ci) expressa uma relação entre inconsistência (isto é, não-consistência) e contradicão. Nenhum destes axiomas vale em **mbC**. (Exercício: provar esta afirmação usando a STP acima). Seja $\mathcal{M}_1$ a coleção de tabelas-verdade obtida de $\mathcal{M}_0$ eliminando as tabelas de $\neg_2$, $\circ_1$ e $\circ_2$, colocando no seu lugar as tabelas-verdade abaixo.

	$\neg_3$	$\circ_3$
T	F	T
t	t	F
F	T	T

Os valores distinguidos são os mesmos que em $\mathcal{M}_0$. Considere o conjunto $\mathrm{T{\scriptstyle R}}_1$ de todas as funções $* : For^{\circ} \rightarrow For^1_{\mathcal{M}}$ obedecendo as cláusulas (tr0) e (tr1) acima, mais as seguintes:

$(tr2)'$ $\quad (\neg\alpha)^* \in \{\neg_1\alpha^*, \neg_3\alpha^*\}$;

$(tr3)'$ $\quad ({\circ}\alpha)^* \in \{\circ_3\alpha^*, \circ_3(\neg\alpha)^*\}$;

$(tr3)''$ $\quad$ se $(\neg\alpha)^* = \neg_1\alpha^*$ então $({\circ}\alpha)^* = \circ_3(\neg\alpha)^*$.

Pode então ser provado o seguinte resultado:

Teorema 3.8 Para cada função $*$ em $\mathrm{T{\scriptstyle R}}_1$ seja $\mathcal{L}_* = \langle C^{\mathcal{M}_1}, \models^1_{\mathcal{M}} \rangle$. Então $\mathrm{TPS}_1 = \langle \{\mathcal{L}_*\}_{* \in \mathrm{T{\scriptstyle R}}_1}, \mathrm{T{\scriptstyle R}}_1 \rangle$ é uma semântica de traduções possíveis para **mbC**. ■

4 Fibrilação de Gabbay de lógicas modais

Nesta seção analisaremos brevemente a semântica de fibrilação de lógicas modais, como foi originalmente apresentada no artigo [Gabbay, 1996] (veja também o livro [Gabbay, 1999]). Com a intenção de simplificar a apresentação, nos modelos de Kripke não consideraremos a menção do mundo atual, contrariamente ao que foi feito nos trabalhos de Gabbay acima mencionados.

A idéia básica de Gabbay é a seguinte: suponhamos que temos duas lógicas modais, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, cada uma com modalidades $\Box_1$, $\Diamond_1$ e $\Box_2$, $\Diamond_2$, respectivamente, que desejamos combinar para obter uma lógica $\mathcal{L}$ que contenha as duas. É possível que cada uma destas lógicas também tenha outros conectivos na sua assinatura (por exemplo $\neg$ e $\Rightarrow$), mas estes conectivos serão identificados no processo de combinação. Sejam Kr_1 e Kr_2 as classes de modelos de Kripke das lógicas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, respectivamente. Seja $\alpha = \Diamond_1\Box_2 p$ uma fórmula da linguagem (mista) de $\mathcal{L}$. Pelo fato de que α tem como conectivo externo a modalidade $\Diamond_1$ da lógica $\mathcal{L}_1$ então podemos começar a análise semântica de α com um modelo de Kripke $m_1 = \langle W_1, R_1, h_1\rangle$ de Kr_1. Dado que $\Box_2 p$ não é uma fórmula da linguagem de $\mathcal{L}_1$ (e portanto não pode ser reconhecida pelo modelo m_1) então α deve ser tratada, do ponto de vista de $\mathcal{L}_1$, como sendo uma fórmula da forma $\Diamond_1 q$ em que $q = \Box_2 p$ é uma fórmula atômica. Assim, se $w' \in W_1$ então $m_1 \Vdash_{w'} \alpha$ sse existe $w \in W_1$ tal que $w' R_1 w$ e $m_1 \Vdash_w \Box_2 p$. Neste ponto não sabemos como avaliar $\Box_2 p$, dado que $\Box_2$ não pertence à linguagem de $\mathcal{L}_1$. Porém, o único que precisamos é uma resposta 'sim' ou ´não'.

A fibrilação consiste então em associar, a cada $w \in W_1$, um mundo w'' de um modelo $m_2^w = \langle W_2^w, R_2^w, h_2^w\rangle$ de Kr_2, e definir o seguinte:

$$m_1 \Vdash_w \Box_2 p \ \text{ sse } \ m_2^w \Vdash_{w''} \Box_2 p.$$

A expressão do lado direito do 'sse' agora faz sentido, pois $\Box_2 p$ está escrita na linguagem correta. Evidentemente podemos trabalhar de maneira simétrica, associando a cada mundo w de cada modelo m_2 de Kr_2 um mundo w'' de um modelo m_1^w de Kr_1 que permita calcular o valor de verdade, no modelo m_2 de Kr_2, de uma fórmula cujo conectivo externo é uma modalidade de $\mathcal{L}_1$. Em termos formais, temos o seguinte (a seguir, trabalharemos apenas com operadores de necessidade; a adaptação para operadores de possibilidade é óbvia):

Definição 4.1 Uma *assinatura modal* é uma assinatura C tal que $C_1 = \{\neg, \Box\}$; $C_2 = \{\Rightarrow\}$; $C_n = \emptyset$, se $n \neq 1$, $n \neq 2$. Um *modelo de Kripke* é um triple $m = \langle W_m, R_m, h_m\rangle$ tal que:

- W_m é um conjunto não-vazio (dos "mundos possíveis de m");
- $R_m \subseteq W_m \times W_m$ (a "relação de accessibilidade de m");
- $h_m : \mathcal{V} \to \wp(W_m)$ é uma função (a "m-valoração").

Uma *semântica de Kripke* é uma classe Kr de modelos de Kripke. ■

Fixada uma assinatura modal C e uma semântica de Kripke Kr, podemos definir uma relação de conseqüência $\vdash_{Kr}$ em C de maneira usual, como veremos a seguir:

Definição 4.2 Seja C uma asinatura modal e seja Kr uma semântica de Kripke.
(i) Dado $m \in Kr$ e $w \in W_m$, dizemos que m *satisfaz a fórmula* φ *no mundo* w (simbolizado por $m \Vdash_w \varphi$) se as condições usuais valem. Em particular, se $\varphi \in \mathcal{V}$, $m \Vdash_w \varphi$ sse $w \in h_m(\varphi)$; e se $\varphi = \Box\psi$ então $m \Vdash_w \varphi$ sse, para todo $w' \in W_m$ tal que $wR_m w'$, vale que $m \Vdash_{w'} \psi$.
(ii) Dizemos que m *satisfaz* φ (denotado por $m \Vdash \varphi$) se $m \Vdash_w \varphi$ para todo mundo $w \in W_m$.
(ii) A relação de conseqüência $\vdash_{Kr} \ \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$ é definida como segue: dado $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$, dizemos que φ *é uma conseqüência de* Γ *com relação a* Kr (denotado por $\Gamma \vdash_{Kr} \varphi$) se, para todo modelo $m \in Kr$ tal que $m \Vdash \gamma$ (para todo $\gamma \in \Gamma$), então $m \Vdash \varphi$. ■

Uma *lógica modal* é uma lógica $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ tal que $C_{\mathcal{L}}$ é uma assinatura modal e $\vdash_{\mathcal{L}} = \vdash_{Kr}$ para alguma semântica de Kripke Kr. Toda lógica modal é uma lógica estrutural no sentido da Definição 2.11.

É importante observar que a relação de conseqüência de uma lógica modal pode ser obtida a partir de diferentes semânticas de Kripke: por exemplo, a lógica modal $\mathbf{S_5}$ pode ser obtida através de Kr_1 (a semântica de Kripke tal que cada relação R_m é uma relação de equivalência) ou através de Kr_2 (em que as relações R_m são arbitrárias). Esta observação é relevante, pois a fibrilação de lógicas modais (a ser definida a seguir) depende não apenas das relações de conseqüência das lógicas envolvidas, mas também das semânticas de Kripke dadas. Portanto, a partir de agora uma lógica modal será representada por um par $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, Kr \rangle$ no lugar de um par $\langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{Kr} \rangle$.

Definição 4.3 (Gabbay) Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C_i, Kr_i \rangle$ $(i = 1, 2)$ duas lógicas modais.
(i) A *assinatura fibrilada* $C^{\circledast}$ de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ é definida por: $C_1^{\circledast} = \{\neg, \Box_1, \Box_2\}$; $C_1^{\circledast} = \{\Rightarrow\}$; $C_n^{\circledast} = \emptyset$ para $n \neq 1$, $n \neq 2$.
(ii) Um *modelo fibrilado* de Kr_1 e Kr_2 é um triple (f, g, h) tal que

- $f : (\biguplus_{m \in Kr_1} W_m) \to (\biguplus_{m \in Kr_2} W_m)$ é uma função;
- $g : (\biguplus_{m \in Kr_2} W_m) \to (\biguplus_{m \in Kr_1} W_m)$ é uma função;
- $h : \mathcal{V} \to \wp(W)$ é uma função.

Aqui, $W := (\biguplus_{m \in Kr_1} W_m) \uplus (\biguplus_{m \in Kr_2} W_m)$, e $\biguplus$ denota a união disjunta de conjuntos.
(iii) A *estrutura fibrilada* de Kr_1 e Kr_2 (simbolizada por $Kr_1 \circledast Kr_2$) é o conjunto de todos os modelos fibrilados de Kr_1 e Kr_2.
(iv) A relação de conseqüência $\vdash_{Kr_1 \circledast Kr_2} \ \subseteq \wp(L(C_{\circledast})) \times L(C_{\circledast})$ é definida a partir da noção de satisfação $(f, g, h) \Vdash_w \varphi$ (para $(f, g, h) \in Kr_1 \circledast Kr_2$, $w \in W$ e $\varphi \in L(C_{\circledast})$) da maneira esperada. Os únicos casos relevantes são os seguintes:

- Se $w \in W_m$ e $m \in Kr_2$ então $(f, g, h) \Vdash_w \Box_1\psi$ sse $(f, g, h) \Vdash_{w'} \psi$ para todo $w' \in W_{m'}$ tal que $g(w)R_{m'}w'$;
- Se $w \in W_m$ e $m \in Kr_1$ então $(f, g, h) \Vdash_w \Box_2\psi$ sse $(f, g, h) \Vdash_{w'} \psi$ para todo $w' \in W_{m'}$ tal que $f(w)R_{m'}w'$.

(v) A lógica $\mathcal{L}_\circledast = \langle C_\circledast, \vdash_{Kr_1 \circledast Kr_2}\rangle$ é chamada de *fibrilação de* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$. ■

Note que $\mathcal{L}_\circledast$ é uma lógica no sentido da Definição 2.11.

Observação 4.4 Dado que na definição de fibrilação consideramos uniões disjuntas de conjuntos de mundos, então $g(w)$ identifica um único modelo $m' = \langle W_{m'}, R_{m'}, h_{m'}\rangle$ de Kr_1 tal que $g(w) \in W_{m'}$, para todo $w \in W_m$ e $m \in Kr_2$. Da mesma maneira, se $w \in W_m$ e $m \in Kr_1$ então $f(w)$ identifica um único modelo $m' = \langle W_{m'}, R_{m'}, h_{m'}\rangle$ de Kr_2 tal que $f(w) \in W_{m'}$. Isto justifica a Definição 4.3. ■

Exemplo 4.5 Seja $\mathcal{L}_1$ a lógica modal **T**. Então, Kr_1 pode ser tomado como a classe de todos os modelos m tais que R_m é reflexiva. Seja $\mathcal{L}_2$ a lógica temporal **VW** de von Wright (em que $\Box_{\mathbf{VW}}$ significa "em todo instante futuro"). Neste caso Kr_2 pode ser tomado como a classe de todos os modelos m tais que $W_m = \mathbb{N}$ e R_m é uma ordem total. A assinatura fibrilada é portanto $C^\circledast$ tal que $|C^\circledast| = \{\neg, \Box_{\mathbf{T}}, \Box_{\mathbf{VW}}, \Rightarrow\}$. Sejam (f, g, h) um modelo fibrilado, $m \in Kr_1$, $w \in W_m$ e φ a fórmula $\Box_{\mathbf{VW}}(\Box_{\mathbf{T}}q \Rightarrow p)$, em que p e q são variáveis proposicionais. Então:

$$(f, g, h) \Vdash_w \Box_{\mathbf{VW}}(\Box_{\mathbf{T}}q \Rightarrow p) \;\text{ sse }\; (f, g, h) \Vdash_{w'} \Box_{\mathbf{T}}q \Rightarrow p$$

para todo $w' \in W_{m'}$ tal que $f(w)R_{m'}w'$. Por outro lado, se $w' \in W_{m'}$ e $m' \in Kr_2$ então $(f, g, h) \Vdash_{w'} \Box_{\mathbf{T}}q \Rightarrow p$ sse $w' \in h(p)$ ou $w'' \notin h(q)$ para algum $w'' \in W_{m''}$ tal que $g(w')R_{m''}w''$. ■

A lógica $\mathcal{L}_\circledast$ é uma extensão fraca de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ (isto é, preserva somente as tautologias, veja a Definição 2.13). Em geral a fibrilação não é uma extensão conservativa de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. Na Seção 6 veremos um método para combinar lógicas com semântica de matrizes inspirado na metodologia de Gabbay, denominado *fibrilação básica de matrizes*. Neste método, as lógicas obtidas são sempre uma extensão conservativa das lógicas dadas (desde que estas sejam não-triviais).

5 Fibrilação categorial

Os artigos originais de Gabbay não apresentavam uma metodologia geral para combinar lógicas (embora ele afirmasse o contrário). A relação entre as lógicas dadas e a lógica obtida por fibrilação também não ficava clara na leitura destes textos (é $\mathcal{L}$ uma extensão conservativa de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$? é $\mathcal{L}$ uma extensão conservativa fraca de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$?).

A partir dos trabalhos seminais do Grupo de Lógica do IST de Lisboa, liderado por Amílcar Sernadas, for introduzida uma definição geral de fibrilação, utilizando a poderosa linguagem da Teoria de Categorias, de maneira tal que a relação entre a lógica obtida pelo processo de fibrilação e as lógicas dadas ficou muito mais clara. De fato, a lógica fibrilada categorialmente satisfaz uma certa propriedade universal, por se tratar de uma construção categorial numa categoria específica (a categoria na qual as lógicas estão sendo representadas).

Esta metodologia trouxe também a seguinte vantagem: pelo fato de definir a fibrilação como uma construção categorial, esta construção pode ser realizada em diferentes categorias de sistemas lógicos, de maneira que a característica de universalidade da construção é mantida. Este tipo de vantagens justifica a utilização da linguagem da Teoria de Categorias no desenvolvimento da lógica atual (embora a importância de aplicar esta linguagem para o estudo da lógica ainda não conte com o reconhecimento e a aprovação de muitos especialistas, que olham com receio e desgosto para esta terminologia). Para o leitor interessado em aprender os conceitos básicos de Teoria de Categorias recomendamos o excelente texto introdutório [Goldblatt, 1984].

Dado que estas notas representam o conteúdo de um breve tutorial, e assumindo que vários dos leitores não conhecem ainda as definições básicas de Teoria de Categorias, descreveremos as técnicas de fibrilação categorial através de exemplos, sem entrar nos detalhes técnicos. Apenas mencionaremos, para quem conhece a terminologia, as operações e os conceitos categoriais que estão sendo utilizados. O leitor interessado em estudar em detalhe as definições de fibrilação categorial é convidado a ler o artigo seminal [Sernadas et al., 1999] (ver também [Zanardo et al., 2001], [Caleiro et al., 2003], [Coniglio et al., 2003] e [Caleiro et al., 2005]).

O primeiro passo na construção da fibrilação categorial é definir formalmente o conceito de *morfismo* (ou aplicação) entre assinaturas: existem várias possibilidades, a mais simples (e bem comportada, desde o ponto de vista das propriedades que satisfaz) é a seguinte:

Definição 5.1 Sejam C^1 e C^2 duas assinaturas. Um *morfismo de assinaturas* h de C^1 em C^2, denotado por $C^1 \xrightarrow{h} C^2$, é uma família de funções $h_n : C^1_n \to C^2_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Dados $C^1 \xrightarrow{h} C^2$ e $C^2 \xrightarrow{h'} C^3$, a *composição* $C^1 \xrightarrow{h' \circ h} C^3$ de h e h' é o morfismo dado pelas funções $(h' \circ h)_n = h'_n \circ h_n$.

A idéia de morfismo de assinaturas é a de associar, a cada conectivo n-ário da primeira assinatura, um conectivo n-ário da segunda assinatura. Um morfismo $C^1 \xrightarrow{h} C^2$ induz uma única função $\widehat{h} : L(C_1) \to L(C_2)$ tal que $\widehat{h}(p) = p$ (se $p \in \mathcal{V}$) e tal que $\widehat{h}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = h_n(c)(\widehat{h}(\varphi_1), \ldots, \widehat{h}(\varphi_n))$, se $c \in C^1_n$. Observando que a família id_C formada pelas funções identidade $(id_C)_n = id_{C_n}$ é um morfismo $C \xrightarrow{id_C} C$ para toda C, obtemos uma *categoria* denominada **Sig** (consultar a definição de categoria em [Goldblatt, 1984]).

As lógicas estudadas pelo grupo de Lisboa foram principalmente sistemas lógicos apresentados através de axiomas e regras de inferência, isto é, sistemas de tipo Hilbert.

Definição 5.2 Um *sistema de Hilbert* é um par $\mathcal{H} = \langle C, R\rangle$ tal que C é uma assinatura e R é um conjunto de pares da forma $\langle \Gamma, \varphi\rangle$ tal que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é um conjunto de fórmulas de $L(C)$. Os elementos $\langle \Gamma, \varphi\rangle$ de R são chamados de *regras*; se $\Gamma = \emptyset$ então a regra é chamada de *axioma*.

O conceito de *derivação* num sistema de Hilbert $\mathcal{H}$ é o usual, observando que permitimos utilizar substituições aplicadas nas regras. Assim, de um axioma $\langle \emptyset, (p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_1))\rangle$ podemos inferir $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi))$ para todas as fórmulas $\varphi, \psi \in L(C)$. Por outro lado, de φ e $(\varphi \Rightarrow \psi)$ obtemos ψ aplicando a regra $\langle \{p_1, (p_1 \Rightarrow p_2)\}, p_2\rangle$ de *Modus Ponens*, para todas as fórmulas $\varphi, \psi \in L(C)$. Se $\vdash_{\mathcal{H}}$ denota a relação de conseqüência sobre C obtida de $\mathcal{H}$ (em que $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \varphi$ sse existe uma derivação de φ a partir de Γ utilizando as regras de $\mathcal{H}$) então $\mathcal{L}_{\mathcal{H}} = \langle C, \vdash_{\mathcal{H}}\rangle$ é uma lógica padrão (veja a Definição 2.11). (Exercício: provar que $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ satisfaz as propriedades (r1)-(r3) da Definição 2.2, e (r5) da Definição 2.11; se for corajoso, tente provar que também satisfaz a propriedade (r4) da Definição 2.11.)

Um *morfismo* $\mathcal{H}_1 \xrightarrow{h} \mathcal{H}_2$ entre dois sistemas de Hilbert é definido como sendo um morfismo $C^1 \xrightarrow{h} C^2$ entre as assinaturas subjacentes tal que a função associada $\widehat{h} : L(C_1) \to L(C_2)$ é uma tradução entre as lógicas $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_2}$ (veja a Definição 3.1). (Exercício: provar que h é um morfismo entre $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ sse, para cada regra $\langle \Gamma, \varphi\rangle$ de $\mathcal{H}_1$, temos que $\widehat{h}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{H}_2} \widehat{h}(\varphi)$.)

Dado que o morfismos identidade id_C de **Sig** são morfismos de lógicas (Exercício), obtemos uma categoria de sistemas de Hilbert, denominada **Hil**.

O primeiro passo para definir a fibrilação em **Hil** é a seguinte: dados sistemas de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, geramos a *assinatura fibrilada*: esta assinatura consiste na união disjunta dos conectivos das assinaturas C^1 e C^2 de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$. Esta assinatura nada mais é do que a assinatura $C^1 \bigoplus C^2$ (a união disjunta de C^1 e C^2), definida como segue: $(C^1 \bigoplus C^2)_n = C^1_n \uplus C^2_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em que $A \uplus B$ denota a união disjunta dos conjuntos A e B. Tecnicamente, $C^1 \bigoplus C^2$ é o *coproduto* de C^1 e C^2 na categoria **Sig**. Sejam $C_1 \xrightarrow{i_1} C^1 \bigoplus C^2$ e $C_2 \xrightarrow{i_2} C^1 \bigoplus C^2$ os *morfismos canônicos* (ou imersões). Via estes morfismos podemos considerar que $C^i \subseteq C^1 \bigoplus C^2$, para $i = 1, 2$ (veja a Definição 2.5).

Uma vez que definimos $C^1 \bigoplus C^2$, consideramos as regras de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, mas agora "traduzidas" via as imersões canônicas: fazemos isto para re-escrever as regras na assinatura $C^1 \bigoplus C^2$. Desta maneira, uma regra $r = \langle \Gamma, \varphi\rangle$ de $\mathcal{H}_1$ (escrita, portanto, na assinatura C^1) é traduzida na regra $\widehat{i_1}(r) = \langle \widehat{i_1}(\Gamma), \widehat{i_1}(\varphi)\rangle$ (escrita na assinatura $C^1 \bigoplus C^2$). Analogamente, obtemos uma tradução $\widehat{i_2}(r)$ de cada regra r de $\mathcal{H}_2$ para a assinatura $C^1 \bigoplus C^2$.

Definição 5.3 (Sernadas et. al) Sejam $\mathcal{H}_1 = \langle C^1, R_1\rangle$ e $\mathcal{H}_2 = \langle C^2, R_2\rangle$ dois sistemas de Hilbert. A *fibrilação categorial* (irrestrita) de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, denotada

$\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2$, é definida por

$$\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 = \langle C^1 \bigoplus C^2, \{\widehat{i_1}(r) \ : \ r \in R_1\} \cup \{\widehat{i_2}(r) \ : \ r \in R_2\}\rangle.$$

Tecnicamente, pode ser provado que $\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2$ é o coproduto de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ na categoria **Hil**. Isto significa o seguinte:

- $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2}$ estende as lógicas $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_2}$ (através das imersões), isto é: Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}_1} \varphi$ então $\widehat{i_1}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2} \widehat{i_1}(\varphi)$, e analogamente para $\mathcal{H}_2$; logo, $\mathcal{H}_1 \xrightarrow{i_1} \mathcal{H}^1 \bigoplus \mathcal{H}^2$ e $\mathcal{H}_2 \xrightarrow{i_2} \mathcal{H}^1 \bigoplus \mathcal{H}^2$ são morfismos em **Hil** (Exercício: provar estas afirmações);

- Se $\mathcal{H}$ é um sistema de Hilbert, e $\mathcal{H}_1 \xrightarrow{j_1} \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_2 \xrightarrow{j_2} \mathcal{H}$ são morfismos em **Hil**, então existe um único morfismo $\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{H}$ em **Hil** tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[ddr, "j_1"'] & & \mathcal{H}_2 \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[ddl, "j_2"] \\
& \mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 \arrow[d, "h"] & \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

A propriedade universal satisfeita por $\mathcal{H}^1 \bigoplus \mathcal{H}^2$ mostra que a fibrilação é a menor das extensões de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ na assinatura $C^1 \bigoplus C^2$. Com efeito, se $\mathcal{H}$ é definido sobre $C^1 \bigoplus C^2$ tal que $\mathcal{H}_1 \xrightarrow{i_1} \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_2 \xrightarrow{i_2} \mathcal{H}$ são morfismos em **Hil**, então a identidade $id_{C^1 \bigoplus C^2}$ induz um morfismo $\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 \xrightarrow{id_{C^1 \bigoplus C^2}} \mathcal{H}$ em **Hil**. Ou seja, $\mathcal{L}_\mathcal{H}$ é uma extensão forte de $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2}$ (ver Definição 2.13).

Exemplo 5.4 Consideremos novamente a lógica da inconsistência formal **Ci**, definida sobre a assinatura C° tal que $|C^\circ| = \{\neg, \circ, \vee, \wedge, \Rightarrow\}$ e $For^\circ = L(C^\circ)$ (veja a Seção 3). Seja $\mathcal{H}_{\mathbf{Ci}}$ o sistema de Hilbert representando **Ci**. (Exercício: escrever detalhadamente $\mathcal{H}_{\mathbf{Ci}}$.)

Considere a lógica modal **T**. Isto significa que **T** é definida na assinatura $C^\Box$ tal que $C^\Box_1 = \{\Box, \neg\}$; $C^\Box_2 = \{\Rightarrow\}$; e $C^\Box_n = \emptyset$ se $n \neq 1$, $n \neq 2$. Seja $For^\Box = L(C^\Box)$. Os axiomas e regras do sistema de Hilbert $\mathcal{H}_\mathbf{T}$ são os axiomas (Ax1)-(Ax2) da lógica **Ci**, a regra (MP) mais os seguintes:

(Ax12) $(\neg p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow ((\neg p_1 \Rightarrow \neg p_2) \Rightarrow p_1)$

(Ax13) $\Box(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (\Box p_1 \Rightarrow \Box p_2)$

(Ax14) $\Box p_1 \Rightarrow p_1$

(Nec) $\dfrac{p_1}{\Box p_1}$

Evidentemente, dado que a regra de necessitação (Nec) é *global* (isto é, somente se aplica de maneira logicamente correta a teoremas), então o conceito de derivação na lógica associada $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_{\mathbf{T}}}$ só faz sentido para teoremas (como, aliás, acontece em quase toda lógica modal): só interessam as derivações da forma $\vdash_{\mathcal{H}_{\mathbf{T}}} \varphi$, isto é, com conjunto vazio de premissas.

Calcularemos agora a fibrilação $\mathcal{H}_{\mathbf{Ci}} \bigoplus \mathcal{H}_{\mathbf{T}}$. A assinatura fibrilada $C^{\circ} \bigoplus C^{\Box}$ é visualizada através do seguinte diagrama (para simplificar, escreveremos os domínios das assinaturas no lugar das próprias assinaturas):

$$\begin{tikzcd}
 & \{\wedge_1, \vee_1, \Rightarrow_1, \neg_1, \circ_1, \neg_2, \Rightarrow_2, \Box_2\} & \\
\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \circ\} \arrow[ur, hook, "i_1"] & & \{\neg, \Rightarrow, \Box\} \arrow[ul, hook', "i_2"']
\end{tikzcd}$$

O sistema de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbf{Ci}} \bigoplus \mathcal{H}_{\mathbf{T}}$, definido sobre a assinatura $C^{\circ} \bigoplus C^{\Box}$, consiste na coleção formada pela tradução das regras e axiomas de cada sistema para a nova assinatura. Assim, por exemplo, $\mathcal{H}_{\mathbf{Ci}} \bigoplus \mathcal{H}_{\mathbf{T}}$ contêm como regras duas versões de (MP) e a seguinte regra de necessitação:

(MP)$_1$ $\dfrac{p_1,\ p_1 \Rightarrow_1 p_2}{p_2}$

(MP)$_2$ $\dfrac{p_1,\ p_1 \Rightarrow_2 p_2}{p_2}$

(Nec)$_2$ $\dfrac{p_1}{\Box_2 p_1}$

Estas regras são aplicadas através de substituições na linguagem nova. Assim, do teorema de **Ci** (traduzido) $(\circ_1 p_1 \wedge_1 p_2) \Rightarrow_1 \circ_1 p_1$ obtem-se o teorema (na linguagem mista) $\Box_2((\circ_1 p_1 \wedge_1 p_2) \Rightarrow_1 \circ_1 p_1)$, aplicando (Nec)$_2$. E na lógica fibrilada são obtidas também instâncias novas (mistas) dos axiomas de cada lógica, por exemplo $\Box_2 p_1 \Rightarrow_1 (\Box_2 p_1 \vee_1 p_2)$ e $\Box_2(\neg_2 p_1 \wedge_1 \circ_1 p_2) \Rightarrow (\neg_2 p_1 \wedge_1 \circ_1 p_2)$. Isto mostra as interações que surgem entre as regras das lógicas dadas na nova lógica obtida por fibrilação. Deve ser observado que, em $\mathcal{H}_{\mathbf{Ci}} \bigoplus \mathcal{H}_{\mathbf{T}}$, as negações $\neg_1$ e $\neg_2$ não são equivalentes: a primeira é paraconsistente, enquanto que a segunda é clássica. Por outro lado, as implicações $\Rightarrow_1$ e $\Rightarrow_2$ são equivalentes em $\mathcal{H}_{\mathbf{Ci}} \bigoplus \mathcal{H}_{\mathbf{T}}$. Assim, esta lógica, que chamaremos de $\mathbf{Ci}^T$, consiste básicamente na lógica **T** junto com uma negação paraconsistente e um operador de consistência (no sentido da lógica **Ci**). É possível definir uma semântica de tipo Kripke adequada para esta lógica, com as técnicas introduzidas em [Carnielli et al., 2005a]. ■

O exemplo anterior sugere que às vezes, ao combinar duas lógicas, gostariamos de identificar alguns conectivos, dado que sabemos que eles tem o mesmo comportamento (no caso anterior, poderiamos compartilhar no processo de fibrilação a implicação $\Rightarrow$). Isto dá origem à técnica conhecida como *fibrilação restrita pelo compartilhamento de conectivos* (cf. [Sernadas et al., 1999]).

Para entender esta técnica, devemos primeiro generalizar o conceito de assinatura contida em outra, $C^1 \subseteq C^2$ (ver Definição 2.5). Assim, dadas duas assinaturas C^1 e C^2, dizemos que C^1 é uma *subassinatura* de C^2 se existir um morfismo $C^1 \xrightarrow{h} C^2$ tal que h_n é uma função injetora, para todo $n \in \mathbb{N}$ (tecnicamente, exigimos que h seja um monomorfismo na categoria **Sig**). Assim, C^1 é uma subassinatura de C^2 sse existe uma 'copia' de C^1 dentro de C^2. Por exemplo, C^1 e C^2 são subassinaturas de $C^1 \bigoplus C^2$ via os morfismos canônicos i_1 e i_2. Se C^1 é uma subassinatura de C^2 via h escreveremos alternativamente $C^1 \overset{h}{\hookrightarrow} C^2$ no lugar de $C^1 \xrightarrow{h} C^2$ (esta notação já foi utilizada no Exemplo 5.4).

A fibrilação restrita parte da seguinte informação:

1. Dois sistemas de Hilbert $\mathcal{H}_1 = \langle C^1, R_1 \rangle$ e $\mathcal{H}_2 = \langle C^2, R_2 \rangle$;

2. Uma assinatura $\bar{C}$ que é subassinatura de C^1 e C^2 via dois (mono)morfismos $\bar{C} \overset{k_1}{\hookrightarrow} C^1$ e $\bar{C} \overset{k_2}{\hookrightarrow} C^2$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \bar{C} \arrow[dl, hook', "k_1"'] \arrow[dr, hook, "k_2"] & \\
C^1 & & C^2
\end{tikzcd}
$$

Uma configuração (diagrama) como no item (2) é chamada de *restrição* ou *compartilhamento de conectivos*, e é representada por $\mathcal{D}$. Com esta informação dada, calculamos a fibrilação $\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 = \langle C^1 \bigoplus C^2, R \rangle$ de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ (veja a Definição 5.3). Consideramos a seguir a assinatura C obtida de $\mathcal{D}$ identificando em $(C^1 \bigoplus C^2)_n$ os conectivos $(i_1 \circ k_1)_n(c)$ e $(i_2 \circ k_2)_n(c)$, para cada $c \in \bar{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$ (lembrando que i_1 e i_2 são as imersões canônicas). Assim, cada conjunto C_n é o quociente do conjunto $(C^1 \bigoplus C^2)_n$ com relação à menor relação de equivalencia definida em $(C^1 \bigoplus C^2)_n$ que identifica todos os conectivos da forma $(i_1 \circ k_1)_n(c)$ e $(i_2 \circ k_2)_n(c)$, com $c \in \bar{C}_n$. Seja $C^1 \bigoplus C^2 \xrightarrow{q} C$ o morfismo de assinaturas tal que cada q_n é a projeção canônica de $(C^1 \bigoplus C^2)_n$ no conjunto quociente C_n. Temos portanto um diagrama em **Sig** da seguinte forma:

$$
\begin{tikzcd}
& \bar{C} \arrow[dl, hook', "k_1"'] \arrow[dr, hook, "k_2"] & \\
C^1 \arrow[dr, hook, "i_1"'] & & C^2 \arrow[dl, hook', "i_2"] \\
& C^1 \bigoplus C^2 \arrow[d, "q"'] & \\
& C &
\end{tikzcd}
$$

Tecnicamente, C (junto com o morfismo q) formam o *coequalizador* (em **Sig**) do diagrama $\bar{C} \underset{i_2 \circ k_2}{\overset{i_1 \circ k_1}{\rightrightarrows}} C^1 \bigoplus C^2$.

Finalmente, a fibrilação de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ restrita ao compartilhamento de conectivos $\mathcal{D}$, denotada por $\mathcal{H}_1 \overset{\mathcal{D}}{\bigoplus} \mathcal{H}_2$, é o sistema de Hilbert

$$
\mathcal{H}_1 \overset{\mathcal{D}}{\bigoplus} \mathcal{H}_2 = \langle C, \{\widehat{q}(r) \ : \ r \in R\} \rangle,
$$

lembrando que R é o conjunto de regras do sistema $\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2$. Pode ser provado (ver [Sernadas et al., 1999]) que q é, de fato, um morfismo $\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 \xrightarrow{q} \mathcal{H}_1 \overset{\mathcal{D}}{\bigoplus} \mathcal{H}_2$ em **Hil** tal que $\mathcal{H}_1 \overset{\mathcal{D}}{\bigoplus} \mathcal{H}_2$ é o "mínimo" sistema de Hilbert definido pela assinatura C e o morfismo q, no sentido seguinte: dados $\mathcal{H}' = \langle C', R' \rangle$, um morfismo $\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 \xrightarrow{q'} \mathcal{H}'$ em **Hil** e um morfismo $C \xrightarrow{h} C'$ em **Sig** tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
C^1 \bigoplus C^2 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & C \arrow[d, "h"] \\
& C'
\end{tikzcd}
$$

comuta em **Sig** (isto é, tal que $q' = h \circ q$), então h resulta ser, de fato, um morfismo em **Hil** comutando em **Hil** o diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & \mathcal{H}_1 \overset{\mathcal{D}}{\bigoplus} \mathcal{H}_2 \arrow[d, "h"] \\
& \mathcal{H}'
\end{tikzcd}
$$

Em particular, se $\mathcal{H}' = \langle C, R' \rangle$ é um sistema de Hilbert tal que q induz um morfismo $\mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 \xrightarrow{q} \mathcal{H}'$ em **Hil**, então a identidade $C \xrightarrow{id_C} C$ induz um morfismo $\mathcal{H}_1 \overset{\mathcal{D}}{\bigoplus} \mathcal{H}_2 \xrightarrow{id_C} \mathcal{H}'$ em **Hil**.

Tecnicamente, a fibrilação restrita consiste do seguinte: consideramos em primeiro lugar o *funtor esquecimento*[1] N : **Hil** $\to$ **Sig**, que associa a cada sistema de Hilbert a sua assinatura e associa a cada morfismo de sistemas de Hilbert o morfismo de assinaturas subjacente. Assim, $\mathcal{H}_1 \overset{\mathcal{D}}{\bigoplus} \mathcal{H}_2$ é o codomínio da *elevação cocartesiana* (*cocartesian lifting*) de q através do funtor N : **Hil** $\to$ **Sig** (a definição de *cocartesian lifting* pode ser consultada, por exemplo, em [Barr e Wells, 1990]).

Exemplo 5.5 Voltemos ao Exemplo 5.4 da lógica $\mathbf{Ci}^T$. Suponhamos que a lógica **Ci** está definida numa assinatura com domínio $\{\sqcap, \sqcup, \to, \neg, \circ\}$ enquanto que **T** está definida numa assinatura com domínio $\{\cap, \cup, \supset, \sim, \Box\}$ (isto é, os conectivos clássicos de conjunção e disjunção agora aparecem explicitamente na linguagem de **T**). Como mencionamos anteriormente, na fibrilação de **Ci** com **T** seria conveniente compartilhar os conectivos de implicação, conjunção e disjunção, dados que eles têm o mesmo comportamento nas duas lógicas. Assim, podemos considerar o seguinte compartilhamento de conectivos $\mathcal{D}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{\wedge, \vee, \Rightarrow\} \arrow[dl, hook, "k_1"'] \arrow[dr, hook, "k_2"] & \\
\{\sqcap, \sqcup, \to, \neg, \circ\} & & \{\cap, \cup, \supset, \sim, \Box\}
\end{tikzcd}
$$

A construção da assinatura C descrita anteriormente toma agora a seguinte forma:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{\wedge, \vee, \Rightarrow\} \arrow[dl, "k_1"'] \arrow[dr, "k_2"] & \\
\{\sqcap, \sqcup, \to, \neg, \circ\} \arrow[dr, "i_1"'] & & \{\cap, \cup, \supset, \sim, \Box\} \arrow[dl, "i_2"] \\
 & \{\sqcap_1, \sqcup_1, \to_1, \neg_1, \circ_1, \cap_2, \cup_2, \supset_2, \sim_2, \Box_2\} \arrow[d, "q"'] & \\
 & \{\bar{\wedge}, \bar{\vee}, \bar{\Rightarrow}, \bar{\neg}, \bar{\circ}, \bar{\sim}, \bar{\Box}\} &
\end{tikzcd}
$$

[1] *Forgetful functor*, no original em inglês. Veja por exemplo [Goldblatt, 1984].

Em C temos que $\sqcap_1$ e $\cap_2$ são identificados, produzindo a classe de equivalência (conectivo) $\bar{\wedge}$. Da mesma maneira, $\sqcup_1$ e $\cup_2$ são identificados, produzindo o conectivo $\bar{\vee}$. Os conectivos $\rightarrow_1$ e $\supset_2$ também são identificados, produzindo o conectivo $\Rrightarrow$. Finalmente, $\neg_1$, $\circ_1$, $\sim_2$ e $\Box_2$ são mapeados através de q nos conectivos $\bar{\neg}$, $\bar{\circ}$, $\bar{\sim}$ e $\bar{\Box}$, respectivamente. (Exercício: confira estas afirmações.) Observe que no sistema de Hilbert obtido pela fibrilação restrita a $\mathcal{D}$ (que é uma versão alternativa de $\mathbf{Ci}^T$ escrita na assinatura C) temos agora uma única regra de Modus Ponens:

$$\textbf{(MP)}\ \frac{p_1,\ p_1 \Rrightarrow_1 p_2}{p_2}$$

(Exercício: escrever as regras do sistema de Hilbert obtido.) ■

Após as definições e os exemplos que acabamos de estudar, o leitor poderia fazer a seguinte observação pertinente: se a fibrilação introduzida por Gabbay é um método puramente semântico (de fato, algumas vezes chama-se de *fibred semantics*), por que chamar de 'fibrilação' os métodos de combinação categorial de sistemas de Hilbert estudados nesta seção? No caso da fibrilação de Gabbay estamos combinando lógicas apresentadas semanticamente, enquanto que na fibrilação categorial estamos combinando lógicas apresentadas sintaticamente...

Esta crítica é, por um lado, válida, mas é fácil achar uma solução para o problema suscitado: poderiamos chamar a fibrilação de Gabbay de 'fibrilação semântica', enquanto que os dois tipos de fibrilação categorial (irrestrita e restrita) poderiam ser chamados de métodos de 'fibrilação sintática'.

Por outro lado, existe uma motivo mais profundo para denominar de 'fibrilação' às técnicas categoriais: o que interessa aqui é o conceito de construção categorial universal que caracteriza as duas técnicas de fibrilação, irrestrita e restrita: no primeiro caso, é um coproduto na categoria **Hil**. No segundo caso, uma vez provado que o funtor esquecimento $N : \mathbf{Hil} \rightarrow \mathbf{Sig}$ é uma cofibração (no sentido de que podem ser feitas todas as elevações cocartesianas de morfismos em **Sig** da forma $N(\mathcal{H})\xrightarrow{h}C$) então a fibrilação restrita é obtida como a elevação cocartesiana de um morfismo apropriado na categoria **Sig** das assinaturas.

A generalização destes processos para outras categorias de sistemas lógicos, tais como sistemas lógicos apresentados semanticamente (por exemplo, através de semânticas de Kripke) ou inclusive para sistemas lógicos apresentados apenas através de uma assinatura acompanhada de uma relação de conseqüência (como aqueles apresentados na Definição 2.11) são perfeitamente possíveis. De fato, existem diferentes trabalhos em que as técnicas de fibrilação foram aplicadas para outras categorias de sistemas lógicos: no artigo original [Sernadas et al., 1999] foram aplicadas as mesmas técnicas (coproduto e elevação cocartesiana) para definir fibrilações irrestritas e restritas de sistemas lógicos apresentados através de semânticas algébricas (que generalizam, dentre outras, as semânticas de Kripke), chamados de *sistemas de interpretação*. Estos sistemas, junto com uma noção apropriada de morfismo, de composição de morfismos e de morfismos identidade, configuram uma categoria denominada **Int**. Assim, a fibrilação de dois sistemas de interpretação nada mais é do que o coproduto dos sistemas (uma vez que é demonstrado que a categoria **Int** possui coprodutos finitos). Por outro lado, para construir as fibrilações restritas, é preciso provar que o funtor esquecimento $N' : \mathbf{Int} \to \mathbf{Sig}$ é cocartesiano; com esta informação, podemos reproduzir *mutatis mutandis* a construção da fibrilação irrestrita realizada em **Hil**, mas agora na categoria **Int**. A propriedade de 'minimalidade' da lógica obtida é exatamente análoga àquela apresentada pelas lógicas definidas pela fibrilação restrita em **Hil**.

Por outro lado, em [Zanardo et al., 2001] foi estendido o método de fibrilação categorial para lógicas de primeira ordem (apresentadas sintaticamente como sistemas de Hilbert, e semanticamente, de maneira análoga à categoria **Int**). Um sistema lógico foi definido como sendo *completo* se possui duas apresentações, uma sintática e outra semântica, que originam a mesma relação de conseqüência. Um teorema geral de preservação de completude através de fibrilações foi obtido, para sistemas lógicos satisfazendo certas condições adicionais.

Em [Coniglio et al., 2003] estas técnicas e resultados foram generalizados para lógicas de ordem superior, escritas em linguagens polissortidas incluindo modalidades e *binding operators* (tais como *lambda*-abstração). A semântica para estas lógicas foi obtida generalizando a semântica usual em *topos*, de maneira de poder interpretar modalidades.

Finalmente, em [Caleiro et al., 2003] foi abordada a problemática de fibrilar (utilizando os mesmos métodos categoriais) lógicas que possuem conectivos com semântica não vero-funcional.

Para o leitor interessado, em [Caleiro et al., 2005] são descritos os principais resultados e aplicações das técnicas e fibrilação categorial até 2004.

Vemos portanto, retomando a nossa discussão no início desta seção, que a utilização da linguagem da Teoria de Categorias contribui na análise conceitual dos problemas, permitindo definir conceitos gerais que podem ser aplicados em diferentes instâncias particulares. Este é o caso, acreditamos, do conceito de fibrilação. Voltaremos sobre este ponto na Seção 7.

6 Fibrilação Básica de Matrizes

Nesta seção discutiremos dois mecanismos simples para combinar lógicas matriciais, isto é, com semântica de matrizes lógicas. Estes métodos, introduzidos em [Fernández, 2005] e [Coniglio e Fernández, 2005], são chamados de *união direta de matrizes* e *fibrilação básica de matrizes* (*direct union* e *plain fibring*, no original em inglês).

A idéia básica é que, dadas duas lógicas matriciais $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ tais que cada $\mathcal{L}_i$ é caracterizada por uma única matriz M_i com domínio A_i e valores designados D_i $(i = 1, 2)$, é então possível estender os operadores originais da álgebra M_i para a união disjunta $A_1 \uplus A_2$ através de funções $f_i : A_j \to A_i$ $(i \neq j)$.

As funções f_i nos permitem 'transportar' os valores-verdade 'forâneos' da matriz M_j nos valores-verdade de M_i. Esta é uma perspectiva análoga à formulação original de Gabbay de fibrilação semântica de lógicas modais, analisada na Seção 4.

Da mesma maneira que na fibrilação de Gabbay de lógicas modais, a fibrilação de matrizes vai depender das matrizes escolhidas para representar a semântica da lógica matricial. Por causa disto, uma lógica matricial é definida como sendo um par $\langle C, \mathcal{M} \rangle$ tal que $\mathcal{M}$ é uma classe de matrizes sobre a assinatura C. Quando $\mathcal{M} = \{M\}$ escreveremos simplesmente $\langle C, M \rangle$. As relações de conseqüência associadas serão denotadas por $\vdash_{\mathcal{M}}$ e $\vdash_M$, respectivamente. A partir de agora, e a menos que seja explicitamente mencionado, as lógicas matriciais serão da forma $\langle C, M \rangle$, com M uma matriz sobre C. Todos os resultados, exemplos e definições foram tomados de [Coniglio e Fernández, 2005].

O caso mais simples é o seguinte: suponhamos que temos duas lógicas matriciais cujas matrizes têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de valores desgnados. Então, a sua *união direta* é obtida simplesmente juntando as matrizes. Formalmente:

Definição 6.1 Seja $\mathcal{L}_i = \langle C^i, M_i \rangle$ (com $i = 1, 2$) duas lógicas matriciais, em que cada $M_i = \langle \mathbf{A}_i, D \rangle$ é uma C^i-matriz tal que $A_1 = A_2$. Seja $A = A_1$. A *união direta de* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$ é a lógica $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \langle C^1 \bigoplus C^2, \vdash_{M_1+M_2} \rangle$ em que $C^1 \bigoplus C^2$ é a fibrilação de C^1 e C^2 (veja a Seção 5) e $\vdash_{M_1+M_2}$ é a relação de conseqüência induzida pela $C^1 \bigoplus C^2$-matriz $M_1 + M_2 = \langle \mathbf{A}, D \rangle$. A matriz $M_1 + M_2$ é definida como segue: se $c \in C^i_n$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$, então $c^{M_1+M_2}(a_1, \ldots, a_n) = c^{M_i}(a_1, \ldots, a_n)$ ($n \geq 0$; $i = 1, 2$). ■

Teorema 6.2 Seja $\mathcal{L} = \langle C, \vdash \rangle$ uma lógica caracterizada por uma C-matriz M. Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ dois fragmentos de $\mathcal{L}$ sobre C^1 e C^2, respectivamente, tal que $C^1 \bigoplus C^2 = C$. Então $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$. ■

Desta maneira, a união direta de matrizes pode ser vista como um método de composição e decomposição de lógicas. Em particular, uma dada lógica $\mathcal{L}$ pode ser fatorada em dois fatores mais simples, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, no caso em que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

Exemplo 6.3 Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C^i, M_i \rangle$ (com $i = 1, 2$) tais que C^1 contem apenas um símbolo $\neg$ de negação e C^2 contem apenas um símbolo $\vee$ de disjunção e um símbolo $\Rightarrow$ de implicação. Suponhamos que M_1 é a matriz para a negação clássica e que M_2 é a matriz para a disjunção e a implicação clássicas definidas sobre $A = \{1, 0\}$ com $D = \{1\}$. Então $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ é a representação matricial $\mathcal{L}$ da lógica proposicional clássica sobre A e D na assinatura $\{\neg, \vee, \Rightarrow\}$. As lógicas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são dois fatores (mais simples) de $\mathcal{L}$. Pela sua vez, $\mathcal{L}_2$ pode ser fatorada nas lógicas elementares $\mathcal{L}^1_2$ (a lógica da disjunção clássica) e $\mathcal{L}^2_2$ (a lógica da implicação clássica), isto é, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}^1_2 + \mathcal{L}^2_2$. Portanto, $\mathcal{L}$ fatora em $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}^1_2$ e $\mathcal{L}^2_2$, logo $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}^1_2 + \mathcal{L}^2_2$. ■

Na Seção 7 veremos que, utilizando a definição de fibrilação categorial em **Hil**, uma lógica não pode, em geral, ser recuperada a partir da fibrilação dos seus componentes.

Um caso mais interessante é combinar lógicas matriciais cujas matrizes estão definidas sobre domínios diferentes. Neste caso, cada matriz é estendida para a união disjunta dos domínios através de um par de funções, e então é calculada a união disjunta das matrizes estendidas. O conjunto de todas as matrizes obtidas por este método é a semântica matricial da *fibrilação básica* (veja a Definição 6.5 abaixo).

Definição 6.4 Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C^i, M_i \rangle$ (com $i = 1, 2$) duas lógicas matriciais, em que cada $M_i = \langle \mathbf{A}_i, D_i \rangle$ é uma C^i-matriz. Seja A_i o domínio das álgebras $\mathbf{A}_i$.
(i) Um par $(f_1, f_2) \in A_1^{A_2} \times A_2^{A_1}$ é *admissível* se satisfaz: $f_i(x) \in D_i$ sse $x \in D_j$, para todo $x \in A_j$ $(i \neq j)$.
(ii) Dado um par admissível $\mathsf{a} = (f_1, f_2)$ então a *extensão de* M_i *por* a é a C^i-matriz $M_i^{\mathsf{a}} = \langle \mathbf{A}, D_1 \uplus D_2 \rangle$ tal que $A = A_1 \uplus A_2$ e, para todo $c \in C_n^i$ e para todo $x_1, \ldots, x_n \in A$, $c^{M_i^{\mathsf{a}}}(x_1, \ldots, x_n) = c^{M_i}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ em que, para todo $k = 1, \ldots, n$:
– Se $x_k \in A_i$, então $\tilde{x}_k = x_k$.
– Se $x_k \in A_j$, então $\tilde{x}_k = f_i(x_k)$ (para $j \neq i$). ■

É fácil provar que a lógica matricial $\mathcal{L}_i^{\mathsf{a}} = \langle C^i, M_i^{\mathsf{a}} \rangle$ coincide com $\mathcal{L}_i$, desde que a seja admissível: isto é, $\Gamma \vdash_{M_i} \varphi$ sse $\Gamma \vdash_{M_i^{\mathsf{a}}} \varphi$, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C^i)$ e $i = 1, 2$. Isto significa que, se extendemos uma lógica através de um par admissível, a lógica não muda.

Definição 6.5 Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C^i, M_i \rangle$ (com $i = 1, 2$) duas lógicas matriciais como na Definição 6.4. A *fibrilação básica* de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ é o par $\mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2 = \langle C^1 \bigoplus C^2, \vdash_{M_1 \odot M_2} \rangle$ tal que $M_1 \odot M_2$ é o conjunto de $C^1 \bigoplus C^2$-matrizes

$$M_1 \odot M_2 = \{M_1^{\mathsf{a}} + M_2^{\mathsf{a}} \ : \ \mathsf{a} \text{ é admissível}\}.$$

■

Pode ser provado que, nos casos 'normais', a fibrilação básica produz uma extensão conservativa de seus fatores. Para isso, definiremos 'situação normal': dizemos que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são *compatíveis* se existem pares admissíveis em $A_1^{A_2} \times A_2^{A_1}$. Claramente, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são compatíveis sse:
(i) $D_1 \neq \emptyset$ sse $D_2 \neq \emptyset$; e
(ii) $A_1 - D_1 \neq \emptyset$ sse $A_2 - D_2 \neq \emptyset$.
Observe que, se $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são não-compatíveis, então uma das lógicas é trivial; portanto, todo par de lógicas não-triviais é compatível. Isto mostra que a compatibilidade de duas lógicas é, de fato, uma situação normal.

Teorema 6.6 Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C^i, M_i \rangle$ (com $i = 1, 2$) duas lógicas matriciais como na Definição 6.4 tais que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são compatíveis. Então $\mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2$ é uma extensão conservativa de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.

Exemplo 6.7 Considere a lógica matricial paraconsistente P^1, introduzida no artigo [Sette, 1973] e estudada amplamente desde a sua aparição. A assinatura de P^1 é C^{P^1} tal que $|C^{P^1}| = \{\neg_{P^1}, \Rightarrow_{P^1}\}$. A matriz de P^1 é $M_{P^1} = \langle \mathbf{A}_1, \{T, T_1\}\rangle$ tal que $A_1 = \{T, T_1, F\}$, e as suas operações são definidas pelas tabelas abaixo.

	T	T_1	F
$\neg_{P^1}$	F	T	T

$\Rightarrow_{P^1}$	T	T_1	F
T	T	T	F
T_1	T	T	F
F	T	T	T

Seja $\mathcal{L}_1$ o fragmento de P^1 definido sobre a assinatura $\{\neg_{P^1}\}$ dado pela matriz M_1 da negação $\neg_{P^1}$. Por outro lado, seja $\mathcal{L}_2$ o fragmento da lógica proposicional clássica definido na assinatura $\{\Rightarrow\}$ dado pela matriz usual M_2, com domínio $A_2 = \{0, 1\}$ e conjunto $D_2 = \{1\}$ de valores designados:

$\Rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

Considere agora $A = \{T, T_1, F, 1, 0\}$ e $D = \{T, T_1, 1\}$, e seja $(f, g) \in A_2^{A_1} \times A_1^{A_2}$ tal que $f(T) = f(T_1) = 1$, $f(F) = 0$, $g(1) = T$ e $g(0) = F$. Então $\mathsf{a} = (f, g)$ é admissível e M_1^{a} e M_2^{a} são dadas pelas tabelas abaixo, respectivamente.

	T	T_1	1	F	0
$\neg$	F	T	F	T	T

$\Rightarrow$	T	T_1	1	F	0
T	1	1	1	0	0
T_1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0
F	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1

Seja $\mathcal{L}$ a lógica sobre $\{\neg, \Rightarrow\}$ caracterizada pela matriz $M_{\mathsf{a}} = M_1^{\mathsf{a}} + M_2^{\mathsf{a}}$ dada pelas duas tabelas acima, com $\{T, T_1, 1\}$ como conjunto de valores designados. É fácil ver que a matriz reduzida para $\mathcal{L}$ produz a lógica P^1, pois T e 1 são congruentes, assim como F e 0. Por otro lado, é claro que o par $\mathsf{a}' = (f, g') \in A_2^{A_1} \times A_1^{A_2}$ tal que $g'(1) = T_1$ e $g'(0) = F$ é também admissível; mais ainda, a e a' são os únicos pares admissíveis. (Exercício: provar esta afirmação.) Portanto $\mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2$ é caracterizada pelo conjunto de matrices

$$M_1 \odot M_2 = \{M_1^{\mathsf{a}} + M_2^{\mathsf{a}},\ M_1^{\mathsf{a}'} + M_2^{\mathsf{a}'}\}.$$

É fácil ver que, por exemplo, a fórmula $\varphi = (p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow \neg\neg(p_1 \Rightarrow p_2)$ não é válida em $M_1^{\mathsf{a}'} + M_2^{\mathsf{a}'}$ portanto φ não é válida em $\mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2$. (Exercício: provar esta afirmação.)

Exemplo 6.8 Na dissertação [Fernández, 2001] foi introduzida a hierarquia $\{P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de lógicas paraconsistentes generalizando P^1. Cada lógica P^n é definida na assinatura $C_{P^n} = \{\neg_{P^n}, \Rightarrow_{P^n}\}$, com semântica dada pela matriz $M_{P^n} = \langle \mathbf{A}_{P^n}, \{T_0, T_1, \ldots, T_n\}\rangle$ tal que $A_{P^n} = \{T_0, T_1, \ldots, T_n, \mathbf{f}\}$. As respectivas operações são mostradas nas tabelas abaixo.

	T_0	T_h	$\mathbf{f}$
$\neg_{P^n}$	$\mathbf{f}$	T_{h-1}	T_0

$\Rightarrow_{P^n}$	T_0	T_h	$\mathbf{f}$
T_0	T_0	T_0	$\mathbf{f}$
T_h	T_0	T_0	$\mathbf{f}$
$\mathbf{f}$	T_0	T_0	T_0

$(1 \leq h \leq n)$

Também em [Fernández, 2001] foi introduzida a hierarquia $\{I^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de lógicas fracamente intuicionistas (ou *paracompletas*) generalizando a lógica paracompleta I^1 introduzida em [Sette e Carnielli, 1995] como dual da lógica P^1. Cada I^n é definida na assinatura $C_{I^n} = \{\neg_{I^n}, \Rightarrow_{I^n}\}$, com semântica dada pela matriz $M_{I^n} = \langle \mathbf{A}_{I^n}, \{\mathbf{t}\}\rangle$ tal que $A_{I^n} = \{\mathbf{t}, F_0, F_1, \ldots, F_n\}$. As respectivas operações são dadas pelas tabelas abaixo.

	$\mathbf{t}$	F_0	F_l
$\neg_{I^n}$	F_0	$\mathbf{t}$	F_{l-1}

$\Rightarrow_{I^n}$	$\mathbf{t}$	F_0	F_l
$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	F_0	F_0
F_0	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$
F_l	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$

$(1 \leq l \leq n)$

Note que P^0 e I^0 coincidem com a lógica proposicional clássica sobre $\{\neg, \Rightarrow\}$ com semântica matricial a dois valores. Analisaremos a seguir a fibrilação básica de I^n com P^k. Observe primeiro que, dadas I^n e P^k, os pares admissíveis são da forma $\mathsf{a}_{ij} = (f_j, g_i)$ (para $0 \leq j \leq k$ e $0 \leq i \leq n$) tal que $g_i(\mathbf{f}) = F_i$; $f_j(\mathbf{t}) = T_j$; $g_i(T_h) = \mathbf{t}$ e $f_j(F_l) = \mathbf{f}$ para $0 \leq h \leq k$ e $0 \leq l \leq n$. Seja $M_{\mathsf{a}_{ij}} = M_{I^n}^{\mathsf{a}_{ij}} + M_{P^k}^{\mathsf{a}_{ij}}$. Então a matriz $M_{\mathsf{a}_{ij}}$ é definida sobre a assinatura $C_{nk} = \{\neg_{In}, \Rightarrow_{In}, \neg_{Pk}, \Rightarrow_{Pk}\}$, com domínio $\{\mathbf{t}, T_0, T_1, \ldots, T_k, F_0, F_1, \ldots, F_n, \mathbf{f}\}$ e valores designados $\{\mathbf{t}, T_0, T_1, \ldots, T_k\}$. As operações são explicitadas abaixo (as tabelas-verdade das negações estão separadas em dois casos: $i = 0$ e $i > 0$; $j = 0$ e $j > 0$).

$\Rightarrow_{In}^{i}$	$\mathbf{t}$	T_0	T_h	F_0	F_l	$\mathbf{f}$
$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	F_0	F_0	F_0
T_0	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	F_0	F_0	F_0
T_h	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	F_0	F_0	F_0
F_0	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$
F_l	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$

$\Rightarrow_{Pk}^{j}$	$\mathbf{t}$	T_0	T_h	F_0	F_l	$\mathbf{f}$
$\mathbf{t}$	T_0	T_0	T_0	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$
T_0	T_0	T_0	T_0	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$
T_h	T_0	T_0	T_0	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$
F_0	T_0	T_0	T_0	T_0	T_0	T_0
F_l	T_0	T_0	T_0	T_0	T_0	T_0
$\mathbf{f}$	T_0	T_0	T_0	T_0	T_0	T_0

	$\mathbf{t}$	T_0	T_h	F_0	F_l	$\mathbf{f}$
$\neg^0_{In}$	F_0	F_0	F_0	$\mathbf{t}$	F_{l-1}	$\mathbf{t}$
$\neg^i_{In}$	F_0	F_0	F_0	$\mathbf{t}$	F_{l-1}	F_{i-1}
$\neg^0_{Pk}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	T_{h-1}	T_0	T_0	T_0
$\neg^j_{Pk}$	T_{j-1}	$\mathbf{f}$	T_{h-1}	T_0	T_0	T_0

$(1 \leq h \leq k;\ 1 \leq l \leq n)$

Cada $M_{\mathsf{a}_{ij}}$ define uma lógica matricial que é simultaneamente paraconsistente (com relação a $\neg_{Pk}$) e paracompleta (com relação a $\neg_{In}$). A fibrilação básica $I^n \odot P^k$ de I^n e P^k é a lógica matricial caracterizada pelo conjunto de matrizes

$$M_{I^n} \odot M_{P^k} = \{M_{\mathsf{a}_{ij}}\ :\ 0 \leq j \leq k \text{ e } 0 \leq i \leq n\}.$$

As relações entre a lógica definida por cada matriz $M_{\mathsf{a}_{ij}}$, a lógica $I^n \odot P^k$ e a lógica I^nP^k (que possui uma única negação que é simultaneamente paraconsistente no sentido de P^k e paracompleta no sentido de I^n), introduzida em [Fernández, 2001], ainda não foram estabelecidas.

Concluimos esta seção observando que as operações de combinação de matrizes aqui introduzidas operam sobre lógicas matriciais cujas classes de matrizes são unitárias, se bem que o resultado é uma lógica matricial caracterizada, em geral, por um conjunto não unitário de matrizes. Esta assimetria pode ser corrigida facilmente, generalizando o método de fibrilação básica de matrizes para lógicas matriciais em geral.

Definição 6.9 Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C_i, \mathcal{K}_i\rangle$ (com $i = 1, 2$) duas lógicas matriciais. A *fibrilação básica de* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$ é a lógica matricial $\mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2 = \langle C_1 \bigoplus C_2, \mathcal{K}_1 \odot \mathcal{K}_2\rangle$ tal que $\mathcal{K}_1 \odot \mathcal{K}_2$ é a classe de $C_1 \bigoplus C_2$-matrizes

$$\{M_1^{\mathsf{a}} + M_2^{\mathsf{a}}\ :\ M_1 \in \mathcal{K}_1,\ M_2 \in \mathcal{K}_2 \ \text{ e } \ \mathsf{a} \in A_2^{A_1} \times A_1^{A_2} \text{ é admissível}\}.$$

Teorema 6.10 Suponhamos que, para toda $M_1 \in \mathcal{K}_1$ e para toda $M_2 \in \mathcal{K}_2$, as lógicas $\langle C_1, M_1\rangle$ e $\langle C_2, M_2\rangle$ são compatíveis. Então $\mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2$ é uma extensão conservativa de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.

Em particular, o resultado anterior vale se nem $\mathcal{K}_1$ nem $\mathcal{K}_2$ contêm matrizes triviais (isto é, matrizes com $A = \emptyset$ ou $D = \emptyset$).

7 Colapso e anti-colapso: Traduções e Metatraduções

Finalmente, analisaremos aqui dois problemas associados com a fibrilação categorial (e com a composição de lógicas em geral), assim como possíveis soluções.

O primeiro dos problemas, apontado por L. Fariñas del Cerro e A. Herzig em [del Cerro e Herzig, 1996] (este fato já é mencionado em [Gabbay, 1996]) é o chamado *colapso da fibrilação.* O tal 'colapso' pode ser resumido à seguinte situação: suponhamos que combinamos, por fibrilação, a lógica proposicional clássica junto com a lógica proposicional intuicionista. Suponhamos adicionalmente que nenhum dos conectivos é compartilhado. Surpreendentemente, na lógica fibrilada as duas implicações, a intuicionista e a clássica, colapsarão numa só, a implicação clássica. Como resultado disto, a lógica obtida pela fibrilação da lógica clássica com a intuicionista será a lógica clássica. A prova deste fato é extremamente simples: suponhamos que $\to$ e $\Rightarrow$ denotam as implicações clássica e intuicionista, respectivamente. Dado que ambas implicações satisfazem o *metateorema da dedução* (MTD) então

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi \ \text{ sse } \ \Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \text{ e } \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi \ \text{ sse } \ \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi.$$

Assim, podemos argumentar da maneira seguinte:

$$\cfrac{\cfrac{\varphi \Rightarrow \psi \vdash \varphi \Rightarrow \psi \ \ \text{(Axioma)}}{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \psi \ \ \text{(MTD)}}}{\varphi \Rightarrow \psi \vdash \varphi \to \psi \ \ \text{(MTD)}}$$

O mesmo argumento pode ser utilizado para provar que $\varphi \to \psi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Independentemente disto, J.-Y. Béziau apresentou numa breve nota (ver [Béziau, 2004]) um aparente paradoxo da fibrilação: se combinarmos a lógica da conjunção clássica (descrita pelas regras usuais de sequentes) com a lógica da disjunção clássica (descrita também pelas regras usuais de sequentes) através da fibrilação, na lógica resultante obteremos as leis de distributividade da conjunção com relação à disjunção, e vice-versa. Este mesmo resultado é obtido se consideramos as lógicas descritas através de bivalorações, isto é, valorações com valores em $\{0, 1\}$ satisfazendo as propriedades clássicas para cada conectivo. Ou seja, uma inesperada interação entre conectivos aparece na lógica obtida por fibrilação.

O tal 'paradoxo' da distributividade está diretamente relacionado com o fenómeno do colapso da fibrilação, como foi apontado em [Coniglio, 2005] e posteriormente em [Béziau e Coniglio, 2005]. Com efeito, o problema neste caso (assim como no caso do colapso) consiste em que nas lógicas fibriladas aparecem novas propriedades de interação entre os conectivos das lógicas dadas, e portanto a lógica resultante seria *forte* demais. No caso do colapso, a interação adicional é a inter-derivação de $\varphi \to \psi$ e $\varphi \Rightarrow \psi$. Em [Sernadas et al., 2002] e em [Caleiro e Ramos, 2004] foram propostas soluções independentes para o problema do colapso, no nível da fibrilação semântica.

No artigo [Coniglio, 2005] acima mencionado defende-se a posição de que certas interações entre os conectivos das lógicas sendo combinadas deveriam acontecer. Com efeito, consideremos o *desideratum* básico da fibrilação enunciado por D. Gabbay:

> *"Dados os sistemas lógicos $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, então a combinação $\mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$ é o menor sistema lógico para a linguagem combinada que é uma extensão conservativa de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$".*[2]

No caso limite, uma lógica sobre a linguagem combinada de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ cujas derivações consistam na união disjunta das derivações de $\mathcal{L}_1$ e de $\mathcal{L}_2$ poderia ser considerada como a *combinação* de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$? A resposta parece ser negativa, sem sombra de dúvidas: espera-se que as regras e propriedades dos conectivos de cada uma das lógicas envolvidas interajam na lógica resultante. Dois exemplos fundamentais da falta de interação entre os conectivos na fibrilação são apresentados em [Coniglio, 2005] (ver Exemplos 7.1 e 7.2 abaixo), e um outro exemplo importante é dado em [Béziau e Coniglio, 2005] (ver Exemplo 7.3 abaixo). Nestes três exemplos, na combinação de dois fragmentos de uma dada lógica não são obtidos alguns axiomas de interação esperados.

Este fenómeno (o de demonstrar *menos* coisas das esperadas na fibrilação) é o que em [Coniglio, 2005] chamamos de *problema do anti-colapso da fibrilação*. Para isso, propomos como solução a adopção de uma noção mais forte de tradução entre sistemas lógicos (que chamamos de *meta-tradução*), de maneira a preservar as meta-propriedades *positivas* das lógicas envolvidas. É claro que uma meta-propriedade envolvendo uma afirmação negativa (do tipo $\Gamma \nvdash \varphi$) de uma lógica $\mathcal{L}$ não deveria, necessariamente, ser preservada na combinação de $\mathcal{L}$ com outra lógica, digamos $\mathcal{L}'$: na lógica resultante – uma extensão das lógicas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ – poderia ser o caso que $\Gamma \vdash \varphi$. As fibrilações obtidas utilizando meta-traduções são chamadas de *meta-fibrilações*. Uma meta-tradução $h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ satisfaz o seguinte: se $\mathcal{L}$ possui a meta-propriedade

$$\texttt{Se } \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1 \texttt{ e } \ldots \texttt{ e } \Gamma_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n \texttt{ então } \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$$

então $\mathcal{L}'$ debe possuir a tradução da meta-propriedade como meta-propriedade:

$$\texttt{Se } h(\Gamma_1) \vdash_{\mathcal{L}'} h(\varphi_1) \texttt{ e } \ldots \texttt{ e } h(\Gamma_n) \vdash_{\mathcal{L}'} h(\varphi_n) \texttt{ então } h(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} h(\varphi).$$

Observe que o conceito usual de traduções entre lógicas (utilizado na definição de fibrilação categorial, como vimos na Seção 5) estabelece apenas a preservação de meta-propriedades da forma $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Assim, uma tradução $h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ satisfaz o seguinte : se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ então $h(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} h(\varphi)$; porém, meta-propriedades mais gerais não são necessariamente preservadas. No caso em que h é a imersão da lógica $\mathcal{L}_i$ na lógica fibrilada $\mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$ (fibrilação restrita ou irrestrita) as vantagens das meta-traduções são óbvias, como poderemos apreciar nos três exemplos abaixo.

Em [Coniglio, 2005] foram definidas as categorias **Mcon** e **Seq** de *relações de conseqüência de conclusões múltiples* e de *cálculos de sequentes*, respectivamente. Os morfismos, nas duas categorias, preservam, por definição, as regras dos sistemas originais. Dai pode ser provado que os morfismos nestas categorias são meta-traduções. Utilizando os mesmos conceitos categoriais da fibrilação

[2] Adaptado de [Gabbay, 1999].

categorial vistos na Seção 5 pode ser provado que estas categorias tem fibrilação categorial, restrita e irrestrita. Em muitos casos os resultados obtidos (principalmente na tentativa de recuperar uma lógica a partir da fibrilação de seus fragmentos) são melhores. Os seguintes exemplos ilustram esta afirmação:

Exemplo 7.1 Sejam $\mathcal{A}_\neg$ e $\mathcal{A}_\vee$ os sistemas de relação de conseqüência em **Mcon** representando os fragmentos da negação $\neg$ e da disjunção $\vee$ da lógica clássica, respectivamente. Então a fibrilação (coproduto em **Mcon**) $\mathcal{A}_{\neg\vee} := \mathcal{A}_\neg \bigoplus \mathcal{A}_\vee$ recupera a lógica proposicional clássica na assinatura com domínio $\{\neg, \vee\}$ (cf. [Coniglio, 2005]).

Por outro lado, se consideramos na categoria **Hil** a fibrilação dos respectivos fragmentos da negação e da disjunção clássica, obtemos um sistema de Hilbert $\mathcal{H}_{\neg\vee}$ no qual não é possível obter o teorema $\varphi \vee \neg\varphi$. Para provar esta afirmação, basta considerar a seguinte matriz sobre a assinatura $\{\vee, \neg\}$:

$\vee$	T	$F1$	F
T	T	T	T
$F1$	T	F	F
F	T	F	F

	$\neg$
T	F
$F1$	$F1$
F	T

em que T é o único valor designado. É fácil provar que esta matriz satisfaz qualquer regra de inferência envolvendo apenas a disjunção clássica. Com efeito, se $r = \langle \Gamma, \varphi \rangle$ é uma regra de inferência (na assinatura $\{\vee\}$), então r é correta para a disjunção clássica sse existe um subconjunto finito não-vazio Γ_0 de Γ tal que toda variável proposicional que ocorre em Γ_0 ocorre em φ. (Exercício: provar esta afirmação.) Claramente a matriz acima valida qualquer regra r com estas características. (Exercício: provar esta afirmação.)

Usando um argumento análogo, pode ser provado que todas as regras de inferência válidas para a negação clássica também são satisfeitas por esta matriz. Com efeito, se $r = \langle \Gamma, \varphi \rangle$ é uma regra de inferência (na assinatura $\{\neg\}$), então r é correta para a negação clássica sse: (1) Γ contém um conjunto da forma $\{\neg^n\psi, \neg^m\psi\}$ tal que $n - m$ é impar; ou (2) $\varphi = \neg^m\psi$ e $\neg^n\psi \in \Gamma$ para algum n tal que $n = k.m + 2$ ou $m = k.n + 2$ para algúm $k \in \mathbb{N}$. (Exercício: Provar esta afirmação.) Claramente a matriz acima satisfaz este tipo de regras. (Exercício: provar esta afirmação.) Aqui, $\neg^n\psi$ denota a fórmula formada por n aplicações da negação na fórmula ψ; logo, $\neg^0\psi$ é ψ.

Por outro lado, tomando uma valoração v na matriz acima tal que $v(p_1) = F1$ então $v(p_1 \vee \neg p_1) = F_1$, um valor não distinguido.

Uma das razões para este fenômeno acontecer é que a meta-propriedade

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash_1 \psi \qquad \Delta, \neg\varphi \vdash_1 \psi}{\Gamma, \Delta \vdash_1 \psi}$$

da relação de conseqüência $\vdash_1$ associada à negação clássica não é preservada pela fibrilação na categoria **Hil**.

Usando novamente a matriz acima, é provado que mesmo resultado vale se consideramos a categoria **Cons** de relações de conseqüência (no sentido da Definição 2.11) com traduções usuais como morfismos: a lógica obtida também não contém $\varphi \vee \neg\varphi$ como teorema. ∎

Exemplo 7.2 A fibrilação $\mathcal{A}_{\neg\Rightarrow} := \mathcal{A}_{\neg} \bigoplus \mathcal{A}^{i}_{\Rightarrow}$ em **Mcon** dos sistemas $\mathcal{A}_{\neg}$ da negação clássica e $\mathcal{A}^{i}_{\Rightarrow}$ da implicação intuicionista produz a lógica proposicional clássica na assinatura C com domínio $\{\neg, \Rightarrow\}$ (cf. [Coniglio, 2005]).

Considere agora a seguinte matriz na assinatura C (cf. [Urbas, 1989], Theorem 8):

$\Rightarrow$	1	$^6/_7$	$^5/_7$	$^4/_7$	$^3/_7$	$^2/_7$	$^1/_7$	0
1	1	$^6/_7$	$^5/_7$	$^4/_7$	$^3/_7$	$^2/_7$	$^1/_7$	0
$^6/_7$	1	1	$^5/_7$	$^4/_7$	$^5/_7$	$^4/_7$	$^1/_7$	$^1/_7$
$^5/_7$	1	$^6/_7$	1	$^4/_7$	$^6/_7$	$^2/_7$	$^4/_7$	$^2/_7$
$^4/_7$	1	$^6/_7$	$^5/_7$	1	$^3/_7$	$^6/_7$	$^5/_7$	$^3/_7$
$^3/_7$	1	1	1	$^4/_7$	1	$^4/_7$	$^4/_7$	$^4/_7$
$^2/_7$	1	1	$^5/_7$	1	$^5/_7$	1	$^5/_7$	$^5/_7$
$^1/_7$	1	$^6/_7$	1	1	$^6/_7$	$^6/_7$	1	$^6/_7$
0	1	1	1	1	1	1	1	1

	$\neg$
1	0
$^6/_7$	$^5/_7$
$^5/_7$	$^2/_7$
$^4/_7$	$^3/_7$
$^3/_7$	$^4/_7$
$^2/_7$	$^5/_7$
$^1/_7$	1
0	1

Aqui, 1 é o único valor designado. Por outro lado, seja $\mathcal{H}_{\Rightarrow}$ o sistema de Hilbert definido sobre a assinatura $\{\Rightarrow\}$ através das seguintes regras:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow u)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow u))$$

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p \quad \text{(Lei de Peirce)}$$

$$\frac{p \Rightarrow q \qquad p}{q}$$

É bem conhecido que este sistema axiomático caracteriza a lógica da implicação clásica. Pode ser provado por simples examinação que cada axioma e regra de $\mathcal{H}_{\Rightarrow}$ são válidos com relação à matriz acima, portanto qualquer axiomatização correta e completa da lógica da implicação clássica é validada por esta matriz.

Usando a caracterização da lógica da negação clássica vista no Exemplo 7.1, pode ser provado que qualquer axiomatização correta e completa da lógica da negação clássica é validada pela matriz acima. (Exercício: provar esta afirmação.) Seja então $\mathcal{H}_{\neg\Rightarrow}$ a fibrilação em **Hil** de qualquer axiomatização correta e completa da lógica da negação clássica com qualquer axiomatização correta e completa da lógica da implicação clássica. Pela definição de fibrilação irrestrita e pelos argumentos dados acima, vemos que a matriz acima valida qualquer derivação de $\mathcal{H}_{\neg\Rightarrow}$. Porém, é fácil ver que $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ não é uma tautologia para esta matriz: basta tomar uma valoração v tal que $v(p) = \frac{6}{7}$ e

$v(q) = \frac{4}{7}$. Portanto esta fórmula não é um teorema de $\mathcal{H}_{\neg\Rightarrow}$ e assim $\mathcal{H}_{\neg\Rightarrow}$ é um sistema de Hilbert caracterizando uma lógica estritamente contida na lógica clássica sobre a assinatura $\{\neg, \Rightarrow\}$. Noutras palavras, a fibrilação em **Hil** de fragmentos da lógica clássica não permite recuperar a lógica clássica, da mesma maneira que aconteceu no Exemplo 7.1. Observe que nos dois exemplos, a assinatura da fibrilação constitui um conjunto adequado de conectivos.

É interessante notar que a relação de conseqüência $\models$ da matriz acima satisfaz a meta-propriedade $\varphi, \neg\varphi \models \psi$ para todas as fórmulas φ, ψ. Isto prova que a lógica desta matriz não satisfaz o meta-teorema da dedução, portanto nenhuma das possíveis fibrilações em **Hil** da forma $\mathcal{H}_{\neg\Rightarrow}$ satisfaz o meta-teorema da dedução. De novo, uma importante meta-propriedade de uma lógica (no caso, o meta-teorema da dedução, satisfeito por qualquer sistema de Hilbert $\mathcal{H}_{\Rightarrow}$ correto e completo para a implicação clássica) é perdida pelo fato de ter imerso a lógica (via a noção usual de tradução) numa lógica maior. ■

Exemplo 7.3 Sejam C^1 e C^2 assinaturas tais que $|C^1| = \{\wedge\}$ e $|C^2| = \{\vee\}$. Seja $C = C^1 \bigoplus C2$, logo $|C| = \{\wedge, \vee\}$. Seja $\vdash_{\wedge\vee}$ a relação definida como segue: para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$, $\Gamma \vdash_{\wedge\vee} \varphi$ sse existe um conjunto finito não-vazio $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $(\bigwedge_{\psi\in\Gamma_0} v(\psi)) \leq v(\varphi)$ vale em L, para todo reticulado L e para todo homomorfismo $v : L(C) \to L$ de álgebras de tipo C. Pode ser provado que $\mathcal{L}_{\wedge\vee} = \langle C, \vdash_{\wedge\vee}\rangle$ é uma lógica padrão (veja a Definição 2.11). (Exercício: provar esta afirmação.) Claramente $\mathcal{L}_{\wedge\vee}$ satisfaz qualquer regra de inferência na assinatura C^1 correta para a conjunção clássica, assim como qualquer regra de inferência na assinatura C^2 correta para a disjunção clássica. (Exercício: provar esta afirmação.) Logo, $\mathcal{L}_{\wedge\vee}$ é um modelo da fibrilação $\mathcal{H}_{\wedge\vee} = \mathcal{H}_{\wedge} \bigoplus \mathcal{H}_{\vee}$ em **Hil** de qualquer axiomatização correta e completa $\mathcal{H}_{\wedge}$ da lógica da conjunção clássica com qualquer axiomatização correta e completa $\mathcal{H}_{\vee}$ da lógica da disjunção clássica. (Exercício: provar esta afirmação.) Por outro lado, dado que existem reticulados não-distributivos, é imediato que a meta-propriedade abaixo *não é* valida em $\mathcal{L}_{\wedge\vee}$.

$$\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) \vdash_{\wedge\vee} (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2)$$

Logo, a propriedade de distributividade (satisfeita pela lógica clásica da conjunção e da disjunção) não pode valer em nenhuma fibrilação em **Hil** da forma $\mathcal{H}_{\wedge\vee} = \mathcal{H}_{\wedge} \bigoplus \mathcal{H}_{\vee}$, em que $\mathcal{H}_{\wedge}$ e $\mathcal{H}_{\vee}$ são axiomatizações corretas e completas da lógica da conjunção clássica e da lógica da disjunção clássica, respectivamente.

Utilizando novamente a lógica $\mathcal{L}_{\wedge\vee}$, pode ser provado que o mesmo resultado vale a para categoria **Cons** (ver [Béziau e Coniglio, 2005]). Isto é, a fibrilação em **Cons** da lógica da conjunção clássica com a lógica da disjunção clássica não é distributiva. Por outro lado, é fácil obter sistemas em **Mcon** para a conjunção e para a disjunção clássicas tais que a fibrilação em **Mcon** produz a lógica da disjunção e da conjunção clássica, isto é, validando a lei da distributividade. Uma das razões para que na fibrilação da conjunção e da disjunção clássicas (utilizando como morfismos traduções usuais) a distributividade não seja válida é que a meta-propriedade

$$\frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \qquad \Delta, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \psi}$$

da relação de conseqüência associada à disjunção clássica não é preservada. ■

É interessante destacar que a adopção de meta-traduções representa um avanço na solução à seguinte questão levantada por D. Gabbay (cf. [Gabbay, 1999, pp. 6]):

> *Seja $\mathcal{L}$ um sistema lógico definido sobre uma assinatura C obtida de duas assinaturas C^1 e C^2 por alguma combinação sintática. Será possível decompor $\mathcal{L}$ em dois sistemas lógicos $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ (cada um deles definidos sobre a assinatura C^1 e C^2, respectivamente) e depois recuperar $\mathcal{L}$ como combinação de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ acrescentando, eventualmente, axiomas de interação?*

Porém, é claro que o problema do colapso da fibrilação fica ainda mais acentuado se utilizarmos meta-fibrilações, dado que as lógicas resultantes são mais fortes do que as obtidas por fibrilações. Assim, é necessário avaliar a conveniência de um enfoque com relação ao outro.

Referências

[Barr e Wells, 1990] Barr, M. e Wells, C. (1990). *Category Theory for Computer Science.* Prentice Hall.

[Béziau, 2004] Béziau, J. Y. (2004). A paradox in the combination of logics. In Carnielli, W., Dionísio, F., e Mateus, P., editores, *Proceedings of CombLog'04 - Workshop on Combination of Logics: Theory and Applications, Lisbon (Portugal)*, pp. 76–77. Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Lisbon (Portugal).

[Béziau e Coniglio, 2005] Béziau, J. Y. e Coniglio, M. E. (2005). Combining conjunction with disjunction. In Prasad, B., editor, *Proceedings of the 2nd Indian International Conference on Artificial Intelligence (IICAI 2005), Pune, India.* IICAI. No prelo.

[Caleiro et al., 2005] Caleiro, C., Carnielli, W., Rasga, J., e Sernadas, C. (2005). Fibring of Logics as a Universal Construction. In Gabbay, D. e Guenthner, F., editores, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 13. Kluwer Academic Publishers.

[Caleiro et al., 2003] Caleiro, C., Carnielli, W. A., Coniglio, M. E., Sernadas, A., e Sernadas, C. (2003). Fibring Non-Truth-Functional Logics: Completeness Preservation. *Journal of Logic, Language and Information*, 12(2):183–211.

[Caleiro e Ramos, 2004] Caleiro, C. e Ramos, J. (2004). Cryptofibring. In Carnielli, W. A., Dionísio, F. M., e Mateus, P., editores, *Proceedings of CombLog'04 - Workshop on Combination of Logics: Theory and Applications, Lisbon (Portugal)*, pp. 87–92. Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Lisbon (Portugal).

[Carnielli e Marcos, 2002] Carnielli, W. e Marcos, J. (2002). A taxonomy of **C**-systems. In Carnielli, W. A., Coniglio, M. E., e D'Ottaviano, I. M. L., editores, *Paraconsistency - the Logical Way to the Inconsistent*, volume 228 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pp. 1–94, New York. Marcel Dekker.

[Carnielli, 1990] Carnielli, W. A. (1990). Many-valued logics and plausible reasoning. In *Proceedings of the XX International Congress on Many-Valued Logics, University of Charlotte, USA*, pp. 328–335. IEEE Computer Society.

[Carnielli, 2000] Carnielli, W. A. (2000). Possible-Translations Semantics for Paraconsistent Logics. In Batens, D., Mortensen, C., Priest, G., e Van Bendegem, J. P., editores, *Frontiers of Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency*, Logic and Computation Series, pp. 149–163. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications.

[Carnielli e Coniglio, 1999] Carnielli, W. A. e Coniglio, M. E. (1999). A categorial approach to the combination of logics. *Manuscrito*, 22(2):69–94.

[Carnielli et al., 2005a] Carnielli, W. A., Coniglio, M. E., e Costa-Leite, A. (2005a). Paraconsistency and knowability. Submetido a publicação.

[Carnielli et al., 2005b] Carnielli, W. A., Coniglio, M. E., e Marcos, J. (2005b). Logics of Formal Inconsistency. In Gabbay, D. e Guenthner, F., editores, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 14. Kluwer Academic Publishers. No prelo. Versão preliminar disponível em *CLE e-Prints*, Vol. 5(1), 2005. URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/articles.html`.

[Carnielli e Lima-Marques, 1999] Carnielli, W. A. e Lima-Marques, M. (1999). Society semantics for multiple-valued logics. In Carnielli, W. A. e D'Ottaviano, I. M. L., editores, *Advances in Contemporary Logic and Computer Science*, volume 235 of *Contemporary Mathematics Series*, pp. 33–52. American Mathematical Society.

[Coniglio, 2005] Coniglio, M. E. (2005). The meta-fibring environment: Preservation of meta-properties by fibring. *CLE e-Prints*, 5(4). URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_5,n_4,2005.htm`.

[Coniglio e Fernández, 2005] Coniglio, M. E. e Fernández, V. L. (2005). Plain fibring and direct union of logics with matrix semantics. In Prasad, B., editor, *Proceedings of the 2nd Indian International Conference on Artificial Intelligence (IICAI 2005), Pune, India*. IICAI. No prelo.

[Coniglio et al., 2003] Coniglio, M. E., Sernadas, A., e Sernadas, C. (2003). Fibring logics with topos semantics. *Journal of Logic and Computation*, 13(4):595–624.

[del Cerro e Herzig, 1996] del Cerro, L. F. e Herzig, A. (1996). Combining classical and intuitionistic logic, or: Intuitionistic implication as a conditional. In Baader, F. e Schulz, K. U., editores, *Frontiers of Combining Systems: Proceedings of the 1st International Workshop, Munich (Germany)*, Applied Logic, pp. 93–102. Kluwer Academic Publishers.

[Fernández, 2001] Fernández, V. (2001). Semântica de sociedades para lógicas n-valentes. Dissertação de Mestrado, IFCH – Universidade Estadual de Campinas.

[Fernández, 2005] Fernández, V. L. (2005). *Fibrilação de lógicas na Hierarquia de Leibniz*. Tese de Doutorado, IFCH – Universidade Estadual de Campinas.

[Fernández e Coniglio, 2003] Fernández, V. L. e Coniglio, M. E. (2003). Combining valuations with society semantics. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 13(1):21–46.

[Gabbay, 1996] Gabbay, D. (1996). Fibred semantics and the weaving of logics: Part 1. *The Journal of Symbolic Logic*, 61(4):1057–1120.

[Gabbay, 1999] Gabbay, D. (1999). *Fibring Logics*. Clarendon Press - Oxford.

[Goldblatt, 1984] Goldblatt, R. (1984). *Topoi: The categorial Analysis of Logic*. North-Holland, second edition.

[Jaśkowski, 1949] Jaśkowski, S. (1949). O koniunkcji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych. *Studia Societatis Scientiarun Torunesis, Sectio A*, I(8):171–172. Translated as 'On the discussive conjunction in the propositional calculus for inconsistent deductive systems' in *Logic and Logic Philosophy*, 7:57–59, 1999, Proceedings of the Stanislaw Jaśkowski's Memorial Symposium, held in Toruń, Poland, July 1998.

[Łukasiewicz, 1953] Łukasiewicz, J. (1953). A system of modal logic. *J. Computing systems*, 1:111–149.

[Marcos, 1999] Marcos, J. (1999). Semânticas de Traduções Possíveis. Dissertação de Mestrado, IFCH – Universidade Estadual de Campinas.
URL = `http://www.cle.unicamp.br/pub/thesis/J.Marcos/`.

[Marcos, 2005] Marcos, J. (2005). Possible–translations semantics for some weak classically–based paraconsistent logics. *Journal of Applied Non-Classical Logics* (a aparecer).

[Sernadas et al., 1999] Sernadas, A., Sernadas, C., e Caleiro, C. (1999). Fibring of logics as a categorical construction. *Journal of Logic and Computation*, 9 (2):149–179.

[Sernadas et al., 2002] Sernadas, C., Rasga, J., e Carnielli, W. A. (2002). Modulated fibring and the collapsing problem. *Journal of Symbolic Logic*, 67(4):1541–1569.

[Sette, 1973] Sette, A. M. (1973). On the propositional calculus P^1. *Mathematica Japonicae*, 18:173–180.

[Sette e Carnielli, 1995] Sette, A. M. e Carnielli, W. A. (1995). Maximal weakly-intuitionistic logics. *Studia Logica*, 55:181–203.

[Tarski, 1956] Tarski, A. (1956). *Logics, Semantics, Metamathematics - Papers from 1923 to 1938*. Oxford University Press.

[Urbas, 1989] Urbas, I. (1989). Paraconsistency and the **C**-systems of da Costa. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30(4):583–597.

[Zanardo et al., 2001] Zanardo, A., Sernadas, A., e Sernadas, C. (2001). Fibring: Completeness preservation. *The Journal of Symbolic Logic*, 66(1):414–439.