Víctor Leandro Fernández

Fibrilação de Lógicas na Hierarquia de Leibniz

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 30/06/2005

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Coniglio.
Prof. Dr. Pedro José Catuogno.
Profª. Drª. Itala M. L. D'Ottaviano.
Prof. Dr. Marcelo Finger
Prof. Dr. Paulo Veloso
Prof. Dr. Walter A. Carnielli (suplente)
Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa (suplente)

Junho de 2005

Resumo

Neste trabalho investigamos com um enfoque abstrato um processo de combinações de lógicas conhecido como *Fibrilação de lógicas*. Em particular estudamos a transferência, mediante fibrilação, de certas propriedades intrínsecas às lógicas proposicionais. As noções mencionadas são as de *protoalgebrizabilidade*, *equivalencialidade* e *algebrizabilidade*.

Ditas noções fazem parte da "Hierarquia de Leibniz", conceito fundamental da chamada Lógica Algébrica Abstrata. Tal hierarquia classifica as diferentes lógicas segundo o seu grau de algebrizabilidade. Assim, nesta tese estudaremos se, quando duas lógicas possuem alguma dessas propriedades, a fibrilação delas possui também tal característica.

Com o objetivo de diferençar os diferentes modos de fibrilação existentes na literatura, analisamos duas maneiras de fibrilar lógicas: Fibrilação categorial (ou C-fibrilação) e Fibrilação no sentido de D. Gabbay (G-fibrilação). Também estudamos uma variante da G-fibrilação de lógicas conhecida como *Fusão de lógicas*.

Assim, damos diferentes condições que devem valer para que a C-fibrilação de uma lógica protoalgébrica seja também protoalgébrica, e procedemos de forma similar com as outras propriedades que constituem a Hierarquia de Leibniz. No caso da G-fibrilação e da fusão de lógicas chegamos a diversos resultados análogos aos anteriores, os quais permitem ter uma visão geral da relação entre Lógica Algébrica Abstrata e as Combinações de lógicas.

Abstract

In this thesis we investigate, with an abstract approach, a process of combinations of logics known as *fibring of logics*. In particular we study the transference by fibring of certain properties, intrinsic to propositional logics: *protoalgebricity*, *equivalenciality* and *algebraizability*.

The notions above belong to the "Leibniz Hierarchy", a fundamental concept of the so-called *Abstract Algebraic Logic*. Such hierarchy classifies the logics according to its algebraizability degree. So, in this thesis we will study whether, given two logics having some of these properties, the fibring of them still has that property.

With the aim of distinguishing the different techniques of fibring existing in the literature, we analyze two methods of fibring logics: Categorial Fibring (or C-fibring) and Fibring in D. Gabbay's sense (G-fibring). We also study a variant of G-fibring known as *fusion of logics*.

So, we give different conditions that must hold in order to obtain a protoalgebraic logic by means of C-fibring of protoalgebric logics. We proceed in a similar way with the other properties that constitutes the Leibniz Hierarchy. With respect to G-fibring and fusion, we arrive to similar results which allow us to get an overview of the relation between Abstract Algebraic Logic and the subject of combinations of logics.

À Lía, com amor.

E com imensa gratidão pelos nossos "anos brasileiros".

Agradecimentos

Agradeço:

- Ao meu orientador, Marcelo Coniglio, por tudo o que aprendi de lógica junto com ele e, principalmente, pela sua constante dedicação e rigor, que fizeram desta tese uma pesquisa séria.
- Aos professores Walter Carnielli, Itala D'Ottaviano e Michael Wrigley (in memoriam), por me converter num apaixonado por Lógica.
- Aos professores do Departamento de Matemática da Facultad de Filosofía da Universidad Nacional de San Juan, Argentina.
- Aos meus primeiros professores em Lógica, Manuel Fidel e Aldo Figallo.
- Ao Luís Sbardellini, pelo apoio e amizade nestes anos, e pela grande ajuda com o português.
- Aos colegas de toda parte (espero trabalhar com vocês nalgum momento!): Ana, Fernando, Ivana, Juliana, João Marcos, Mauro, Sergio, Aldo Jr., Martín, Juan Carlos, Peter.
- Aos meus grandes amigos brasileiros: Márcio, Tati, Ricardo, Elaine, Alex, Cris.
- Aos meus grandes amigos "não - brasileiros" do Brasil: Norberto, Verónica, Mauricio, Marcela, Tomás, Valeria, Susana, Tomás Barrero.
- Ao Rogério, da secretaria da pós do IFCH, pelas inúmeras vezes que salvou a minha vida.
- À minha família e amigos que ficaram em San Juan me apoiando.
- À Lía, Ana Luz e Carolina, pela paciência e amor.
- À CAPES, pela bolsa concedida.

"Hace quinientos años, el jefe de un hexágono superior dió con un libro tan confuso como los otros, pero que tenía casi dos hojas de líneas homogéneas. Mostró su hallazgo a un descifrador ambulante, que le dijo que estaban redactadas en portugués; otros le dijeron que en yiddish. Antes de un siglo pudo establecerse el idioma: un dialecto samoyedo-lituano del guaraní, con inflexiones del árabe clásico."

Jorge Luis Borges (La biblioteca de Babel)

Sumário

Capítulo 1

A Hierarquia de algebrizabilidade de Leibniz

1.1 Lógicas entendidas como relações de conseqüência

É bem conhecido que a idéia de entender as relações de conseqüência como o conceito fundamental que caracteriza as lógicas (diferentemente do conceito mais fraco de caracterização mediante fórmulas válidas) é devida a A. Tarski. A motivação básica subjacente é considerar uma lógica como um par $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ onde $C_{\mathcal{L}}$ *define* uma linguagem proposicional $L(C_{\mathcal{L}})$, e $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \wp(L(C_{\mathcal{L}})) \times L(C_{\mathcal{L}})$ com certas características (que serão indicadas em breve). No caso em que $(\Gamma, \alpha) \in \vdash_{\mathcal{L}}$ (ou, como é usualmente denotado, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$), entendemos que α é conseqüência do conjunto Γ de "premissas". O conjunto de fórmulas válidas na lógica fica assim entendido como o conjunto de conseqüências do vazio. Desta forma, podemos saber não somente quais expressões são válidas numa lógica dada, mas também saber quando certas expressões são válidas *a partir da validade de certas premissas* nessa lógica.

Por outro lado, num aspecto mais "técnico", além de estender a noção de lógica podemos diferenciar mecanismos de raciocínio ou demonstração que não diferem no seu conjunto de fórmulas válidas, mas podem ser diferenciados com respeito à sua relação de conseqüência. Assim por exemplo, existem diferentes versões da lógica modal $S5$ de Lewis, sendo as mais conhecidas, as versões $S5_G$, $S5_C$, $S5_W$ (versões de Gödel, Carnap e Wasjberg respectivamente). Todas estas versões coincidem nos seus teoremas, mas não coincidem em forma geral na sua relação de conseqüência, como foi provado em [Porte, 1983]. É assim que, seguindo esta linha de pensamento, neste texto entenderemos uma lógica como uma relação de conseqüência definida sobre uma linguagem formal.

Uma outra justificativa para nossa escolha torna-se necessária aqui: a classificação de lógicas segundo a Hierarquia de Leibniz depende naturalmente da idéia de que uma lógica é uma relação de conseqüência, e não um mero conjunto de fórmulas válidas. Por exemplo, no caso dos sistemas $S5_G$, $S5_C$ e $S5_W$ mencionados, foi demonstrado que a primeira admite semântica algébrica, enquanto as restantes não são algebrizáveis (com a mesma nocão de algebrizabilidade, devida a W. Blok e D. Pigozzi, que utilizaremos neste texto). Mais ainda, a prova deste fato está assentada na noção de relação de conseqüência (ver [Blok – Pigozzi, 1989]). Pelo acima exposto, começaremos nosso trabalho fornecendo os conceitos e resultados básicos concernentes a linguagens proposicionais e relações de conseqüência sobre tais linguagens. A nossa exposição está principalmente baseada no livro [Wójcicki, 1988], o qual é um estudo detalhado e sistemático dos principais resultados obtidos pela comunidade lógica nesses tópicos. Começaremos com as definições básicas:

Definição 1.1.1

(a) O **conjunto de variáveis proposicionais** *$\mathcal{V}$ é um conjunto (fixo no percurso deste texto) enumerável. Os seus elementos serão denotados usualmente por $p, p_1, p_2 \cdots$ e, também às vezes, por $q, q_1, q_2, \cdots$. Uma* **assinatura** *é uma família $C = \{C^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, sendo cada C^k um conjunto, que será denominado* **conjunto de conectivos de aridade** *k. O* **domínio da assinatura** *C é o conjunto $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C^k$. Usualmente denotamos ao domínio da assinatura C por $|C|$. Dada uma assinatura, os seus conjuntos de conectivos devem verificar (para todo $k, j \in \mathcal{N}$) que $C^k \cap C^j = \emptyset$ e também $C^k \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Dadas duas assinaturas C_1 e C_2, dizemos que C_1* **está incluída em** *C_2 (e denotamos tal fato por $C_1 \subseteq C_2$) se, para todo $k \in \mathbb{N}$, ${C^k}_1 \subseteq {C^k}_2$.*

(b) Uma **linguagem proposicional com assinatura** *C (denotada por $L(C)$) é a álgebra de palavras livremente gerada pelo conjunto C sobre $\mathcal{V}$, ao considerar cada conjunto C^k como o conjunto de operações k-árias de dita álgebra. Isto é, $L(C)$ pode ser entendida como a álgebra definida por:*

- *Se $p \in \mathcal{V}$, então $p \in L(C)$.*
- *Se $w \in C^k$ e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq L(C)$ então $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in L(C)$ (em particular, se $w \in C^0$ então $w \in L(C)$).*
- *$L(C)$ não contém outros elementos além dos acima mencionados.* □

Notemos que $L(C)$ poderia ser expresso de muitas formas, mas pelo fato de ser uma álgebra absolutamente livre depende exclusivamente da cardinalidade do conjunto $\mathcal{V}$ e da assinatura. Portanto, julgamos que a nossa escolha na notação não apresentará problemas no percurso deste trabalho. Por outro lado, segundo a nossa definição, o conjunto C^0 é disjunto a $\mathcal{V}$. Assim, as fórmulas 0-árias podem ser diferenciadas em fórmulas distinguidas (como por exemplo as fórmulas $\top$ e $\bot$ da lógica intuicionista) e em variáveis proposicionais. Nossa opção de não considerar a $\mathcal{V}$ como subconjunto de C^0 obedece às definições algébricas que estudam problemas de homomorfismos [1].

No estudo de certas propriedades das lógicas tais como estruturalidade (a ser definida daqui a pouco) é precisa a noção de substituição. Formalmente, tal conceito pode ser expresso assim:

Definição 1.1.2 *Dada uma assinatura C, uma* **substituição na assinatura** C *é uma função $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow L(C)$. Como $L(C)$ é uma álgebra livremente gerada, σ pode ser estendida a um endomorfismo $\widehat{\sigma} : L(C) \longrightarrow L(C)$ (também denominado de substituição em C) univocamente, da seguinte forma:*

- *Se $p \in \mathcal{V}$ então $\widehat{\sigma}(p) = \sigma(p)$.*
- *Se $\varphi \in C^0$, então $\widehat{\sigma}(\varphi) = \varphi$.*
- *Se $\varphi = w(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ e $w \in C^k$, então $\widehat{\sigma}(\varphi) = w(\widehat{\sigma}(\alpha_1), \ldots, \widehat{\sigma}(\alpha_k))$ (aqui $k \neq 0$).* □

Notação 1.1.3 Dada uma linguagem $L(C)$, e $\varphi \in L(C)$, notaremos por $\varphi(p_{i_1}, \cdots, p_{i_n})$ quando o conjunto das variáveis proposicionais presentes em φ seja incluído [2] em $\{p_{i_1}, \cdots, p_{i_n}\}$. Por outro lado, denotaremos por $\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ a fórmula $\widehat{\sigma}(\varphi)$ (com $\varphi = \varphi(p_{i_1}, \cdots, p_{i_n})$, em que $\sigma(p_{i_k}) = \alpha_k$, e $k = 1, \cdots, n$). □

Proposição 1.1.4 *Para qualquer assinatura C e para todo par de substituições σ e σ' em C vale:*
(a) $\widehat{\widehat{\sigma'} \circ \sigma} = \widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma}$.
(b) Se $\sigma(p_i) = \alpha_i$ (com $i = 1, \ldots, k$, $p_i \in \mathcal{V}$), e $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in L(C)$, então
$\widehat{\sigma'}(\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)) = \varphi(\widehat{\sigma'}(\alpha_1), \ldots, \widehat{\sigma'}(\alpha_k))$.

[1]De fato, os homomorfismos se estudam em álgebras com o mesmo tipo de similaridade; logo, se $\mathcal{V} \subseteq C^0$ deveriamos considerar como álgebra similar a toda que tenga um conjunto como mínimo enumerável de operações 0-árias. Para trabalhar com dita condição o formalismo preciso seria bem mais complicado.

[2]Notemos que o conjunto de variáveis em φ não precisa ser *exatamente* $\{p_{i_1}, \cdots, p_{i_n}\}$, mas sim um subconjunto dele.

Demonstração: É usual na literatura (ver, por exemplo, [Bueno et al., 2004]. ■

Agora definiremos o outro conceito que constitui uma lógica: o de relação de conseqüência.

Definição 1.1.5 *Fixada uma assinatura C, uma* **relação de conseqüência sobre a linguagem** $L(C)$ *(ou em $L(C)$) é uma relação* $\vdash \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$ *verificando* [3]*:*

- *Se $\varphi \in \Gamma$ então $\Gamma \vdash \varphi$ (***Extensividade***).*
- *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Sigma$ então $\Sigma \vdash \varphi$ (***Monotonicidade***).*
- *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Sigma \vdash \psi$, para todo $\psi \in \Gamma$, então $\Sigma \vdash \varphi$ (***Transitividade***).* □

Observação 1.1.6

Toda relação $\vdash$ determina uma função $Cn_{\vdash} : \wp(L(C)) \longrightarrow \wp(L(C))$ denominada **operador de conseqüência**, da seguinte forma: $\alpha \in Cn_{\vdash}(\Gamma)$ se e somente se $\Gamma \vdash \alpha$. As propriedades mencionadas na definição anterior se correspondem com as seguintes propriedades de $Cn_{\vdash}$.

- $\Gamma \subseteq Cn_{\vdash}(\Gamma)$.
- $\Gamma \subseteq \Sigma$ implica $Cn_{\vdash}(\Gamma) \subseteq Cn_{\vdash}(\Sigma)$.
- $Cn_{\vdash}(Cn_{\vdash}(\Gamma)) \subseteq Cn_{\vdash}(\Gamma)$.

Estas propriedades fazem com que $Cn_{\vdash}$ seja, sob o ponto de vista da Teoria de Conjuntos, um operador de fecho. Além disso, todo operador de conseqüência $Cn_{\vdash}$ determina da forma óbvia uma relação de conseqüência.

De qualquer forma, em geral nesta tese (a exceção do Capítulo 4) utilizaremos sobretudo o conceito de relação de conseqüência. □

Definição 1.1.7 *Uma* **lógica proposicional** *é um par $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, sendo $C_{\mathcal{L}}$ uma assinatura e $\vdash_{\mathcal{L}}$ uma relação de conseqüência sobre (ou em) $L(C_{\mathcal{L}})$. Consideremos agora as seguintes propriedades adicionais que pode ter $\vdash_{\mathcal{L}}$:*

- *Para toda susbstituição $\widehat{\sigma}$ em $L(C_{\mathcal{L}})$:*
  *Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ então $\widehat{\sigma}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}} \widehat{\sigma}(\varphi)$ (***Estruturalidade***).*
- *Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ então $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$*
  *(para algum $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finito). (***Finitariedade***).*

[3] No caso em que $(\Gamma, \alpha) \in \vdash$ o denotaremos como $\Gamma \vdash \alpha$.

Em base às propriedades mencionadas, diremos que $\mathcal{L}$ é uma **lógica estrutural** *se satisfaz estruturalidade; $\mathcal{L}$ será dita uma* **lógica finitária** *se satisfaz finitariedade e finalmente $\mathcal{L}$ será considerada uma* **lógica padrão** *se é estrutural e finitária.* $\square$

Observação 1.1.8

É também comun na literatura considerar lógicas "estratificadas" [4], constando de duas relações de conseqüência: ou seja, lógicas $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash^1_{\mathcal{L}}, \vdash^2_{\mathcal{L}} \rangle$. Cada uma destas relações tenta discriminar as conseqüências em *globais* e *locais*. Esta distinção é muito útil sobretudo nas lógicas modais, por causa da regra da necessitação. Os textos em que temos nos baseado para estudar a fibrilação fazem uso desta distinção. Porém, para focalizar o nosso estudo na problemática da algebrizabilidade, temos optado por estudar as lógicas com uma única relação de conseqüência, como em geral é feito na literatura. $\square$

Um conceito muito usual em lógica e que será utilizado aqui são os conceitos de *fragmento* e *extensão*. Definimo-os aqui suscintamente:

Definição 1.1.9 *Seja $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ uma lógica. E seja $C \subseteq C_{\mathcal{L}}$. O C-***fragmento de** $\mathcal{L}$ *é a lógica $\mathcal{L}(C)\!: = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}(C)} \rangle$, onde (para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(C)$), $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}(C)} \alpha$ se e somente se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$. Por outro lado, dadas duas lógicas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$, dizemos que $\mathcal{L}'$* **é extensão de** $\mathcal{L}$ *se $C_{\mathcal{L}} \subseteq C_{\mathcal{L}'}$ e, para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(C_{\mathcal{L}})$ vale: $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$. Por outro lado, $\mathcal{L}'$* **é extensão fraca de** $\mathcal{L}$ *se $C_{\mathcal{L}} \subseteq C_{\mathcal{L}'}$ e $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ implica $\vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$ (obviamente, toda extensão forte é também uma extensão fraca). Dizemos também que $\mathcal{L}'$* **é extensão conservativa de** $\mathcal{L}$ *se, além de ser extensão, temos que (para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(C_{\mathcal{L}})$): $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$. Isto é, que $\mathcal{L}'$ não acrescenta conseqüências novas em relação a fórmulas de $L(C_{\mathcal{L}})$. A definição de* **extensão conservativa fraca** *é adaptada da extensão fraca trivialmente.* $\square$

Em relação à definição anterior temos os seguintes resultados triviais:

Proposição 1.1.10 *Valem os seguintes fatos:*
(a) O C-fragmento de toda lógica (estrutural, finitária, padrão) é também uma lógica (estrutural, finitária, padrão).
(b) Toda lógica $\mathcal{L}$ é extensão conservativa de qualquer C-fragmento $\mathcal{L}(C)$ dela.

Demonstração: Trivial. $\blacksquare$

Indicamos aqui alguns abusos notacionais usuais neste texto:

[4] Traduzimos aqui a palavra "layered logic" pela expresão "lógica estratificada".

Notação 1.1.11
(a) Seja $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, e sejam Γ_1 e Γ_2 conjuntos de $L(C_{\mathcal{L}})$. Por $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_2$ queremos indicar $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} \gamma$, para toda fórmula $\gamma \in \Gamma_2$. E por $\Gamma_1 \dashv\vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_2$ indicamos $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_2$ e $\Gamma_2 \vdash_{\mathcal{L}} \Gamma_1$ simultaneamente. Estes abusos notacionais serão utilizados em muitas ocasiões.
(b) Dada uma lógica $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, o operador de conseqüência $Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}$ associado à relação $\vdash_{\mathcal{L}}$, será denotado simplesmente por $Cn_{\mathcal{L}}$.
(c) Dado que trabalharemos com lógicas estruturais, para nossos fins significa a mesma coisa expressar $\varphi(p_{i_1}, \cdots, p_{i_n})$ (ver Notação 1.1.3) que $\varphi(p_1, \cdots, p_n)$. Isto é, sempre podemos considerar ao conjunto de variáveis que aparecem numa certa fórmula φ como pertencente ao conjunto *das n primeiras variáveis de $\mathcal{V}$*. Portanto, utilizaremos esta última notação. □

Observação 1.1.12

Dada uma lógica $\mathcal{L}$, esta pode ser caracterizada tanto por $\vdash_{\mathcal{L}}$ quanto por $Cn_{\mathcal{L}}$ (o operador de conseqüência associado). Também pode ser caracterizada pelo seu conjunto de *teorias*, as quais serão definidas na continuação. □

Definição 1.1.13 *Dada uma lógica $\mathcal{L}$, uma* **teoria em $\mathcal{L}$** *é um conjunto $T \subseteq L(C)$ tal que, se $T \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ então $\varphi \in T$. Ou seja, $T = Cn_{\mathcal{L}}(T)$. Denotamos o conjunto de todas as teorias de $\mathcal{L}$ por $Th_{\mathcal{L}}$.* □

Um resultado concernente a teorias, particularmente importante para a Hierarquia de Leibniz a ser estudada no próximo capítulo, é o seguinte:

Proposição 1.1.14 *Seja uma lógica $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$. Logo temos que o par $\mathbf{Th}_{\mathcal{L}} = (Th_{\mathcal{L}}, \subseteq)$ é um reticulado completo, e portanto com primeiro e último elemento. Estes são, respectivamente, $Cn_{\mathcal{L}}(\emptyset)$ e $L(C)$. O ínfimo de duas teorias é simplesmente a interseção de teorias, e o seu supremo é a conseqüência da união das teorias.*

Até aqui demos diversas possíveis caracterizações que pode ter uma lógica. Continuaremos nossa exposição com um resultado muito interessante (e que será utilizado aqui em muitas ocasiões). Tal resultado estabelece que, fixada uma linguagem, é possível "ordenar" todas as suas relações de conseqüência. Mais precisamente:

Proposição 1.1.15 *Fixada uma assinatura C, consideremos a seguinte relação de ordem estabelecida no conjunto $Cons_C$ de todas as relações de conseqüência em $L(C)$: $\vdash_1 \leq \vdash_2$ se e somente se, para toda $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$ temos que, se $\Gamma \vdash_1 \varphi$ então $\Gamma \vdash_2 \varphi$. Então $\leq$ é uma relação de ordem. Mais ainda, o par $\mathbf{Cons_C} = (Cons_C, \leq)$ é um reticulado completo, e assim com primeiro e último elemento. Neste caso, o primeiro elemento é a relação $\vdash_{\mathbf{0}}$, definida por: se $\Gamma \vdash_{\mathbf{0}} \alpha$ então $\alpha \in \Gamma$ (de todo conjunto Γ somente pode inferir-se uma fórmula de Γ); o último elemento, $\vdash_{\mathbf{1}}$ é a lógica trivial: $\Gamma \vdash_{\mathbf{1}} \varphi$ para qualquer $\varphi \in L(C)$.*

A idéia de obter reticulados de lógicas pode ser aplicada também a lógicas estruturais, finitárias e padrões. Porém, nem todos estes reticulados são sub-reticulados completos de $\mathbf{Cons_C}$, como indica o seguinte resultado:

Proposição 1.1.16 *Dada uma linguagem $L(C)$, sejam os conjuntos $Stru_C$, Fin_C e Pad_C de todas as relações de conseqüência estruturais, finitárias e padrão em $L(C)$, respectivamente. Então, com a mesma ordem definida na proposição anterior, temos que estes três conjuntos constituem-se reticulados completos. Mais ainda,* $\mathbf{Stru_C}$ *é um sub-reticulado completo de* $\mathbf{Cons_C}$*. Tal fato não acontece com* $\mathbf{Fin_C}$ *e* $\mathbf{Pad_C}$*.*

Concluímos esta seção resumindo o que foi apresentado até aqui: as noções "lingüísticas" de assinatura e linguagem (entendida esta como álgebra de palavras) e de substituição (endomorfismo), assim como certas propriedades das substituições. Apresentamos, por outro lado, as noções "lógicas" de relação de conseqüência, junto com as mais específicas de conseqüência estrutural, finitária e padrão. Também definimos, dentro de uma lógica dada, a noção de teoria [5] e construido o reticulado de teorias relativos a uma lógica $\mathcal{L}$. Este fato é de grande importância dado que o operador de Leibniz Ω é definido neste reticulado. De fato, o nosso objetivo imediato é nos ocuparmos da Hierarquia de Leibniz, que será tratada logo a seguir.

Por outro construímos também reticulados de relações de conseqüência: esta construção vai nos permitir falar justificadamente da *menor lógica (estrutural, finitária, padrão)* que verifique certas propriedades; e este procedimento será muito aplicado ao estudo da fibrilação, que começaremos na seção seguinte. A nossa exposição referida em forma geral a relações de conseqüência acaba aqui. A seguir veremos de que forma relacionam-se as lógicas com semânticas algébricas simples: são estas semânticas as denominadas *semânticas matriciais*, estudadas nas seguintes seções.

1.2 Semânticas matriciais de lógicas proposicionais

Definição 1.2.1 *Dada uma assinatura C, uma C-***matriz** *é um par da forma $M = (\mathbf{A}, D)$, sendo $\mathbf{A} = (A, C)$ uma álgebra cuja assinatura é C* [6]*, e com $D \subseteq A$. O conjunto D é conhecido como o* **conjunto de valores distingüidos de** *M, ou também o "predicado de verdade" de*

[5] Na verdade a noção de teoria depende da relação de conseqüência. Mas, como ésta depende da linguagem da lógica, dizemos que o conjunto de teorias é relativo a $\mathcal{L}$ e não a $\vdash_{\mathcal{L}}$.

[6] E portanto $L(C)$, entendida como álgebra, tem o mesmo tipo de similaridade que $\mathbf{A}$.

*M. Entendemos como M-***valorações de** *$L(C)$ aos homomorfismos $h : L(C) \longrightarrow A$, vistos como C-homomorfismos* [7]. $\square$

Em muitas ocasiões indicaremos as C-matizes por $M = (A, D)$; isto é, trocando a álgebra **A** pelo seu domínio. Faremos sobretudo este abuso notacional quando nos refiramos a matrizes conhecidas, como por exemplo a matriz **2** (indicada usualmente por $\mathbf{2} = (\{0,1\}, \{1\})$) para a lógica proposicional clássica.
Notar que o conceito de C-matriz é essencialmente algébrico. Porém, as matrizes fornecem uma relação de conseqüência (que pode se considerada de tipo semântico) bem simples para linguagens proposicionais, como veremos na seguinte definição:

Definição 1.2.2 *Seja C uma assinatura, e seja $\mathcal{K}$ uma classe de C-matrizes. $\mathcal{K}$ induz um operador de conseqüência na linguagem $L(C)$, denominado* **semântica matricial para** *$L(C)$, e denotado por $\vdash_{\mathcal{K}}$, da seguinte forma: $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ se, para toda C-matriz $M = (\mathbf{A_M}, D_M)$ de $\mathcal{K}$, e toda M-valoração h de $L(C)$, se $h(\Gamma) \subseteq D_M$, então $h(\varphi) \in D_M$.* $\square$

Seja agora uma lógica com assinatura $C_{\mathcal{L}}$ e seja, por outro lado, uma classe $\mathcal{K}$ de C-matrizes. Obviamente, nem sempre acontece que a relação de conseqüência $\vdash_{\mathcal{L}}$ seja a mesma $\vdash_{\mathcal{K}}$. Na comparação entre ambas relações de conseqüência temos as seguintes critérios, comuns na literatura.

Definição 1.2.3 *Dada uma lógica $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, e dada uma classe $\mathcal{K}$ de C-matrizes, dizemos que:*
$\mathcal{L}$ é correta para $\mathcal{K}$ *quando $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vdash_{\mathcal{K}}$.*
$\mathcal{L}$ é completa para $\mathcal{K}$ *quando $\vdash_{\mathcal{K}} \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$.*
Finalmente, se $\mathcal{K}$ é correta e completa para $\mathcal{L}$ diremos que $\mathcal{L}$ **é adequada para** *$\mathcal{K}$.* $\square$

No caso em que $\mathcal{K}$ seja uma classe unitária (isto é, que consta somente de uma única C-matriz M), denotamos $\vdash_{\mathcal{K}}$ por $\vdash_M$. Em relação a semânticas unitárias temos as seguintes definições:

Definição 1.2.4 *Se $\mathcal{L}$ é correta para $\vdash_M$, isto é, se $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vdash_M$, dizemos que M* **é um modelo matricial para** *$\mathcal{L}$. Definimos a classe* **Mmat**$(\mathcal{L})$ *como sendo a classe de todos os modelos matriciais de $\mathcal{L}$.* $\square$

Notemos aqui que o conceito de modelo matricial já depende da lógica e não meramente da linguagem. Voltando às semânticas matriciais temos os seguinte resultado, devido a J. Łoś e R. Suszko (ver [Łoś – Suszko, 1958]):

[7] Ou seja, para todo conectivo $c \in C$, $h(c(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)) = h(c)(h(\alpha_1), \cdots, h(\alpha_k))$. Para abreviar notação, em geral identificamos $h(c)$ com o próprio c.

Proposição 1.2.5 *Seja $L(C)$ uma linguagen, e $\mathcal{K}$ uma classe de $L(C)$-matrices. Então $\vdash_{\mathcal{K}}$ é uma relação de conseqüência estrutural, e além disso, $\vdash_{\mathcal{K}} = inf\{\vdash_M : M \in \mathcal{K}\}$.*

Um resultado que também será muito utilizado aqui é o seguinte, devido a R. Wójcicki (ver [Wójcicki, 1969]):

Proposição 1.2.6 *Dada uma lócica $\mathcal{L}$, a classe $Mmat(\mathcal{L})$ de todos seus modelos matriciais de $\mathcal{L}$ é uma semântica fortemente adequada para $\mathcal{L}$.*

Notar que $\vdash_{\mathcal{K}}$ não é necessariamente finitária, e portanto a lógica $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{K}}\rangle$ não precisa ser padrão. Por outro lado, na medida em que M é constituida por uma álgebra e por um subconjunto particular do seu domínio, os conceitos algébricos básicos (sub-álgebras, produtos, homomorfismos, etc.) podem ser aplicados a ela. Temos assim as seguintes definições:

Definição 1.2.7 *Seja $M = (\mathbf{A}, D)$ uma C-matriz; uma* **sub-matriz de** *M é um par $N = (\mathbf{B}, E)$, tal que $B \subseteq_{SA} A$* [8] *e $E = B \cap D$. Se $\{M_i\}_{i\in I}$ é uma família de C-matrizes, o* **produto direto de** *$\{M_i\}_{i\in I}$ é simplesmente $\Pi_{i\in I} M_i := (\Pi_{i\in I}\mathbf{A_i}, \Pi_{i\in I} D_i)$*[9] *(consideramos que existe o "produto de uma família vazia", sendo éste a matriz $\mathbf{M_1} = (\mathbf{1}, \{1\})$, com $\mathbf{1} = \{1\}$).* □

Em relação aos homomorfismos matriciais, dado que eles são classificados de diversas formas, merecem uma explicação independente:

Definição 1.2.8 *Seja C uma assinatura, e $M = (\mathbf{A}, D)$, e $N = (\mathbf{B}, E)$ C-matrizes. Dizemos que $h : M \longrightarrow N$ é um* **homomorfismo matricial** *se $h : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ é homomorfismo de álgebras e $h(D) \subseteq E$. Quando h é homomorfismo sobrejetor dizemos que N é* **uma imagem homomórfica de** *M.*
Um homomorfismo $h : M \longrightarrow N$ é um **homomorfismo forte** *se $h(D) = E$.*
Um homomorfismo $h : M \longrightarrow N$ é um **homomorfismo estrito** *se $h(A - D) \subseteq (B - E)$. No caso de que h seja um homomorfismo estrito surjetivo, N é mencionada como uma imagem homomórfica estrita de M. Se h é homomorfismo estrito injetor, h é chamado de* **imersão isomórfica** *(de M em $h(M)$). Obviamente, se h é estrito, injetor e sobrejetor, dizemos que h é um* **isomorfismo** *de M em N.* □

Muitas das propriedades do operador de Leibniz a ser estudado estão relacionadas com a existência, não somente de homomorfismos, mas de homomorfismos estritos. Um exemplo disso, no contexto das combinações entre lógicas, é uma variante de fibrilação de lógicas

[8] Ou seja, $\mathbf{B}$ é sub-álgebra de $\mathbf{A}$.
[9] Aqui, o domínio de $\Pi_{i\in I}\mathbf{A_i}$ é, obviamente, $\Pi_{i\in I} A_i$, e as operações são definidas "ponto a ponto" como é usual em Álgebra.

conhecida como "cripto-fibrilação". Dito mecanismo foi estudado em [Caleiro – Ramos, 0?], e nele os homomorfismos estritos são utilizados para a obtenção de resultados técnicos em relação a problemas típicos de fibrilação de lógicas, como veremos nos próximos capítulos.

Notemos que, na medida em que uma C-matriz é uma estrutura de tipo algébrico, podemos nos referir a ela utilizando linguagens no sentido da Teoria de Modelos clássica. Tal observação foi devida a S. Bloom em [Bloom, 1975], e em nossa exposição será de utilidade. Damos, portanto, a definição da linguagem apropriada para expressar C-matrizes:

Definição 1.2.9 *Dada uma assinatura C, a* **C-linguagem de primeira ordem sem igualdade** *(denotada $C - PO$) é aquela tal que: o seu conjunto de símbolos funcionais é C; o seu conjunto de símbolos relacionais é simplesmente $\{\mathbf{D}\}$, sendo $\mathbf{D}$ um símbolo unário de predicados; $\mathcal{V}$ é o conjunto de variáveis, e os símbolos lógicos são $\{\overline{\wedge}, \underline{\vee}, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \sim\}$* [10]. □

Observação 1.2.10

- *Da definição acima, podemos identificar uma linguagem proposicional $L(C)$ com o conjunto de termos da linguagem $C - PO$. Isto será muito utilizado, não somente no tratamento dos modelos matriciais, mas também em lógica equacional na nossa abordagem de lógicas algebrizáveis (ver Seção 1.6).*
- *Desta forma, todo modelo de $C - PO$ é identificado com uma C-matriz $M = (\mathbf{A}, D)$, pois os termos são interpretados por elementos da C-álgebra A e o símbolo $\mathbf{D}$ é interpretado pelo conjunto de valores distinguidos D.* □

Demos até aqui os conceitos básicos referidos a semânticas matriciais. Vejamos de que forma podemos aplicar tais semânticas para classificar as lógicas segundo o seu caráter mais ou menos algébrico. Tal caracterização é feita mediante um operador entre teorias denominado o *Operador de Leibniz*, que será tratado na próxima seção.

1.3 A noção de igualdade e o operador de Leibniz

Para começar nosso estudo do operador de Leibniz, precisamos dos resultados que serão dados a seguir. Remetemos aqui a [Blok – Pigozzi, 1989], de onde provêm grande parte destes conceitos, mas também a [Czelakowski, 2001].

Começaremos aqui tentando expressar, em termos algébricos, uma forma de definir igualdade atribuida a G. Leibniz. Segundo a sua linha de pensamento:

[10] Considerando que os símbolos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\neg$ são os usuais nas lógicas proposicionais, e que eles serão entendidos como símbolos funcionales em breve, temos optado por modificar os símbolos lógicos de C-PO, para evitar riscos de confusão.

"Os objetos a e b são iguais se, para toda propriedade P, a possui P se e somente se b também possui P."

Se quisermos entender formalmente a expressão "propriedade" como sendo "predicado", teríamos que a noção de igualdade de Leibniz deveria ser expressável em lógica de segunda ordem, da seguinte forma:

$$a \approx b \Leftrightarrow \forall P(P(a) \Leftrightarrow P(b))$$

Porém, podemos expressar em linguagens de primeira ordem a idéia de igualdade *restrita a uma matriz dada* da seguinte forma:

Definição 1.3.1 *Seja C uma assinatura e $M = (\mathbf{A}, D)$ uma C-matriz. Uma relação n-ária P diz-se* **elementarmente definível sobre** *M (com parámetros e sem igualdade) se existe uma fórmula α da linguagem $C - PO$ (com $\alpha = \alpha(p_1, \ldots, p_n, r_1, \ldots, r_m)$) e elementos $c_1, \ldots, c_m \in A$ tal que, para toda n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \subseteq A^n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in P$ se e somente se $M \models \alpha(a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_m)$. Isto é, se M é um modelo da fórmula de $C - PO$ $\alpha(a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_m)$ [11].* □

A definição anterior possibilita, fixada uma matriz $M=(A, D)$, "separar" aquelas relações em A que podem ser caracterizadas pela própria estrutura de M. Podemos agora definir a noção de igualdade restrita a M, *se consideramos como "propriedades" somente as relações definíveis sobre M*:

Definição 1.3.2 *Dada uma álgebra $\mathbf{A}$, para cada $F \subseteq A$, definimos a relação binária $\Omega_{\mathbf{A}} F$ em A, por:*

$$\Omega_{\mathbf{A}} F := \{(a, b) : a \in P \text{ se e somente se } b \in P \text{ para toda relação unária } P \text{ definível sobre } M = \langle \mathbf{A}, F \rangle\}$$

A relação acima é denominada a **relação de Leibniz em A sobre** *F. Consideremos agora a função $\Omega_A : \wp(A) \longrightarrow \wp(A \times A)$ tal que, para todo $F \subseteq A$, $\Omega_{\mathbf{A}}(F) := \Omega_{\mathbf{A}} F$. Tal função é denominada* **o operador de Leibniz relativo a A**. □

Assim, a relação de Leibniz (dependendo de $\mathbf{A}$ e de $F \subseteq A$) estabelece a igualdade entre elementos de A tomando como "teste de igualdade" a matriz $M = (\mathbf{A}, F)$. O operador de Lebniz é mais abrangente: considera todas as formas possíveis de estabelecer igualdade de elementos de A, conforme varia o conjunto potencial F de valores distinguidos . Neste ponto é bom notar que, ainda quando a relação e o operador de Leibniz tem como idéia subjacente a de igualdade, as suas aplicações (tal como foram definidos originalmente) não é muito conveniente. Uma caracterização de Ω_A bem mais usual (acreditada a [Czelakowski, 1980], e utilizada em [Blok – Pigozzi, 1989]) vem dada a seguir.

[11] Podemos testar isto porque M interpreta a assinatura C.

Definição 1.3.3 *Dada uma assinatura* C *e uma* C*-matriz* $M = (\mathbf{A}, D)$*, e* Θ *uma congruência em* A [12]. *Dizemos que* Θ **é compatível com** D *se, sempre que* $a \in D$ *e* $(a, b) \in \Theta$*, temos que* $b \in D$. □

Teorema 1.3.4 *Para qualquer álgebra* $\mathbf{A}$ *e qualquer conjunto* $D \subseteq A$*, a relação de Leibniz* $\Omega_{\mathbf{A}} D$ *é a maior (no sentido da inclusão) congruência em* $\mathbf{A}$*, compatível com* D*.*

Demonstração: Ver, por exemplo, [Czelakowski, 2001]. ■

Um fato importante será necessário notar aqui: tanto a relação quanto o Operador de Leibniz dependem de uma álgebra determinada. Então, parece ser interessante estudar o que acontecerá quando dita álgebra seja *uma linguagem proposicional*. Mais ainda: dada uma lógica, muitas das suas propriedades podem ser especificadas a partir do comportamento do operador de Leibniz *aplicado às teorias de* $\mathcal{L}$*, entendidas como subconjuntos de* $L(C_{\mathcal{L}})$. É exatamente disso que tratam as três últimas seções deste capítulo; nelas serão estudadas as propriedades de protoalgebrizabilidade, equivalencialidade e algebrizabilidade, expressas por meio do operador $\Omega_{L(C_{\mathcal{L}})}$. Para tal fim, e com o objetivo de simplificar a notação, quando não houver risco de confusão este último operador será denotado simplesmente por Ω. Começaremos nosso estudo das categorias de lógicas mencionadas com a mais simples delas: a categoria de lógicas protoalgébricas.

1.4 Lógicas Protoalgébricas

Antes de começar a nossa exposição indicaremos que doravante a expressão "lógica" indicará "lógica padrão". Assim, somente trataremos com este tipo de lógicas, por razões que indicaremos daqui a pouco.

A idéia que motiva a definição das lógicas protoalgébricas (aparecida por primeira vez em [Blok – Pigozzi, 1986]), poderia talvez ser expressa informalmente do seguinte modo: consideremos o *Teorema da Equivalência* da Lógica Proposicional Clássica LPC. O mencionado teorema pode ser expresso da seguinte maneira (cf. [Mendelson, 1964]): se $\Gamma \vdash_{LPC} \alpha \leftrightarrow \beta$ então $\Gamma \vdash_{LPC} \varphi(\alpha) \leftrightarrow \varphi(\beta)$ para toda fórmula $\varphi(p)$ dependendo de uma única variável p como máximo. Dado que pelo Teorema da Dedução a primeira expressão pode ser convertida em $\Gamma, \alpha \vdash_{LPC} \beta$ e $\Gamma, \beta \vdash_{LPC} \alpha$, temos que o Teorema da Equivalência quer dizer o seguinte: se α e β são mutuamente deriváveis (em relação a certo conjunto Γ), então a relação $\vdash_{LPC}$ não pode distinguir entre eles quando são considerados como sub-fórmulas de uma fórmula

[12]Tanto a definição de congruência quanto a de outras noções algébricas no presentes no texto principal pode ser achada no apêndice no final da tese.

complexa. De esta forma, o Teorema da Equivalência diz que a derivabilidade "global" (isto é, para qualquer $\Gamma \subseteq L(C)$) entre α e β implica que tais fórmulas são inter-substitutíveis globalmente. *O conceito de Lógica Protoalgébrica diz a expressão recíproca e, além disso, localizada em conjuntos* Γ. Isto é, se certas fórmulas podem ser consideradas substituíveis mutuamente (em relação a certo Γ), então deve uma ser conseqüência da outra e vice-versa, relativas ao mesmo Γ [13]. Formalmente:

Definição 1.4.1 *Dada uma lógica* $\mathcal{L}$*, un conjunto* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq L(C_{\mathcal{L}})$*, dizemos que* α *e* β *são* **Γ-indiscerníveis** *se e somente se, para toda* $\phi \in L(C_{\mathcal{L}})$*, toda variável* p *ocorrendo em* ϕ *vale;* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \phi(p/\alpha)$ *sse* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \phi(p/\beta)$*. Por outro lado,* α *e* β *são* **Γ-interderiváveis** *se e somente se vale, para todo* ψ*:* $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ *se e somente se* $\Gamma, \beta \vdash_{\mathcal{L}} \psi$*. Nestas definições, no caso em que* $\Gamma = \emptyset$*, diremos simplesmente que* α *e* β *são indiscerníveis (interderiváveis).*

Finalmente, dizemos que $\mathcal{L}$ **é protoalgébrica** *se, para toda Teoria* $T \subseteq Th_{\mathcal{L}}$*, para todo par* α*,* β *de fórmulas de* $L(C_{\mathcal{L}})$*, vale que se* α*,* β *são* T*-indiscerníveis, então são* T*-interderiváveis.*
$\Box$

Notemos aqui o seguinte: uma lógica protoalgébrica pode dar uma noção de equivalência (relativa a cada Γ) entre fórmulas, mas esta noção é metalingüística (pois é expressa em termos de $\vdash_{\mathcal{L}}$). Quando tal conceito possa ser expressado *dentro da linguagem* $L(C_{\mathcal{L}})$ é que estaremos na presença das chamadas "lógicas equivalenciais", o nosso objeto de estudo da próxima seção. Mas antes de estudar tais lógicas veremos um resultado essencial: a conexão entre a definição das lógicas protoalgébricas e o Operador de Leibniz (restrito a teorias das lógicas em questão). Tal resultado aparece em [Blok – Pigozzi, 1986] pela primeira vez. Formalmente:

Teorema 1.4.2 [Blok-Pigozzi]: Seja $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ uma lógica, e seja o Operador de Leibniz Ω relativo à algebra $L(C_{\mathcal{L}})$. Então as seguintes condições são equivalentes:
(i) $\mathcal{L}$ é protoalgébrica.
(ii) Para todo par T_1, T_2 de $\mathcal{L}$-teorias, se $T_1 \subseteq T_2$ então $\Omega(T_1) \subseteq \Omega(T_2)$ (isto é, Ω é monótono em relação a elementos de $Th_{\mathcal{L}}$).
(iii) Para toda família arbitrária $\{T_i\}_{i \in I}$ de teorias de $\mathcal{L}$, $\Omega(\bigcap\{T_i\}_{i\in I}) = \bigcap\{\Omega(T_i)\}_{i\in I}$. (Ou seja, Ω é contínuo para ínfimos de $\mathbf{Th}_{\mathcal{L}}$).

O resultado anterior é chave: o Operador de Leibniz pode caracterizar certas propriedades das lógicas protoalgébricas. Mais ainda, pode caracterizar outras propriedades além da protoalgebrizabilidade. Este fato pode ser útil, como veremos, para expressar morfismos (e portanto para estudar fibrilação categorial) em lógicas algébricas. O que queremos dizer

[13] Deve ser notado que a recíproca do Teorema da Equivalência também vale em LPC, e portanto também a sua versão local. Portanto, LPC será uma lógica protoalgébrica.

aqui, e que será aprofundado no próximo capítulo, é o seguinte: podemos tentar definir morfismos entre lógicas protoalgébricas como funções que preservam a sua definição original. Mas também podemos caracterizar tais morfismos como sendo funções que preservam as propriedades dos operadores Ω associados. Daí a importância do Teorema 1.4.2.

Uma outra caracterização diferente da fornecida no teorema anterior será mencionada aqui: tem a ver estritamente com as propriedades de $\vdash_{\mathcal{L}}$ e foi dada no artigo previamente mencionado.

Teorema 1.4.3 *Uma lógica é protoalgébrica se e somente se existe um conjunto (possivelmente infinito)* $PR(p_1, p_2)$ [14]$= \{\phi_i(p_1, p_2)\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{L}(C_{\mathcal{L}})$ *tal que valida:*
(R) $\vdash_{\mathcal{L}} \phi_i(p_1, p_1)$ *para todo* $\phi_i \in PR(p_1, p_2)$*.*
(MP) $p_1, PR(p_1, p_2) \vdash_{\mathcal{L}} p_2$*.*

Demonstração: Ver, por exemplo, [Czelakowski, 2001]. ■

Observação 1.4.4

A partir deste último teorema, podemos notar alguns casos extremos de lógicas protoalgébricas. Estes acontecem quando $PR(p_1, p_2)$ na verdade depende de uma única variável, isto é, $PR = PR(p_1, p_1)$. Neste caso, (MP) é expresso como $p_1, PR(p_1, p_1) \vdash_{\mathcal{L}} p_2$. Ou seja, que a presença do conjunto PR junto com qualquer variável de $\mathcal{V}$ nas premissas trivializa o sistema. Um outro caso digno de menção é quando $PR = \emptyset$. Aqui, (R) e (MP) são reduzidos à condição $p_1 \vdash_{\mathcal{L}} p_2$. Portanto, toda lógica trivial (relativa a $L(C)$) [15] é protoalgébrica com $PR = \emptyset$. □

1.5 Lógicas Equivalenciais

Como já foi indicado na seção anterior, as lógicas equivalenciales podem expressar, dentro da sua própria linguagem formal, a relação de equivalência existente nas lógicas protoalgébricas por causa da sua inter-derivabilidade. Foram definidas pela primeira vez em [Prucnal – Wrónski, 1974], e estudadas por muitos autores. Citemos a [Czelakowski, 1981], [Herrmann, 1996] e [Herrmann, 1997] fundamentalmente. Podem ser definidas assim:

[14] O conjunto $PR(p_1, p_2)$ às vezes pode ser denotado como $p_1 PR p_2$

[15] Uma lógica $\mathcal{L}$ é *trivial* quando, para todo par de variáveis p e q, $p \vdash_{\mathcal{L}} q$. Notemos que existem duas lógicas triviais, cf. foi observado em [Herrmann, 1996]: uma lógica sem teoremas ($Cn(\emptyset) = \emptyset$)e outra em que $Cn(\emptyset) = L(C_{\mathcal{L}})$.

Definição 1.5.1 *Seja a lógica* $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$. *O conjunto* $\Delta(p_1, p_2) = \{\Delta^i(p_1, p_2)\}_{i \in I} \subseteq L(C_{\mathcal{L}})$ *é uma* **equivalência em** $\mathcal{L}$ *se e somente se verificam as três condições seguintes:*
(i) $\vdash_{\mathcal{L}} \Delta^i(p_1, p_1)$, *para todo* $i \in I$.
(ii) $p_1, \Delta(p_1, p_2) \vdash_{\mathcal{L}} p_2$.
(iii) Para todo conectivo $w \in C^k$, *para as variáveis* $p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_k$, *verifica-se:*
$\Delta(p_1, q_1), \ldots, \Delta(p_n, q_n) \vdash_{\mathcal{L}} \Delta^i(w(p_1, \ldots, p_n), w(q_1, \ldots, q_n))$, *para todo* $i \in I$.
Uma lógica $\mathcal{L}$ *é* **equivalencial** *se possui pelo menos uma equivalência* Δ. $\mathcal{L}$ *é* **finitamente equivalencial** *se possui alguma equivalência finita* [16]. □

Observação 1.5.2

O nome equivalencial das lógicas em questão surge do fato de que elas acabam verificando, além das propriedades indicadas [17]:

(S) $\Delta(p_1, p_2) \vdash_{\mathcal{L}} \Delta(p_2, p_1)$

(T) $\Delta(p_1, p_2), \Delta(p_2, p_3) \vdash_{\mathcal{L}} \Delta(p_1, p_3)$.

Analogamente aos protoalgebrizadores, dado que toda equivalência Δ é um conjunto de fórmulas com duas variáveis, escreveremos indistintamente $\Delta(p_1, p_2)$ ou $p_1 \Delta p_2$. □

Notemos que, por causa de (i) e (ii), toda lógica equivalencial é protoalgébrica. A propriedade (iii) estabelece, por sua vez, que as equivalências Δ determinam uma congruência em $L(C_{\mathcal{L}})$. De fato, na literatura são também chamadas de *lógicas congruenciales* (ver por exemplo [Zanardo et al., 2001]). Vejamos, por otro lado, o seguinte resultado, o qual terá aplicações futuras.

Proposição 1.5.3 *Seja* $\mathcal{L}$ *uma lógica equivalencial, e sejam* $\Delta_1(p_1, p_2)$, $\Delta_2(p_1, p_2)$ *duas equivalências em* $\mathcal{L}$. *Então elas são inter-deriváveis. Isto é,* $\Delta_1(p_1, p_2) \dashv\vdash_{\mathcal{L}} \Delta_2(p_1, p_2)$.

Demonstração: Notemos primeiramente a seguinte propriedade de qualquer equivalência Δ de qualquer lógica equivalencial $\mathcal{L}$: da Definição 1.5.1, (iii), se $\phi(p_1, \ldots, p_k) \in L(C_{\mathcal{L}})$, vale $p_1 \Delta p_2 \vdash_{\mathcal{L}} \phi \Delta \widehat{\sigma}(\phi)$, onde $\sigma(p_1) = p_2$, e $\sigma(p_i) = p_i$ para todo $i \geq 1$. Seja agora a fórmula $p_1 {\Delta_2}^i p_2 \in \Delta_2$. Como Δ_1 é uma equivalência, então temos $p_1 \Delta_1 p_2 \vdash_{\mathcal{L}} (p_1 {\Delta_2}^i p_2) \Delta_1 (p_2 {\Delta_2}^i p_2)$. Como Δ_1 também valida (MP), e vale $\vdash_{\mathcal{L}} (p_2 {\Delta_2}^i p_2)$, temos que $(p_1 {\Delta_2}^i p_2) \Delta_1 (p_2 {\Delta_2}^i p_2) \vdash_{\mathcal{L}} p_1 {\Delta_2}^i p_2$. Da transitividade de Δ_1 temos

$$p_1 \Delta_1 p_2 \vdash_{\mathcal{L}} p_1 {\Delta_2}^i p_2$$

[16] Similarmente ao caso das lógicas protoalgébricas, neste texto trabalharemos exclusivamente com lógicas finitamente equivalenciais.

[17] Lembrar o significado da expressão geral $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \Sigma$, cf. Notação 1.1.11.

para todo $p_1\Delta_2{}^i p_2 \in \Delta_2$. Ou seja, $p_1\Delta_1 p_2 \vdash_{\mathcal{L}} p_1\Delta_2 p_2$. Analogamente para o caso contrário. ■

A seguir aparece a caracterização das lógicas equivalenciais por meio do operador Ω. A mesma foi provada em [Herrmann, 1997].

Teorema 1.5.4 [Herrmann]: Dada uma lógica $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ as seguintes condições são equivalentes:
(i) $\mathcal{L}$ é equivalencial.
(ii) O operador Ω aplicado a $Th_{\mathcal{L}}$ é monótono e comuta com substituições inversas (isto é: para toda substituição $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow L(C_{\mathcal{L}})$, $\widehat{\sigma}^{-1}(\Omega(T)) = \Omega(\widehat{\sigma}^{-1}(T))$, para toda teoria $T \in Th_{\mathcal{L}}$).
(iii) Ω é monótono em $Th_{\mathcal{L}}$ e $\widehat{\sigma}(\Omega(T)) \subseteq \Omega(Cn_{\mathcal{L}}(\sigma(T)))$, para toda teoria T e toda substituição $\widehat{\sigma}$ de $L(C_{\mathcal{L}})$.

Desta forma, as lógicas equivalenciais são caracterizadas internamente de duas formas: a partir da existência de alguma equivalência Δ, ou a partir das propriedades do operador Ω mencionadas no teorema anterior.

1.6 Lógicas Algebrizáveis

Nesta seção veremos as últimas lógicas da Hierarquia de Leibniz estudadas aqui, as quais são as lógicas algebrizáveis. Dado que este tipo de lógica é em certa forma o mais importante dos mencionados (tanto histórica como conceitualmente), introduziremos aqui um breve histórico da sua definição. O problema de caracterizar tal definição pode ser considerado como a motivação fundamental da Lógica Algébrica Abstrata. Nosso resumo não será exaustivo. Recomendamos ver a dissertação de mestrado de J. Bueno ([Bueno, 2004]) para um estudo histórico bem mais detalhado.

Os primeiros trabalhos que estabelecem uma relação suscetível de ser generalizada entre lógicas proposicionais e determinadas classes de álgebras são [Tarski, 1935a] e [Tarski, 1935b], devidos a A. Tarski. Neles é definida uma classe de álgebras (denominadas "álgebras de Boole" pelo próprio Tarski), e é indicado que tal classe de álgebras fornece uma semântica fortemente correta e completa para o a lógica proposicional clássica (LPC). Uma das características marcantes da exposição de tais artigos é que se menciona o fato de que a própria linguagem da lógica é uma álgebra. Esse fato posteriormente levou a que se introduzisse uma técnica que foi generalizada a outras lógicas proposicionais, como se verá nesta mesma seção. Baseados em [Rasiowa – Sikorski, 1970], reproduziremos sinteticamente tais resultados.

Definição 1.6.1 *Dado um reticulado* $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge \rangle$ *(sendo* $\vee$ *e* $\wedge$ *supremo e infímo respectivamente), um conjunto* $\Delta \subseteq L$ *é um* **ideal** *de* $\mathbf{L}$ *se e somente se verifica:*

$a \vee b \in \Delta$ se e somente se $a \in \Delta$ e $b \in \Delta$.
Equivalentemente, podemos dizer que Δ é um ideal de **L** *se verifica:*
a) Se $a,\, b \in \Delta$ então $a \vee b \in \Delta$
b) Se $a \leq b$ e $b \in \Delta$, então $a \in \Delta$. □

Definição 1.6.2 *Dado $a_0 \in L$, definimos o* **ideal principal gerado por** *a_0, como sendo $\Delta_0 := \{x : x \leq a_o\}$. Um ideal maximal é um ideal $\Delta \neq L$ tal que não é contido propriamente em nenhum ideal diferente de L.* □

O seguinte teorema fornece alguns resultados relativos a ideais que precisaremos:

Proposição 1.6.3 *Dado um reticulado $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$, se L tem primeiro elemento 1, então, para todo elemento $a_0 \neq 1$ existe um ideal maximal Δ tal que $a_0 \in \Delta$.*

Definição 1.6.4 *Uma álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, -, 1, 0 \rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$* [18] *é uma álgebra de Boole se verifica:*
A *é um reticulado distributivo, com primeiro e último elemento (0 e 1 respectivamente) e complementado. Isto é, verifica:*

(Dist) (a) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; (b) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(Comp) (a)$x \vee -x = 1$; (b)$x \wedge -x = 0$ (todo elemento tem complemento).

Denotaremos à classe das álgebras de Boole por **BA**. *Por outro lado, definimos a operação binária $\rightarrow$ em* **A** *da seguinte forma: $a \rightarrow b := -a \vee b$.* □

Observação 1.6.5

É fácil ver que o conjunto $\mathbf{2} = \langle \{1, 0\}, \sqcup, \sqcap, -, 1, 0 \rangle$, com as funções definidas pelas tabelas de verdade da lógica clássica, é uma álgebra de Boole. □

Definição 1.6.6 *Dados uma álgebra de Boole $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, -, 1, 0 \rangle$ e um ideal Δ de* **A**, *definimos a relação $\leq_\Delta$ entre elementos de A como: $a \leq_\Delta b$ sse $a \wedge \neg b \in \Delta$.* □

É facil ver que $\leq_\Delta$ é uma pré-ordem em **A**.

[18] A nomenclatura de "tipos algébricos" é a mais usual dentro da álgebra universal para indicar a aridade das operações. Em relação à nomenclatura "de assinaturas", utilizada neste texto, baste dizer que podem ser inter-definidas. Assim, neste caso, estamos indicando que **A** é uma $L(C)$-álgebra, com $C^0 = \{1, 0\}$, $C^1 = \{-\}$ e $C^2 = \{\vee, \wedge\}$.

Definição 1.6.7 *Dada uma pré-ordem $\leq_\Delta$ em uma álgebra de Boole* **A***, induzida por um ideal Δ, definimos a relação binária $\equiv_\Delta$ em A como:*
$a \equiv_\Delta b$ se e somente se $a \leq_\Delta b$ e $b \leq_\Delta a$. □

A relação $\equiv_\Delta$ é uma relação de equivalência em **A**. denotaremos o conjunto A/Δ como o conjunto das classes de equivalência induzidas por $\equiv_\Delta$. Notemos que a pré-ordem natural induzida por $\leq_\Delta$ em A/Δ (e que será denotada da mesma forma) é uma ordem parcial. No caso em que $\Delta = \{0\}$, a relação $\equiv_\Delta$ será denotada simplesmente por $\equiv$.

Proposição 1.6.8 *Si Δ é um ideal maximal da álgebra de Boole* **A***, então o conjunto A/Δ é isomorfo à álgebra de Boole* **2**.

Proposição 1.6.9 *Em toda álgebra de Boole* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, 1, 0\rangle$*, a relação $\equiv_\Delta$, definida a partir de um ideal Δ é uma congruência em A.*

Definição 1.6.10 *A* **assinatura proposicional clássica** *é $C_{LPC} = \{\wedge, \vee, -, \rightarrow\}$. A* **linguagem proposicional clássica** *é $L(C_{LPC})$.* □

Proposição 1.6.11 *Consideremos a assinatura proposicional clássica $C_{LPC} = \{\vee, \wedge, \neg \rightarrow\}$, e o operador $\vdash$ definido a partir da axiomática de tipo Hilbert:*
$T1 : (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$
$T2 : \phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$
$T3 : \psi \rightarrow (\phi \vee \psi)$
$T4 : (\phi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \theta))$
$T5 : (\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$
$T6 : (\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
$T7 : (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \theta) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \theta)))$
$T8 : (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \theta)$
$T9 : ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \theta) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta))$
$T10 : (\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi$
$T11 : (\phi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)) \rightarrow \neg\phi$
$T12 : \phi \vee \neg\phi$.

A única regra de inferência é (MP). Definamos a relação de equivalência $\equiv$ entre fórmulas de $L(C_{LPC})$: $\alpha \equiv \beta$ se e somente se $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. Então verifica-se que $L(C_{LPC})/\equiv$ é uma álgebra de Boole, onde as suas operações estão definidas por:
$\vee\{||\phi||, ||\psi||\} = ||\phi \vee \psi||$;
$\wedge\{||\phi||, ||\psi\}|| = ||\phi \wedge \psi||$;
$-||\phi|| = ||\neg\phi||$;
$1 = ||\phi \rightarrow \phi||$ *e finalmente* $0 = ||\phi \wedge \neg\phi||$.
Tal álgebra de Boole será denominada a **álgebra de Lindenbaum de** *LPC.*

Definição 1.6.12 *Dada uma álgebra de Boole* **A** *qualquer, definimos uma* **valoração em A** *como sendo um homomorfismo* $v : L(C_{LPC}) \longrightarrow \mathbf{A}$. *Um caso particular de valoração é a função* $v^0 : L(C_{LPC}) \longrightarrow L(C_{LPC})/\equiv$, *definida por:* $v^0(\alpha) = ||\alpha||$ *(a classe de equivalência de* α *segundo* $\equiv$*). Tal valoração será chamada de* **valoração canônica**.
Por outro lado, dizemos que uma fórmula α *é verdadeira em* **A** *se e somente se para toda valoração* v *em* **A**, $v(\alpha) = 1$.

Um caso particular desta definição é quando a álgebra **A** *é* **2***: neste caso, as valorações em* **2** *serão chamadas de* **2***-valorações., induzindo a* **relação de conseqüência semântica** $\models_{\mathbf{2}}$ *como sendo a relação induzida pela* C_{LPC}*-matriz* $\mathbf{2} = (\{0,1\}, \{1\})$ [19]. *O conjunto* $Cn_{\mathbf{2}}(\emptyset)$ *é o conjunto de* **tautologias induzidas por 2**.

Voltando às álgebras de Boole, dizemos que a fórmula $\alpha \in L(C_{LPC})$ *é* **BA-válida** *se e somente se* α *é verdadeira em toda álgebra de Boole* **A**. $\square$

Proposição 1.6.13 *Se* $\vdash \alpha$ *(com* $\vdash$ *definida na Proposição 1.6.11), então* α *é* **BA***-válida.*

Observação 1.6.14

É fácil provar agora que $||\alpha|| = 1$ se e somente se α é **2**-tautologia. $\square$

Teorema 1.6.15 *As seguintes condições são equivalentes para toda fórmula* $\alpha \in L(C_{LPC})$*:*
a) $\vdash \alpha$.
b) α *é* **BA***-válida.*
c) $v^0(\alpha) = 1$, *sendo* v^0 *a valoração canônica em* $L(C_{LPC})/\equiv$.
d) α *é uma* **2***-tautologia.*

<u>Demonstração:</u>
a) $\Rightarrow$ *b)*: o resultado é válido pela proposição anterior.
b) $\Rightarrow$ *c)*: o resultado é válido porque pela Proposição 1.6.11 $L(C_{LPC})/\equiv$ é uma álgebra de Boole.
b) $\Rightarrow$ *d)*: trivial também, considerando que **2** é uma álgebra de Boole.
c) $\Rightarrow$ *a)*: da definição de v_0, temos que $v^0(\alpha) = ||\alpha||$. Logo $||\alpha|| = 1$, da hipótese. Pela definição de $L(C_{LPC})/\equiv$, $\alpha \in Cn_{\models}(\emptyset)$.

Agora somente precisamos provar *d)* $\Rightarrow$ *a)*: a prova sera feita por contrapositiva. Se *a)* não valer (isto é, $\alpha \notin Cn_{\vdash}(\emptyset)$), temos que (em $L(C_{LPC})/\equiv$), $||\alpha|| \neq 1$ (pois já provamos que *a)* é equivalente a *c)*). Das Proposições 1.6.3 e 1.6.8 existe um ideal maximal Δ em $L(C_{LPC})/\equiv$ tal que $||\alpha|| \in \Delta$. Seja h o isomorfismo induzido por Δ; $h : L(C_{LPC})/\equiv \longrightarrow \mathbf{2}$ (ver a Proposição 1.6.8). Temos agora que $h(||\alpha||) = 0$. Como a função $v{:=}h \circ v^0$ é uma

[19]Lembrar aqui o nosso abuso na notação, identificando uma álgebra com seu domínio.

2-valoração para α (pois a composição de homomorfismos é homomorfismo), temos que $v(\alpha)$ = 0. Logo, α não pode ser tautologia. ■

Notemos a importância da caracterização de $L(C_{LPC})/\equiv$ como uma álgebra de Boole; com efeito, é esta caracterização a que serve como "ponte" entre as condições *b*) e *d*), que é o verdadeiro resultado procurado.

O método utilizado na prova do Teorema 1.6.15 será mencionado doravante como "método de Lindenbaum-Tarski" [20]. Além da sua aplicação na lógica clássica, este método foi posteriormente utilizado para fornecer semânticas algébricas em grande quantidade de lógicas proposicionais. Foi provado, por exemplo, que a lógica intuicionista podia ser interpretada dentro da classe das álgebras de Heyting. Além disso, foram fornecidas semânticas algébricas para as lógicas de Łukasiewicz, de Post, etc. No seguinte exemplo veremos de que maneira é possível algebrizar a lógica proposicional intuicionista (LPI), baseados em [Rasiowa – Sikorski, 1970] mais uma vez.

Exemplo 1.6.16

A lógica intuicionista $LPI = \langle\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \top, \bot\}, \vdash_{LPI}\rangle$ pode ser axiomatizada pelos mesmos axiomas da lógica proposicional clássica da Proposição 1.6.11 a exceção do axioma $T12$ (sendo a única regra de inferencia o Modus Ponens). Ora, aplicando o mesmo procedimento à álgebra de fórmulas do LPI vemos que podemos definir uma congruência tal como na Proposição 1.6.11. Considerando que a álgebra $(L(C_{LPI})/\equiv, \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \top, \bot\})$ [21] verifica:

- $(L(C_{LPI})/\equiv, \wedge, \vee, \top, \bot)$ é um reticulado com primeiro e último elemento ($\bot$ e $\top$ respectivamente).
- A relação entre $\leq$ e $\rightarrow$ é dada por:
  o último elemento $||z||$ do conjunto $X_{||\varphi||,||\psi||} = \{x \in L(C_{LPI}) : ||\varphi|| \wedge x \leq ||\psi||\}$ existe para todo par de elementos φ, ψ de $L(C_{LPI})$
- Para tal elemento $||z||$ vale que $||z|| = ||\varphi|| \rightarrow ||\psi||$, e
- $\neg||\varphi|| = ||\varphi|| \rightarrow \bot$
- Dos resultados anteriores vale que $||\varphi|| \leq ||\psi||$ se e somente se $||\varphi \rightarrow \psi|| = ||\top||$. □

[20] Como temos mencionado, o artigo em que aparece tal método é devido a A. Tarski. Porém ele é mencionado como método de Lindenbaum-Tarski pela escola polonesa de lógica porque seria A. Lindenbaum (aluno, junto com Tarski, dos seminários em Lógica Matemática dirigidos por J. Łukasiewicz) quem indicou a sua construção. Ver [Surma, 1979] para referências históricas.

[21] Em forma implícita fica claro que $C_{LPI} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$, com a aridade usual para cada conectivo.

Vejamos que podemos obter a contraparte algébrica do LPI:

Definição 1.6.17 *Se* $\mathbf{A}$=$(A, \wedge, \vee, \rightarrow, -, \top, \bot)$ *é uma álgebra do tipo* $(2, 2, 2, 1, 0, 0)$ *então dizemos que* $\mathbf{A}$ *é uma álgebra de Heyting se verifica:*
(i) $(A, \{\wedge, \vee, \bot\})$ *é um reticulado distributivo com primer elemento.*
(ii) o último elemento do conjunto $X_{a,b} = \{x \in A : x \wedge a \leq b\}$ *sempre existe, para todo par de elementos* $a, b \in A$*, sendo denotado por* $a \rightarrow b$.
(iii) Pode-se definir a operação unária $-$ *em* $\mathbf{A}$ *da seguinte forma:* $-x = x \rightarrow \bot$. □

A definição de fórmula **HA**-válida é similar ao caso das álgebras de Boole.

Teorema 1.6.18 *Para toda fórmula* φ *de* $L(C_{LPI})$ *são equivalentes:*
(a) φ *é teorema do* IPC *(ou seja,* $\vdash_{LPI} \varphi$*).*
(b) $v_0(\varphi) = \top$
(c) φ *é* **HA**-*válida.*

Observação 1.6.19

Indicaremos a seguir algumas das características comuns às lógicas algebrizáveis pelo método de Lindenbaum-Tarski , com o objetivo de procurar entender a intuição por trás das definições a serem apresentadas logo a seguir. Tais definições tentam generalizar o método de Lindenbaum - Tarski e fornecer uma teoria geral da algebrização. Consideramos como características relevantes:

(a) As lógicas que puderam ser algebrizadas com este método são as lógicas padrão (daí a importância dada a elas neste texto).

(b) Existe um conectivo binário $\rightarrow$ em $C_{\mathcal{L}}$ tal que define uma relação de equivalência $\equiv$ em $L(C_{\mathcal{L}})$:

$$(\alpha, \beta) \in \equiv \text{ se e somente se } \vdash_{\mathcal{L}} (\alpha \rightarrow \beta) \text{ e } \vdash_{\mathcal{L}} (\beta \rightarrow \alpha)$$

tal que $\equiv$ é uma **congruência na álgebra** $L(C_{\mathcal{L}})$

Além disso, a álgebra $L(C_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{K}$, sendo $\mathcal{K}$ a classe de álgebras associada a $\mathcal{L}$.

(c) Podemos "traduzir" $\mathcal{L}$ numa classe $\mathcal{K}$ de $C_{\mathcal{L}}$-álgebras da seguinte forma:

- Os conectivos k-ários de ${C_{\mathcal{L}}}^k$ são entendidos como funções k-árias nas álgebras $\mathbf{A}$ de $\mathcal{K}$

– As fórmulas de $L(C_{\mathcal{L}})$ são termos na linguagem (de primeira ordem) de $\mathcal{K}$
– Certas formulações metalógicas de $\mathcal{L}$ podem ser entendidas como formulações de primeira ordem sobre $\mathcal{K}$ onde:
    ∗ Não é considerado outro predicado fora de $\approx$
    ∗ $\mathcal{K}$ é axiomativável por equações ou por aplicações dos conectivos proposicionais em equações.
– *Em geral* tem sido possível axiomatizar as classes $\mathcal{K}$ equacionalmente. Isto é, as classes $\mathcal{K}$ são *variedades.*
– Porém, notemos que uma abordagem mais intuitiva é axiomatizar a $\mathcal{K}$ por fórmulas do tipo $(\varphi_1 \approx \psi_1) \mathbin{\bar{\wedge}} \cdots \mathbin{\bar{\wedge}} (\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow (\varphi_0 \approx \psi_0)$ (ou seja, *quase-equações* [22]).

Estudaremos a relação entre algebrizabilidade e lógica equacional no Capítulo 4. □

Exemplo 1.6.20

As álgebras de Boole podem ser axiomatizadas por equações como:
(**BA1**) (a) $x \vee y \approx y \vee x$; (b) $x \wedge y \approx y \wedge x$
(**BA2**) (a) $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$: (b) $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$
(**BA3**) (a) $x \vee x \approx x$; (b) $x \wedge x \approx x$
(**BA4**) (a) $x \vee (y \wedge x) \approx x$; (b)$x \wedge (y \vee x) \approx x$
(**BA5**) (a) $x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; (b) $x \vee (y \wedge z) \approx (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
(**BA6**) $x \vee -x \approx \top$; (b)$x \wedge -x \approx \bot$ □

Observação 1.6.21

Uma axiomatização das álgebras de Boole por quase-equações pode ser dada por:
(**BA′1**) $x \to (y \to x) \approx \top$
(**BA′2**) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \approx \top$
(**BA′3**) $(\neg x \to \neg y) \to ((\neg x \to y) \to x) \approx \top$
(**BA′4**) $(x \approx \top) \mathbin{\bar{\wedge}} (x \to y \approx \top) \Rightarrow (y \approx \top)$ (Essa é a axiomatização natural das semânticas algébricas segundo Blok-Pigozzi, conforme veremos na seção seguinte.) □

Como temos mencionado, o desenvolvimento posterior à aparição do método Lindenbaum-Tarski na literatura foi concentrado na aplicação do mesmo a diferentes cálculos proposicionais. Já no ano 1974 foi publicado por H. Rasiowa o livro “An Algebraic Approach to

[22] As definições formais de equações e de quase-equações serão feitas no fim da seção. Indicaremos somente que os conectivos $\Rightarrow$ e $\bar{\wedge}$ são entendidos como a implicação e a conjunção da lógica de primeira ordem.

Non-Classical Logics", procurando dar um marco geral aos resultados obtidos até então. Nele, a autora define uma classe de lógicas (aqui denominada **SIC** [23]), que inclui grande parte das lógicas que tinham sido algebrizadas por diversos autores. Mesmo sem ter dado uma definição abstrata do processo de algebrização, tal livro pode ser considerado como um antecedente importante dos estudos atuais da Lógica Algébrica Abstrata. Daremos a seguir a definição das lógicas membros de dita classe, pois serão úteis em diversos exemplos.

Definição 1.6.22 *As lógicas* $\mathcal{L}$ *de* **SIC** *são caracterizadas por (cf.* [Rasiowa, 1974]):

(1) O conjunto de axiomas é fechado por substituições.
(2) As regras de inferência são invariantes por substituições.
(3) Existe um conectivo $\rightarrow$ tal que $\varphi\rightarrow\varphi$ é $\mathcal{L}$-teorema (para toda fórmula $\varphi \in L(C_{\mathcal{L}})$).
(4) Se $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ e $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi\rightarrow\psi$ então $\vdash_{\mathcal{L}} \psi$
(5) Se $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi\rightarrow\psi$ e $\vdash_{\mathcal{L}} \psi\rightarrow\theta$ então $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi\rightarrow\theta$
(6) Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi\rightarrow\varphi$ para toda fórmula ψ
(7) A relação $\varphi \equiv \psi$ definida por $\varphi\rightarrow\psi$ e $\psi\rightarrow\varphi$ é uma congruência. □

As lógicas de **SIC** incluem:

- O cálculo clássico LPC
- O cálculo intuicionista LPI
- O fragmento implicativo do LPI (cálculo implicativo positivo)
- As lógicas construtivas com negação forte (Lógicas de Nelson)
- As lógicas modais normais $S4$ e $S5$ (e em geral toda lógica normal)
- As lógicas de Łukasiewicz e de Post.

Como exemplo de lógicas que não pertencem a SIC, podemos mencionar as lógicas paraconsistentes C_n de Da Costa, assim como muitas das lógicas da relevância.

No que foi exposto anteriormente é importante notar que não existe uma definição **geral** do que significa ser "uma lógica algebrizável". Além disso, a definição anterior depende da existência de um conectivo especial ($\rightarrow$) para caracterizar as propriedades das lógicas (incluindo a caracterização da álgebra canônica).

Já no final dos anos 80 e inícios dos 90 começaram a aparecer na literatura diversas tentativas de dar uma teoria de algebrizabilidade (entre outros, [Blok – Pigozzi, 1989], [Németi – Andréka, 1994], [Font – Jansana, 1994], etc.). Todos estes textos configuram a

[23] Do inglês, "**s**entential (extensional) **i**mplicative **c**alculus".

primeira fase do que hoje é chamada Lógica Algébrica Abstrata. Dentro desta linha, uma das primeiras noções de algebrizabilidade (mas certamente não a única) aparece na monografia "Algebraizable Logics" de W. Blok e D. Pigozzi, publicada em 1989. A noção de algebrizabilidade de mencionado trabalho, que será apresentada a seguir, será com a que trabalharemos nesta tese. Para chegar até ela precisamos definir previamente linguagens equacionais.

Definição 1.6.23 *Dada uma C-álgebra, todo homomorfismo $\overline{I} : L(C) \longrightarrow \mathbf{A}$ é* **uma interpretação das fórmulas na álgebra A**. *Denotaremos a $\overline{I}(\alpha)$ em $\mathbf{A}$ por $\alpha^{\mathbf{A}}(\overline{I})$.* □

Definição 1.6.24 *Dada uma assinatura C, a* **linguagem equacional** *$LEq(C)$é a linguagem de primeira ordem cujo conjunto de variáveis é $\mathcal{V}$; o conjunto de símbolos funcionais é o próprio C, $LEq(C)$ não contêm símbolos de predicados e os seus símbolos lógicos são $\overline{\wedge}$, $\veebar$, $\sim$, $\Rightarrow$ e $\approx$, este último representando igualdade* [24]. *Ainda quando $\approx$ é um símbolo lógico ele funciona como "símbolo de predicado binário". Desta forma, as fórmulas atômicas de $LEq(C)$ são expressões do tipo $\psi \approx \varphi$. Tais expressões são conhecidas como* **equações em** *$LEq(C)$ ou C-equações. O conjunto de C-equações será denotado por $Eq(C)$.* □

Notemos que os termos de $LEq(C)$ na verdade são simplesmente as fórmulas de $L(C)$. Esta identificação é essencial no que segue. Agora definiremos uma relação de conseqüência entre as fórmulas de $LEq(C)$.

Definição 1.6.25 *Dada $\mathcal{K}$ uma classe de C-álgebras, definimos $\models_{\mathcal{K}} \subseteq \wp(Eq(C)) \times Eq(C)$ (a* **Relação de Conseqüência Equacional em $\mathcal{K}$***) por:*
$\Lambda \models_{\mathcal{K}} \nu \approx \tau$ sse, para toda álgebra $\mathbf{A}$ de $\mathcal{K}$, e para toda interpretação $\overline{I}$ temos:
se $\xi^{\mathbf{A}}(\overline{I}) = \eta^{\mathbf{A}}(\overline{I})$ (para todo $\xi \approx \eta \in \Lambda$) então $\nu^{\mathbf{A}}(\overline{I}) = \tau^{\mathbf{A}}(\overline{I})$. □

Observação 1.6.26

Como no caso proposicional, a partir de $\models_{\mathcal{K}}$ podemos definir também um operador de conseqüência equacional $Cn_{\mathcal{K}}$ entre subconjuntos de $Eq(C)$. Podemos também definir um reticulado $\mathbf{Th}_{\mathcal{K}}$ (de **Teorias equacionais de $\mathcal{K}$**) da mesma forma que os reticulados de teorias das lógicas proposicionais. □

Além das equações, um outro tipo de fórmulas de primeira ordem tem importância no conceito de algebrizabilidade. Elas são as quase-equações, já mencionadas previamente:

[24] Aqui procedemos como nas linguagens matriciais: diferenciamos os conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$, entendidos como conectivos das lógicas proposicionais, enquanto $\sim$, $\overline{\wedge}$, $\veebar$ e $\Rightarrow$ são os conectivos utilizados na lógica equacional.

Definição 1.6.27 *Uma* **quase-equação** *(na linguagem $LEq(C)$) é uma fórmula de $LEq(C)$ da forma $\varphi_1 \approx \psi_1 \,\bar{\wedge}\, ... \,\bar{\wedge}\, \varphi_n \approx \psi_n \Rightarrow \varphi_0 \approx \psi_0$. Uma* **quase-variedade** *é uma classe $\mathcal{K}$ de álgebras axiomatizada por quase-equações.* □

Isto é, uma quase-equação é uma implicação da lógica clássica de primeira ordem, em que o antecedente é constituído por uma conjunção de equações e o conseqüente é uma única equação. Por outro lado, a expressão "ser axiomátizavel" aplicada a quase-variedades é aquela da Teoria de Modelos: ou seja, que existe um conjunto $Ax_{\mathcal{K}}$ de quase-equações tal que $Mod(Ax_{\mathcal{K}}) = \mathcal{K}$. A partir de todo o exposto até agora podemos dar a noção de algebrizabilidade [25]:

Definição 1.6.28
(a) Dada uma lógica $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, uma classe de $C_{\mathcal{L}}$-álgebras $\mathcal{K}$ é uma **semântica algébrica para $\mathcal{L}$** *se e somente se:*
existe um conjunto $(\delta, \varepsilon)_{\mathcal{L}} = \{\delta^i(p_1) \approx \varepsilon^i(p_1)\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq Eq(C_{\mathcal{L}})$ tal que (para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C_{\mathcal{L}})$, para todo $j \leq n$):
$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ se e somente se:
$\{\delta^i(\psi) \approx \varepsilon^i(\psi) : i \leq n, \psi \in \Gamma\} \models_{\mathcal{K}} \delta^j(\varphi) \approx \varepsilon^j(\varphi)$. Dito conjunto é o conjunto de **equações definidoras de $\mathcal{L}$.**.
(b) $\mathcal{K}$ é uma **semântica algébrica equivalente para $\mathcal{L}$** *se e somente se, além de (a) verifica:*
existe um conjunto $\Delta_{\mathcal{L}} = \{\Delta^j(p_1, p_2)\}_{1 \leq j \leq m} \subseteq L(C_{\mathcal{L}})$ tal que (para todo $\chi \approx \eta \in Eq(C_{\mathcal{L}})$, para $j \in \{1, \cdots, m\}$):
$\chi \approx \eta \dashv\models_{\mathcal{K}} \delta^i(\chi \Delta^j \eta) \approx \varepsilon^i(\chi \Delta^j \eta)$; $(1 \leq i \leq n)$.
(c)Uma lógica $\mathcal{L}$ **é algebrizável** *se e somente possui uma semântica equivalente $\mathcal{K}$ (também denotada em certas ocasiões por $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$). Nesse caso, o conjunto $(\delta_{\mathcal{L}}, \varepsilon_{\mathcal{L}}, \Delta_{\mathcal{L}})$ existente será chamado um* **algebrizador** *de $\mathcal{L}$.* □

Observação 1.6.29

Como tínhamos anticipado a definição anterior faz sentido, toda vez que identificamos o conjunto de termos de $LEq(C_{\mathcal{L}})$ com $L(C_{\mathcal{L}})$. Por tal motivo o conjunto da condição (a) pode ser entendido como um conjunto de equações, e daí o seu nome. Notemos, por outro lado, que existem muitas semânticas algébricas equivalentes a uma lógica determinada. Porém, pode ser provado que a *quase-variedade gerada por todas estas classes* é sempre a mesma. Ou seja, se $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ são semânticas algébricas equivalentes de uma certa lógica $\mathcal{L}_1$, vale que ${\mathcal{K}_1}^Q = {\mathcal{K}_2}^Q$. Além disso, se $\mathcal{K}$ é uma semântica algébrica equivalente para $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}^Q$ também o

[25] Tal noção é somente aplicada a lógicas padrão, como indicamos oportunamente.

é. Do que foi observado, entendemos que $\mathcal{K}^Q$ é **a única semântica equivalente associada a $\mathcal{L}$.** $\square$

Desejaríamos indicar que o conjunto $(\delta, \varepsilon)_{\mathcal{L}}$ permite "passar" de forma eficiente da lógica $\mathcal{L}$ à relação de conseqüência determinada pela classe $\mathcal{K}$. Por outro lado, o conjunto $\Delta_{\mathcal{L}}$ tem a função inversa. Portanto, dadas as propriedades de $\approx$, é fácil ver que $\Delta_{\mathcal{L}}$ é de fato uma equivalência no sentido da seção anterior. Logo, toda lógica algebrizável é finitamente equivalencial [26], dado que a equivalência $\Delta_{\mathcal{L}}$ é finita. Um fato importante que relaciona às equações definidoras e à equivalencia de $\mathcal{L}$ é indicado no resultado seguinte.

Lema 1.6.30 *Seja a lógica $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ e $\mathcal{K}$ uma semântica algébrica equivalente para $\mathcal{L}$. Então, para todo $\Lambda \subseteq Eq(C_{\mathcal{L}})$, e toda equação $\nu \approx \tau \in Eq(C)$ vale:*
(1) $\Lambda \models_{\mathcal{K}} \nu \approx \tau$ *sse* $\{\chi \Delta_{\mathcal{L}} \eta : \chi \approx \eta \in \Lambda\} \vdash_{\mathcal{L}} \nu \Delta_{\mathcal{L}} \tau$
e para toda fórmula $\varphi \in L(C_{\mathcal{L}})$ vale:
(2) $\varphi \dashv\vdash_{\mathcal{L}} \delta_{\mathcal{L}}(\varphi) \Delta_{\mathcal{L}} \varepsilon_{\mathcal{L}}(\varphi)$

Observação 1.6.31

O Lema 1.6.30 indica que, se $\mathcal{K}$ é equivalente a $\mathcal{L}$ podemos passar de $\vdash_{\mathcal{L}}$ a $\models_{\mathcal{K}}$ e vice-versa, "voltando ao ponto de partida". Notar também que o fato de uma lógica $\mathcal{L}$ possuir uma semântica algébrica não é suficiente para que $\mathcal{L}$ seja algebrizável; precisamos adicionalmente da existência de uma equivalência $\Delta_{\mathcal{L}}$. Isto é devido a que os casos paradigmáticos de lógicas algebrizáveis não somente possuem modelos algébricos senão que permitem também "falar" desses modelos dentro da própria linguagem da lógica. E isso torna-se possível a partir da equivalência existente. $\square$

O resultado anterior permite obter uma caracterização de algebrizabilidade muito utilizada na literatura.

Teorema 1.6.32 *Uma lógica $\mathcal{L}$ é algebrizável se e somente se:*
(a) $\mathcal{L}$ é equivalencial, e além disso verifica
(b) Existe um conjunto $(\delta, \varepsilon)_{\mathcal{L}}$ tal que $p \dashv\vdash_{\mathcal{L}} \delta(p) \Delta \varepsilon(p)$ para qualquer equivalência Δ de $\mathcal{L}$, para $p \in \mathcal{V}$.

Um corolário muito utilizado do teorema anterior é o seguinte:

[26] A teoria de lógicas algebrizáveis pode ser estendida a lógicas infinitamente algebrizáveis, conforme foi feito por B. Herrmann em [Herrmann, 1996], [Herrmann, 1997]. Porém, aqui trabalharemos somente o caso finito. Se nos basearmos na nomenclatura usual da Lógica Algébrica Abstrata esta seção trata na verdade de "lógicas finitamente algebrizáveis".

Corolário 1.6.33 *Seja a lógica $\mathcal{L}$; se $\mathcal{L}$ é equivalencial e adicionalmente a equivalência $\Delta_{\mathcal{L}}$ verifica:*

(i) $\{\varphi, \varphi\Delta_{\mathcal{L}}\psi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ (regra de Corte, ou Modus Ponens)

(ii) $\{\varphi, \psi\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi\Delta_{\mathcal{L}}\psi$ (regra G-de Gödel)

então $\mathcal{L}$ é algebrizável (nesse caso, o conjunto de equações $\delta_{\mathcal{L}} \approx \varepsilon_{\mathcal{L}}$ define-se por $p \approx p\Delta_{\mathcal{L}}p$).

E uma simples aplicação a tal corolário prova que as lógicas da classe SIC são todas algebrizáveis:

Corolário 1.6.34 *As lógicas da classe SIC são algebrizáveis*

Demonstração: Para todas as lógicas $\mathcal{L}$ de SIC seja $\Delta_{\mathcal{L}} := \{\alpha\to\beta, \beta\to\alpha\}$. $\Delta_{\mathcal{L}}$ verifica as condições do Corolário 1.6.33. ■

Aqui é bom se perguntar de que forma pode ser provado que uma lógica *não é algebrizável*. Uma forma muito comum de demonstrar a não algebrizabilidade está baseada na seguinte caracterização:

Teorema 1.6.35 *Seja $\mathcal{L}$ uma lógica e $\mathcal{K}$ uma quasi-variedade. Então $\mathcal{K}$ é uma semântica algébrica equivalente para $\mathcal{L}$ se e somente se existe um isomorfismo $\Omega_{\mathcal{K}} : \mathbf{Th}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbf{Th}_{\mathcal{K}}$ que comuta com substituições.*

Lema 1.6.36 *Se $\mathcal{L}$ é algebrizável e $\mathcal{K}$ é a quasi-variedade equivalente a $\mathcal{L}$, então o isomorfismo do teorema anterior é expressável por (para todo $T \in Th_{\mathcal{L}}$): $\Omega_{\mathcal{K}}T = \{\varphi \approx \psi : \varphi\Delta\psi \in T\}$.*

As provas dos fatos anteriores podem ser achadas em [Blok – Pigozzi, 1989]. O que elas estão indicando obviamente é que podemos "traduzir" equivalências de $\mathcal{L}$ a equações de $LEq(C)$ de forma tal que é possível estabelecer um isomorfismo entre os reticulados de teorias respectivos. Com tais resultados vejamos o seguinte exemplo, o qual é muito interessante pois permite discriminar certas lógicas segundo a sua algebrizabilidade, ainda quando elas coincidem nos seus teoremas:

Exemplo 1.6.37

A lógica $S5^G$ ($S5$ versão de Gödel):
Axiomas:
(A1)Os teoremas de LPC
(A2) $\Box(\alpha\to\beta)\to(\Box\alpha\to\Box\beta)$
(A3) $\Box\alpha\to\alpha$

(A4) $\diamond\alpha\rightarrow\Box\diamond\alpha$
(R1) $\alpha, \alpha\rightarrow\beta \vdash \beta$
(R2) $\alpha \vdash \Box\alpha$ $\square$

Proposição 1.6.38 *$S5^G$ é algebrizável*

Demonstração: $S5^G$ é uma lógica modal normal (todas as lógicas normais são algebrizáveis pelo fato de pertencer à classe SIC.) ■

Consideremos, por outro lado, a seguinte lógica:

Exemplo 1.6.39

A lógica $S5^C$ ($S5$ versão de Carnap):
Axiomas:
(A1') $\Box\alpha$, para toda α que seja LPC-tautologia.
(A2') $\Box(\Box(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\Box\alpha\rightarrow\Box\beta))$
(A3') $\Box\alpha\rightarrow\alpha$
(A4') $\Box(\diamond\alpha\rightarrow\Box\diamond\alpha)$
(A5') $\Box(\diamond\alpha\rightarrow\Box\diamond\alpha)$
(R1) $\alpha, \alpha\rightarrow\beta \vdash \beta$ $\square$

Proposição 1.6.40 *A lógica $S5^C$ nào é algebrizável.*

Demonstração (Esquema): seja a álgebra
$\mathbf{A} = \langle\{\bot, a, b, \top\}, (\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \Box)\rangle$ onde:
$\bot < a, b < \top$, $a \neq b$, e:
$\Box(a) = \Box(b) = \Box\bot = \bot$; e $\Box(\top)$=$(\top)$. Então temos:

- Todos os teoremas de $S5^C$ são interpretados em $\top$ (logo, $\mathbf{A}$ pode "interpretar" $S5^C$).
- As únicas congruências são $A \times A$ e Id_A.
- Sejam F_1=$\{a, \top\}$; F_2=$\{b, \top\}$ **filtros em $\mathbf{A}$** [27]. Temos que: $\Omega_A(F_1) = \Omega_A(F_2)$= $Id_{\mathcal{A}}$. **Logo, Ω_A não é injetora.**
- Como A é um modelo matricial de $S5^C$, então $\Omega_{L(C_{S5^C})}$ também não é injetora, e assim $\Omega : Th_{\mathcal{L}}\longrightarrow Th_{\mathcal{K}}$ não é isomorfismo (para nenhuma classe $\mathcal{K}$), contradizendo o Teorema 1.6.35.

[27] Indicaremos simplesmente que os filtros têm, dentro das álgebras, um papel similar às teorias na lógica.

- Portanto, $S5^C$ não é algebrizável. ■

Observação 1.6.41

O exemplo dado na Proposição anterior é de grande importância para nossa pesquisa porque a técnica sugerida na prova da não algebrizabilidade de $S5^C$ já tem sido utilizada em outras lógicas conhecidas (ver por exemplo o artigo [Lewin et al., 1991], em que se prova a não algebrizabilidade da lógica paraconsistente C_1). □

Daremos a seguir um exemplo que pode nos dar uma idéia em que forma podemos estender o método usual de algebrização de Lindenbaum - Tarski. A lógica seguinte *não pode ser algebrizada segundo este método*, por causa de que o conectivo de bi-implicação nela não determina uma congruência, mas pode ser algebrizada segundo o Teorema 1.6.32.

Exemplo 1.6.42

Seja P^1 a lógica paraconsistente $P^1 = \langle C_{P^1}, \vdash_{P^1} \rangle$ (cf.[Sette, 1973]) onde:
$C_{P^1} = \{\neg, \rightarrow\}$, com $\neg \in C^1{}_{P^1}$, $\rightarrow \in C^2{}_{P^1}$.
$\vdash_{P^1}$ é uma relação de conseqüência determinada por uma única matriz (também denominada de P^1):

$$P^1 = \langle (\{T_0, T_1, F\}, \{\neg, \rightarrow\}), \{T_0, T_1, \} \rangle$$

As operações $\neg$ e $\rightarrow$ na matriz P^1 são definidas como:

	T	T_1	F
$\neg$	F	T	T

$\rightarrow$	T	T_1	F
T	T	T	F
T_1	T	T	F
F	T	T	T

□

Teorema 1.6.43 *Existe uma semântica algébrica equivalente para a lógica P^1 com fórmulas $\delta^1(p_1) := (p_1 \rightarrow p_1) \rightarrow p_1$; $\varepsilon^1(p_1) := (p_1 \rightarrow p_1)$ e:*
$\Delta^1(p_1, p_2) := (p_1 \rightarrow p_2)$
$\Delta^2(p_1, p_2) := (p_2 \rightarrow p_1)$
$\Delta^3(p_1, p_2) := (\neg p_1 \rightarrow \neg p_2)$
$\Delta^4(p_1, p_2) := (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$.

A prova do resultado anterior foi feita em [Lewin et al., 1990]. Usando o mesmo método foi possível achar um outro exemplo de lógicas algebrizáveis na lógica dual a P^1, definida por A. Sette e W. Carnielli:

Exemplo 1.6.44

Seja $I^1 = \langle L(C_{I^1}), \vdash_{I^1} \rangle$ a lógica cuja linguagem é a mesma de P^1, mas onde a relação $\vdash_{I^1}$ vem dada pela seguinte matriz, (cf.[Sette – Carnielli, 1995]):

$$I^1 = \langle \{T, F_1, F\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{T\} \rangle$$

Aqui, $\rightarrow$ e $\neg$ são definidos por :

	T	F_1	F
$\neg$	F	F	T

$\rightarrow$	T	F_1	F
T	T	F	F
F_1	T	T	T
F	T	T	T

$\square$

Teorema 1.6.45 [Sette - Carnielli]: *Existe uma semântica algébrica equivalente para I^1 com as mesmas fórmulas que no Teorema 1.6.43*

Observação 1.6.46

Baseados nos exemplos anteriores, podemos tentar entender o significado das fórmulas que "algebrizaram" tanto a P^1 como I^1, para ter um conhecimento mais profundo da motivação dos algebrizadores $(\delta_{\mathcal{L}}, \varepsilon_{\mathcal{L}}, \Delta_{\mathcal{L}})$:

- δ^1 discrimina os valores de verdade em "distingüidos e não distingüidos".
- ε^1 é o valor "clássicamente verdadeiro".
- O conjunto de fórmulas $\Delta_{\mathcal{L}}$ considera às fórmulas α e β como equivalentes sse "têm a mesma tabela de verdade".

Notemos que com Δ^1 e Δ^2 não é suficiente para determinar fórmulas equivalentes. Notemos, por sua vez, que nas duas lógicas o algebrizador definido é o mesmo [28]. $\square$

Observemos que o procedimento indicado para algebrizar P^1 como I^1 pode facilmente ser estendido à hierarquia que generaliza as lógicas antes mencionadas:

[28] Na verdade, este fato não deveria nos surprender. Tanto a lógica clássica LPC como a intuicionista LPI são algebrizadas pelo método de Lindenbaum-Tarski a partir de uma mesma congruência entre fórmulas: $\alpha \equiv \beta$ se e somente se $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. A definição da congruência em ambas lógicas é a mesma, mas as classes de álgebras obtidas são obviamente diferentes.

Exemplo 1.6.47

Consideremos a hieraquia de lógicas $I^nP^k = \langle L(C_{(n,k)}), \vdash_{(n,k)}\rangle$ (definida em [Fernández, 2001]), determinada pela seguinte matriz (a linguagem é a mesma que de P^1 e I^1):

$$I^nP^k = \langle(\{T, \cdots, T_k, F, \cdots F_n\}, \{\neg, \rightarrow\}), \{T, \cdots, T_k\}\rangle$$

As funções associadas aos conectivos de I^nP^k são definidas pelas seguintes tabelas:

	F	T_i	F_r	F
$\neg$	T	T_{i-1}	F_{r-1}	T

$\rightarrow$	T	T_j	F_s	F
T	T	T	F	F
T_i	T	T	F	F
F_r	T	T	T	T
F	T	T	T	T

Com $1 \leq i, j \leq k$; $1 \leq r, s \leq n$. □

Teorema 1.6.48 *I^nP^k é algebrizável, com algebrizador $(\delta, \varepsilon, \Delta)$ em que:*
$\delta^1(p_1)$ é como nos casos anteriores:
$\varepsilon^1(p_1)$ é como nos casos anteriores:
$\Delta = \{\Delta^1, \cdots, \Delta^{max(n,k)}, \Delta^{max(n,k)+1}, \cdots, \Delta^{2max(n,k)}\}$ tal que:
$\Delta^i(p_1, p_2) = \neg^{i-1}\varphi \rightarrow \neg^{i-1}\psi$, com $1 \leq i \leq m = máx\{n, k\}$
$\Delta^{m+i}(p_1, p_2) = \neg^{i-1}\psi \rightarrow \neg^{i-1}\varphi$, com $i \leq m$

Demonstração: Os conjuntos anteriores verificam facilmente o Teorema 1.6.32. ■

Corolário 1.6.49 *Se Δ é o conjunto de fórmulas de equivalência de I^nP^k, então tanto I^sP^m como I^mP^s são algebrizáveis com o mesmo conjunto Δ, para todo $s \leq m = máx\{n, k\}$*

Uma vez temos entendido a motivação intuitiva das lógicas algebrizáveis, procederemos a caracterizá-las pelo operador de Leibniz Ω. Para tal lembremos primeiramente a definição de "conjunto dirigido", pois será precisa aqui.

Definição 1.6.50 *Dado um conjunto ordenado A=$(A, \leq)$,e $X \subseteq A$; dizemos que X é um conjunto dirigido se, para quaisquer $a, b \in X$, existe $c \in X$ tal que $a \leq c$ e $b \leq c$.* □

Teorema 1.6.51 *Dada uma lógica $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$ são equivalentes:*
(a) $\mathcal{L}$ é algebrizável.
(b) O operador de Leibniz Ω aplicado a $Th_{\mathcal{L}}$ verifica:
(b.1) Ω é monótono.
(b.2) Ω é injetor (ou seja, se $T_1 \neq T_2$, então $\Omega(T_1) \neq \Omega(T_2)$).
(b.3) Ω preserva uniões de conjuntos dirigidos em $Th_{\mathcal{L}}$: isto é, se X=$\{T_i\}_{i\in I}$ é uma familia dirigida (no sentido da inclusão) de teorias de $Th_{\mathcal{L}}$, então $\Omega(\bigcup_{i\in I}(T_i)) = \bigcup_{i\in I}(\Omega(T_i))$.

Concluímos aqui a breve caracterização das classes de lógicas a serem estudadas nesta apresentação. É claro que grande quantidade de resultados relativos a elas tem sido obviados. Além disso, a Hierarquia de Leibniz considera outras classes de lógicas fora das mencionadas (ver [Font et al., 2003]). Por exemplo as lógicas fortemente algebrizáveis (quando a semântica $\mathcal{K}$ é uma variedade), as fracamente algebrizáveis, as Fregeanas, assim como os casos "infinitarios" das lógicas trabalhadas (lógicas infinitamente equivalenciais, infinitamente algebrizáveis, e outras). No capítulo seguinte dedicaremo-nos ao estudo do outro eixo essencial em nossa pesquisa: a fibrilação de lógicas proposicionais.

Capítulo 2

C-Fibrilação de Lógicas Proposicionais

A tarefa que nos propomos neste capítulo é, exclusivamente, de fornecer um determinado tratamento formal para aquele processo de combinação entre lógicas conhecido como fibrilação. Dado que a abordagem para este processo que estudamos aqui está baseada em Teoria de Categorias, chamaremos a tal mecanismo de C-fibrilação, com o fin de diferenciá-lo de outros tratamentos ao mesmo mecanismo [1]. A primeira seção descreve a motivação para as diferentes definições de fibrilação, tal como foi sugerida pelo seu criador, D. Gabbay. Dado que esta motivação é sobretudo intuitiva, damos na segunda seção uma aproximação formal para certas lógicas apresentadas por meio de regras de inferência de tipo Hilbert. A terceira seção explica o processo de fibrilação em lógicas expressadas semanticamente.

A quarta e última seção é fundamental: baseados nas duas seções prévias, as quais podem ser formalizadas por linguagens categoriais, forneceremos o conceito de fibrilação expresso exclusivamente em tal linguagem (C-fibrilação); finalmente provaremos que a categoria $CONS$ (de lógicas entendidas como relações de conseqüência) é fechada por C-fibrilação. Mencionada categoria serve como "marco geral" para outras categorias a serem analisadas, e daí a importância dada a ela neste texto.

2.1 Motivação para a fibrilação de Lógicas

Ainda quando em muitas ocasiões os sistemas lógicos têm sido combinados para a obtenção de lógicas novas, foi na verdade nos anos 90 quando diversos pesquisadores tentaram dar

[1]Outras formas de atacar a fibrilação de Lógicas, que não dependem da Teoria de Categorias, serão analisadas no último capítulo, cf. indicamos na Introdução.

um marco geral para a combinação de lógicas. Numa análise da combinação de lógica intuicionista com lógicas com diversas modalidades (e da combinação destas entre elas mesmas), D. Gabbay introduziu o conceito de *fibrilação de lógicas*. A fibrilação de lógicas nos seus artigos (ver [Gabbay, 1996] como marco original, e o livro [Gabbay, 1999] [2]) é insistentemente mencionada como uma *metodologia*: isto é, como um procedimento, focalizado sobretudo na "combinação de semânticas de Kripke". Por causa disso, a formalização para tratar destes processos é usualmente complicada, ainda quando a sua compreensão e implementação são relativamente simples (cf. D. Gabbay, em [Gabbay, 1996], Seção 2, página 1070). Por tal motivo, nesta seção não estaremos interessados na forma dada por Gabbay ao proceso de fibrilação, mas na motivação intuitiva de tal processo. Damos aqui um esboço geral do que "deveria ser entendido por fibrilação", segundo as idéias originais. Posteriormente veremos como generalizar estas noções.

Motivação 2.1.1

A fibrilação de lógicas é um processo de combinação de lógicas que, entre outros, deveria responder aos seguintes requerimentos:

- A linguagem da "lógica resultado" da fibrilação deve ser constituída pelas linguagens das lógicas originais, a serem fibriladas. Assim, isto deveria permitir a existência de fórmulas "híbridas", constituidas dos conectivos das diferentes lógicas originais.

- A metodologia deveria ser aplicável ainda quando as lógicas originais fossem apresentadas de diferente forma.

- A lógica resultado da fibrilação deveria "conservar" as fórmulas válidas (ou, preferentemente, conseqüências válidas) das lógicas originais, levando a conta que toda fórmula original também pertence à linguagem da lógica resultado. Além da mencionada conservação de tautologias ou conseqüências, a lógica fibrilada deveria ser minimal em relação a certas propriedades, segundo o interesse que motiva a combinação.

- A fibrilação, assim obtida, deveria tornar possível estudar resultados de "transferência" entre as lógicas originais e a fibrilação delas.

Notemos que a motivação acima indicada vai conservar as tautologias (conseqüências) das lógicas originais, mas permite tautologias (conseqüências) novas, as quais estão regulamentando sobretudo o comportamento das fórmulas híbridas. Desejaríamos indicar que

[2] Mencionado livro é, de fato, uma coletânea revisada de artigos relativos à fibrilação.

os exemplos dados inicialmente não são expressos (nos artigos originais) em linguagem categorial. Tais exemplos serão fornecidos como motivação para o outro tipo de fibrilação (G-fibrilação), estudada no Capítulo 5.

A partir das sucessivos artigos de D. Gabbay, mas num tratamento cada vez mais independente, o grupo de lógica do IST de Lisboa deu definições formalmente mais rigorosas da idéia da fibrilação. Tais definições surgiram do estudo da fibrilação aplicada a certos problemas concretos em diferentes apresentações (cálculos de Hilbert, semânticas modais, entre outros). Dado que elas são o eixo da nossa definição "abstrata" de fibrilação, serão discutidas nas seções seguintes deste capítulo.

2.2 Fibrilação sintática de Lógicas

Nesta seção trabalharemos exclusivamente com lógicas tais que sua relação de conseqüência vem induzida por um conjunto finito de axiomas-esquemas e de regras de inferência de tipo Hilbert. Isto quer dizer que as lógicas são "apresentadas" mediante uma axiomática de regras esquemáticas de inferência. Transcrevemos aqui diversos resultados conhecidos no tema. Todos estes resultados são baseados em [Sernadas et al., 1999], [Caleiro, 2000] e [Zanardo et al., 2001].

Definição 2.2.1 *Dada uma assinatura C, a* **linguagem esquemática gerada por** $L(C)$ *é a álgebra livremente gerada por C sobre um conjunto enumerável Ξ (disjunto de $|C|$), tal que $\Xi \cap \mathcal{V} = \emptyset$* [3]*. Desta forma, entendemos a linguagem $L(C, \Xi)$ como sendo disjunta de $L(C)$.* □

O fato de diferenciar a linguagem "concreta" $L(C)$ (ou seja $L(C, \mathcal{V})$) de $L(C, \Xi)$ permite, em geral, trabalhar com axiomas-esquemas de um modo formal, ao invés do modo usual na literatura, em que o tratamento das linguagens esquemáticas é realizado meta-lingüisticamente. Contudo, na nossa própria abordagem (que será indicada nas próximas seções) os conjuntos de axiomas serão simplesmente fórmulas da linguagem $L(C)$. O abuso notacional, além de dar uma maior dinâmica à leitura da tese, está justificado por serem o nosso objeto de estudo as lógicas padrão (e portanto estruturais).

[3] Em [Zanardo et al., 2001], por exemplo, se considera uma única linguagem (não se distingue entre linguagem "concreta" de "esquemática"), mas o conjunto $\mathcal{V}$ é considerado como integrante de C_0. A nossa abordagem é um pouco diferente porque desejamos que o conjunto C_0 seja somente o conjunto de *certas* operações 0-árias, e não de todas as fórmulas atômicas, cf. já tínhamos indicado.

Definição 2.2.2 *Um* **Cálculo de Hilbert** *é um par* $\langle C, P\rangle$*, em que* C *é uma assinatura e* $P \subseteq \wp_{Fin}(L(C,\Xi)) \times L(C,\Xi)$*;*
Dado $r \in P$*, simbolizamos a* r *por* $r = \langle Prem(r), conc(r)\rangle$*. O conjunto* $Prem(r)$ *é o conjunto de* **premissas da regra** r*, enquanto que a fórmula* $conc(r)$ *é a* **conclusão de** r*. As regras de* P *serão chamadas de* **regras (esquemáticas) de inferência***. No caso em que* $Prem(r) = \emptyset$ *dizemos que* r *é um* **axioma esquema***.* □

A seguir veremos como os cálculos de Hilbert podem induzir relações de conseqüência em linguagens concretas.

Definição 2.2.3 *Dada uma assinatura* C *e um cálculo de Hilbert* $\langle C, P\rangle$*, uma* **instanciação da linguagem esquemática** *é uma função* $f : \Xi \longrightarrow L(C)$*. Por ser* $L(C,\Xi)$ *uma álgebra livre, fica claro que* f *pode ser estendida a uma única* $\widehat{f} : L(C,\Xi) \longrightarrow L(C)$*.*
Dada uma linguagem C *e um cálculo de Hilbert* $\langle C, P\rangle$ *a* **lógica** $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_P\rangle$ **induzida por** $\langle C, P\rangle$ *é aquela em que a relação de conseqüência* $\vdash_P$ *é definida da seguinte forma:*
$\Gamma \vdash_P \alpha$ *se existe uma seqüência finita* $(\gamma_1, ..., \gamma_m)$ *de fórmulas* $\gamma_i \in L(C)$ *tal que:*
(1)$\gamma_m = \alpha$*.*
(2) Para todo $i = 1, ..., m$*, acontece alguma das duas condições seguintes:*
(2.1) Ou $\gamma_i \in \Gamma$ *ou*
(2.2) Existe uma regra $r_i = \langle Prem(r), conc(r)\rangle$*, e uma instanciação* f_i *verificando:*
(a) $f_i(Prem(r_i)) \subseteq \{\gamma_1, ..., \gamma_{i-1}\}$ *e (b)* $f_i(conc(r_i)) = \gamma_i$*.* □

Para esclarecer um pouco as definições precedentes vejamos como a lógica clássica LPC pode ser induzida por um cálculo de Hilbert:

Exemplo 2.2.4

A lógica clássica $LPC = \langle L(C_{LPC}), \vdash_{LPC}\rangle$, sendo $C_{LPC} = \{\rightarrow, \neg\}$ e $\vdash_{LPC}$ é a relação de conseqüência induzida pelo seguinte conjunto $P = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ de regras esquemáticas (cf. [Mendelson, 1964]):
$r_1 = \langle \emptyset, \xi_1 \rightarrow (\xi_2 \rightarrow \xi_1)\rangle$
$r_2 = \langle \emptyset, (\xi_1 \rightarrow (\xi_2 \rightarrow \xi_3)) \rightarrow ((\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow (\xi_1 \rightarrow \xi_3))\rangle$
$r_3 = \langle \emptyset, (\neg\xi_1 \rightarrow \neg\xi_2) \rightarrow ((\neg\xi_1 \rightarrow \xi_2) \rightarrow \xi_1)\rangle$
$r_4 = \langle \{\xi_1, \xi_1 \rightarrow \xi_2\}, \xi_2\rangle$
As três primeiras regras são os axiomas de LPC (considerando que $\{\neg, \rightarrow\}$ é um conjunto adequado de conectivas para LPC), enquanto r_4 é a regra de Modus Ponens. □

Uma vez que temos definida a noção de lógica induzida por um conjunto de regras de tipo Hilbert, vejamos como podemos *fibrilar* duas lógicas com tais características. A noção de fibrilação, aqui, deve ser expressa utilizando a noção de cálculo de Hilbert de alguma maneira muito precisa, como veremos a seguir.

Definição 2.2.5 *Sejam* $\mathcal{L}_i = \langle C_{\mathcal{L}_i}, \vdash_{\mathcal{L}_i} \rangle$ $(i = 1, 2)$ *duas lógicas induzidas por cálculos de Hilbert* $\langle C_i, P_i \rangle$ *respectivamente. A* **fibrilação irrestrita entre** $\mathcal{L}_1$ **e** $\mathcal{L}_2$ *(denotada por* $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$*) é a lógica* $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2 = \langle C_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2}, \vdash_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2} \rangle$*, em que:*

- $C_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2} := C_1 \uplus C_2$ *(a união disjunta dos conectivos das lógicas a serem fibriladas).*
- $\vdash_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2}$ *é a lógica induzida pelo cálculo* $\langle (C_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2}, \Xi), P_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2} \rangle$*, com* $P_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2}$ *a união das regras* $P_{\mathcal{L}_1}$ *e* $P_{\mathcal{L}_2}$ [4]*.* □

Aparece aqui mais uma motivação que leva a escolher linguagens esquemáticas nas apresentações axiomáticas: as variáveis ξ_i que aparecem nas regras do conjunto $P_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2}$ podem ser *instanciadas por qualquer fórmula*: não somente por fórmulas da própria lógica à qual pertence a regra, mas também da outra lógica. E, mais ainda, por fórmulas "híbridas", constituídas por conectivos de assinaturas diferentes. Aqui pode se vislumbrar a razão pela qual esta combinação particular é chamada de "fibrilação" tal como pede a motivação intuitiva da seção anterior. Porém, antes de discutir tal fato com um pouco mais de detalhe, consideremos um outro tipo de fibrilação, a qual usualmente é denominada de *fibrilação restrita a certa família* C_0 *de conectivos.*

Definição 2.2.6 *A fibrilação de* $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$ *restrita a* C_0 *é simplesmente a lógica* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \circledast^{C_0} \mathcal{L}_2$*, induzida pela união das regras* $P_{\mathcal{L}_1} \cup P_{\mathcal{L}_2}$ *identificando aos conectivos de* C_1 *e* C_2 *que são imágens de* C_0 [5]*.* □

Notemos que a fibrilação irrestrita é simplesmente um caso particular da fibrilação restrita (quando $C_0 = \emptyset$).

O processo acima esboçado pode ser aplicado também a lógicas definidas semanticamente como veremos a continuação.

2.3 Fibrilação semântica de Lógicas: completude

Assim como é possível *fibrilar* relações de conseqüência por métodos sintáticos, os modelos semânticos são também utilizados para tal fim. Esboçaremos brevemente a forma em que

[4] Fica claro que mencionada união agora é considerada disjunta, por causa de que as linguagens também o são. Por outro lado, temos abusado um pouco da notação, identificando os conjuntos $C_{\mathcal{L}_1}$ como sendo "incluídos" na união disjunta, abuso por outro lado comum na literatura.

[5] Por causa de certos requerimentos técnicos, é conveniente considerar a todas as assinaturas a serem tratadas como disjuntas. Portanto, C_0 não está verdadeiramente contido, nem em C_1 nem em C_2. Porém, podemos identificar C_0 com um conjunto $f_i(C_0) \subseteq C_i$ $(i = 1, 2)$, e assim (sob um ponto de vista categorial) C_0 é sub-objeto das assinaturas C_1 e C_2.

podemos construir modelos semânticos novos a partir de modelos fornecidos previamente. Essencialmente, a idéia a ser utilizada é a seguinte [6]:

- As estruturas semânticas correspondentes às lógicas a serem fibriladas são entendidas como *classes* $\langle C, M, A\rangle$ *de ternas* $S = \langle U, B, v\rangle$. Aqui, U é um conjunto (de mundos), $B\subseteq\wp(U)$ e v uma valoração de conectivos a funções k-árias entre conjuntos de mundos (formalmente, $v_k : C_k\longrightarrow B^{B^k}$). As ternas S são denominadas de "modelos". Nesta notação, a terna $\langle C, M, A\rangle$ indica a assinatura C das lógicas, a classe M de "nomes de modelos", e a função $A : M\longrightarrow S$ atribui a cada nome um modelo S associado.

- Assim, a semântica de cada lógica é uma classe $\langle C, M, A\rangle$ de modelos, como acontece usualmente na lógica modal.

- Por outro lado, as relações de conseqüência induzidas pelas estruturas semânticas de cada lógica, ainda quando podem ser vistas como semânticas de mundos possíveis, podem também ser entendidas algebricamente.

- A estrutura semântica $\langle C_1 \uplus C_2, M, A\rangle$ que definirá a relação de conseqüência da fibrilação irrestrita está formada por *pares* (m, m') *de modelos* das estruturas originais, tais que coincidam no seu conjunto de mundos, e nos conjuntos B respectivos.

- Tal estrutura "avalia" fórmulas da linguagem $L(C_1 \circledast C_2)$ a partir de uma valoração v, cuja forma de avaliar um conectivo c é a mesma que a da valoração existente no modelo que avalia a lógica a cuja assinatura pertence c [7].

- No caso da estrutura relativa á fibrilação restrita a um conjunto C_0 de conectivos, ela consiste apenas de pares de modelos (m, m') nos quais (além do anterior) verifica-se: se $c \in {C^k}_0$, ${v^k}_m(c(b_1, ..., b_k)) = {v^k}_{m'}(c(b_1, ..., b_k))$.

- A condição anterior da definição dos pares (m, m') força a idéia de que o conjunto C_0 simplesmente "identifica" certos conectivos das duas lógicas envolvidas na fibrilação.

- As novas estruturas (tanto na fibrilação irrestrita quanto na restrita) "possuem menos modelos" em relação às estruturas originais. Desta forma, a lógica induzida por elas acaba sendo *extensão* das lógicas originais, pois valida mais fórmulas que estas.

[6] O formalismo utilizado para a construção de modelos "fibrilados" é bem complexo, e consideramos que não faz sentido introduzi-lo neste texto.

[7] Ou seja, $v^k(c)={v^k}_m(c)$ quando $m \in M_1$ (e análogamente para $m \in M_2$). Notar que esta definição faz sentido pelo fato de ser $C_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2}$ a união disjunta das assinaturas respectivas.

Notar que, similarmente ao caso sintático, a fibrilação irrestrita pode ser obtida a partir da definição mais geral de fibrilação restrita, simplesmente considerando $C_0 = \emptyset$.

Vemos aqui, mais uma vez, as motivações originais da metodologia da fibrilação tratadas formalmente. Aparecem, novamente, a idéia de misturar linguagens, a idéia de obter uma "menor lógica" que preserve as lógicas anteriores, e também a idéia de "preservar lógicas induzidas por estruturas semânticas" (isto é: se as lógicas originais são definidas semanticamente, a fibrilada deve poder ser definida da mesma forma). Mas aqui aparece uma nova idéia de preservação de propriedades: a noção de *preservação de completude*. A seguir discutiremos tal idéia com certo detalhe, pois ainda quando não trabalhemos com ela aqui, motiva sobretudo as idéias do Capítulo 4.

Seja $L(C)$ uma linguagen tal que podemos definir duas relações de conseqüência nele: uma relação $\vdash_P$ induzida por regras de tipo Hilbert, e uma relação $\models$ induzida por um sistema de interpretação $\langle C, M, A\rangle$. Isto, de momento, está definindo duas lógicas diferentes: a lógica $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_P\rangle$ e a lógica $\mathcal{L}^* = \langle C, \models\rangle$. Ora, como é usual na literatura, dizemos que: a axiomática P **é correta em relação a** $\langle C, M, A\rangle$ se $\vdash_P \subseteq \models$.
A axiomática P **é completa em relação a** $\langle C, M, A\rangle$ se $\models \subseteq \vdash_P$. No caso de ser P correta e completa em relação a $\langle C, M, A\rangle$ dizemos que P é **adequada** a $\langle C, M, A\rangle$. Neste caso, $\vdash_P$ pode ser identificada com $\models$, e as lógicas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^*$ ficam reduzidas a uma só. Isto é o que acontece, por exemplo, com a lógica clássica: uma vez verificado que a relação de conseqüência induzida axiomaticamente é similar à induzida por tabelas de verdade, fica claro que a lógica é única, independendo da forma em que se define a sua relação de conseqüência. Por outro lado suponhamos que temos duas lógicas $\mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$ que podem ser definidas tanto sintática como semanticamente. Isto é, podemos entender a cada lógica como sendo $\mathcal{L}_i = \langle C_{\mathcal{L}_i}, \vdash_{P_i}\rangle$ ou como $\mathcal{L}_i^* = \langle C_{\mathcal{L}_i}, \models_{\mathcal{L}_i}\rangle$. Ora, procedamos a fibrilar as lógicas $\mathcal{L}_i$ sintáticamente, segundo as Definições 2.2.5 ou 2.2.6: o resultado será a lógica $\mathcal{L}_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2}$. Por outro lado, repitamos o procedimento seguindo a idéia semântica de fibrilação. Obteremos assim a lógica $\mathcal{L}_{\mathcal{L}_1^* \circledast \mathcal{L}^*{}_2}$. Estas duas novas lógicas serão a mesma? Quer dizer: serão válidas a correção e completude nas lógicas obtidas por fibrilação? Pode ser provado que, enquanto a correção é de fato válida, a completude não sempre pode ser possível (ver [Zanardo et al., 2001]). E aqui chegamos novamente à idéia de preservação de propriedades tal como foi pedido na Motivação 2.1.1. Porém, neste caso, a propriedade a ser analisada (completude) vem dada de uma forma especial, como veremos a seguir:

No caso de preservação da axiomática, a propriedade em questão era "interna". Ou seja, as lógicas eram fibriladas dentro de uma classe especial, e a análise do resultado de transferência era feita nessa mesma classe. Uma coisa análoga acontece no caso de preservação de lógicas apresentadas semanticamente. Na análise da preservação de correção e completude temos a seguinte questão: é preciso realizar duas fibrilações (por métodos diferentes) e depois compará-las, pelo que os resultados de transferência a serem estudados são analisados "externamente" (ou seja, estamos buscando a igualdade entre duas lógicas fibriladas de diferente forma). Veremos nos próximos capítulos que nas fibrilações a serem estudadas, os resultados de transferência podem ser analisados também de tanto de forma "interna" quanto externa. Isto é devido a que as noções de protoalgebrizabilidade, equivalencialidade e algebrizabilidade podem ser expressas tanto em função de certos tipos de modelos mas também intrinsecamente. Na análise de tipo "externo" os modelos em questão deverão ser fibrilados também: isto vai nos levar, por exemplo, à *fibrilação de classes de álgebras*, transcendendo a idéia de que a fibrilação é um processo exclusivo das lógicas.

Em toda esta breve introdução apresentada até aqui, temos dado preferência a um tratamento relativamente informal do conceito de fibrilação. Porém, para poder continuar, é preciso unificar todo o que foi apresentado sob uma única perspectiva, mais formal. A formalização que vimos nos casos concretos apresentados nestas últimas seções é devida, como foi mencionado, aos pesquisadores do IST de Lisboa (A. Sernadas, C. Sernadas, C. Caleiro, entre outros). Mas deveremos modificá-la levemente (na verdade, apresentá-la de um modo mais abstrato) para poder estudar fibrilação na Hierarquia de Leibinz, tanto interna como externamente. E para conseguir tal abstração é verdadeiramente conveniente expressar nossas idéias por meio da Teoria de Categorias. Disso trata a última seção deste capítulo.

2.4 Abordagem categorial da fibrilação de Lógicas

Antes de começar com esta seção consideramos bom indicar que os conceitos categoriais que serão precisos aqui são muito simples. Temos nos baseado aqui fundamentalmente em [Goldblatt, 1979]. Temos utilizado também o apêndice da Tese Doutoral de Carlos Caleiro ([Caleiro, 2000]), sobretudo no uso dos conceitos de cofibração e de elevação co-cartesiana. Por outro lado, fixaremos a seguinte notação, para distinguir os aspectos conjuntistas, lógicos e categoriais das entidades a serem estudadas.

Notação 2.4.1

Dados dois conjuntos A e B, $A \uplus B$ indica a sua união disjunta; dada uma categoria $\mathcal{C}$, e dois $\mathcal{C}$-objetos, $A \oplus B$ denota a seu coproduto. Finalmente, dadas duas lógicas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$ denota a sua fibrilação, como temos feito nas seções anteriores.

Em muitas ocasões os conceitos indicados coincidem, mas para demonstrar isso é preciso inicialmente diferenciar as noções envolvidas. Daí a necessidade da notação indicada. □

Para proceder a analisar categorialmente a fibrilação de lógicas, notemos primeiramente o seguinte: este método, entre outras coisas, utiliza a idéia de *combinação de linguagens.* É natural, portanto, definir uma categoria de linguagens como fundamento sobre o qual serão definidos os restantes conceitos. Nas abordagens estudadas até agora, as categorias de linguagens puderam ser reduzidas simplesmente a categorias de assinaturas:

Definição 2.4.2 *A* **categoria** SIG *é aquela cujos objetos e morfismos estão definidos da seguinte maneira:*
SIG*-objetos: Assinaturas.*
SIG*-morfismos: Dados dois* SIG*-objetos* C_1 *e* C_2*, um morfismo* $f : C_1 \longrightarrow C_2$ *é uma função* $f : |C_1| \longrightarrow |C_2|$ *tal que, se* $c \in {C^k}_1$*, então* $f(c) \in {C^k}_2$*. Notemos que todo* SIG*-morfismo induz uma função* $\widehat{f} : L(C_1) \longrightarrow L(C_2)$ *da seguinte forma:*

a) $\widehat{f}(p) := p$*, para todo* $p \in \mathcal{V}$*.*

b) $\widehat{f}(w(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)) := f(w)(\widehat{f}(\alpha_1), \cdots, \widehat{f}(\alpha_k))$

A identidade id e a composição $\circ$ *em* SIG *são óbvias.* □

Entre outras propriedades de SIG pode ser facilmente demonstrado, por exemplo, que tal categoria é uma categoria finitamente completa, possuindo assim co-produtos e co-equalizadores. Isto é uma fácil conseqüência do fato de que SIG na verdade é a categoria $SET/I\!N$ [8]. Tais conceitos são importantes pois darão a idéia intuitiva de inclusão de conectivos e de identificação de conectivos, respectivamente, como veremos daqui a pouco.

De qualquer forma, a definição de uma categoria de linguagens é simplesmente o primeiro passo: em base a ela daremos a idéia de morfismos entre lógicas. Em geral tais morfismos dependem da forma em que as lógicas estão apresentadas. Dado que na seção anterior temos trabalhado com duas apresentações (cálculos de Hilbert e estruturas semânticas) veremos o formalismo categorial delas, e de que modo estão influenciadas pela categoria SIG. Primeiramente, definimos a categoria de lógicas induzidas por cálculos de Hilbert.

Definição 2.4.3 *A categoria* HIL *é definida da seguinte forma:*
HIL*-Objetos: lógicas* $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ *induzidas por cálculos de Hilbert* [9]*.*
HIL*-Morfismos: são* HIL*-morfismos de* $\mathcal{L}_1$ *até* $\mathcal{L}_2$ *os* SIG*-morfismos* $f : |C_1| \longrightarrow |C_2|$ *tais que as funções* $\widehat{f} : L(C_1) \longrightarrow L(C_2)$ *induzidas por* f *satisfazem o seguinte: sejam os cálculos*

[8] Ver esta definição em [Goldblatt, 1979].

[9] Na versão original os HIL-Objetos são os próprios cálculos de Hilbert. Dado que uma mesma lógica pode ser definida por diferentes cálculos mas estes (na categoria tal como foi originalmente definida) acabam sendo isomorfos, a nossa aproximaçaco não presupõe nenhuma modificação substancial, e é mais fácil de explicar. Uma coisa análoga acontecerá com a categoria de sistemas de interpretação.

de Hilbert $\langle C_i, P_i \rangle$ $(i = 1, 2)$ *tais que induzam as lógicas* $\mathcal{L}_i$ *respectivas; para toda regra* $r = \langle Prem(r), conc(r) \rangle \in P_1$ *expressa em* $L(C_i)$ [10], *vale* $\widehat{f}(Prem(r)) \vdash_2 \widehat{f}(conc(r))$. □

Aqui aparecem duas propriedades fundamentais para o formalismo a ser desenvolvido: a primeira é a seguinte:

Proposição 2.4.4 f *é um* HIL*-morfismo entre lógicas* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$ *se e somente se* $\widehat{f}$ *verifica, para todo conjunto* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(C_{\mathcal{L}_2})$*: se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \alpha$*, então* $\hat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_2} \hat{f}(\alpha)$.

Isto é, os morfismos entre lógicas acabam sendo *traduções entre lógicas*, segundo certa nomenclatura usual na literatura [11]. Tal fato é fundamental, pois os morfismos, desta forma, "preservam" a relação de conseqüência ainda quando a linguagem muda.

O outro fato fundamental é a caracterização categorial da fibrilação, tanto restrita a um conjunto de conectivos como irrestrita. Ainda quando a primeira generaliza a segunda, tais resultados aparecem separadamente:

Teorema 2.4.5 *A fibrilação de duas lógicas* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$ *induzidas por cálculos de Hilbert é simplesmente a lógica co-produto na categoria* HIL.

Figura 1

HIL

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \arrow[dr, "inc_1"] \arrow[ddr, "f_1"'] & & \mathcal{L}_2 \arrow[dl, "inc_2"'] \arrow[ddl, "f_2"] \\
& \mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2 \arrow[d] & \\
& \mathcal{L}' &
\end{tikzcd}$$

[10] Ou seja, trocando as variáveis ξ_i por p_i.

[11] Seguimos aqui a [da Silva et al., 1999] e, [Carnielli – D'Ottaviano, 1997]; este conceito abstrato de tradução já aparece por exemplo em [Brown – Suszko, 1973]. Podem se estudar trabalhos mais recentes no tema em [Feitosa – D'Ottaviano, 2001].

Tratemos de entender intuitivamente tal resultado (ver Figura 1 como ajuda): como mencionamos, o coproduto em SIG é a união disjunta de assinaturas. Dado que os HIL-morfimos são também SIG-morfimos, tal fato é herdado em HIL. Além disso, a Proposição 2.4.4 indica que os HIL-morfismos preservam as relações de conseqüência. Logo, está dizendo que o coproduto é a lógica "mais próxima" às duas originais que preserva as relações de conseqüência. Mas isso é, justamente, o que a fibrilação irrestrita de lógicas significa, segundo a Definição 2.2.5.

A fibrilação restrita de lógicas requer um estudo mais detalhado do comportamento do morfismo na categoria de assinaturas SIG, como veremos a seguir. Mas para isso precisamos do conceito categorial de *elevação co-cartesiana*:

Definição 2.4.6 *Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ um funtor: um* **morfismo F-co-estruturado com codomínio** *$d' \in \mathcal{D}$ é um par (c, f), sendo que c é um $\mathcal{C}$-objeto e $f : F(c) \longrightarrow d'$ é um $\mathcal{D}$-morfismo. Uma* **elevação co-cartesiana do F-morfismo co-estruturado** *(c, f) é um $\mathcal{C}$-morfismo $f^* : c \longrightarrow c'$ tal que $F(f^*) = f$ e, adicionalmente, verifica a seguinte propriedade universal:*
para todo $\mathcal{C}$-morfismo $g : c \longrightarrow c''$, e todo $\mathcal{D}$-morfismo $h : d' \longrightarrow F(c'')$ validando $h \circ f = F(g)$, existe um único $\mathcal{C}$-morfismo $h^* : c' \longrightarrow c''$ com $h^* \circ f^* = g$, e $F(h^*) = h$.
No caso em que F seja o "funtor esquecimento" entre duas categorias, omitiremos o prefixo F nas definições prévias. $\square$

Com a definição anterior é possível provar o seguinte resultado, relativo à fibrilação restrita a assinaturas C_0:

Teorema 2.4.7 *Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C_{\mathcal{L}_i}, \vdash_{\mathcal{L}_i} \rangle$ $(i = 1, 2)$ dois HIL-objetos. Seja $\mathcal{L}_{\mathcal{L}_1 \circledast^{C_0} \mathcal{L}_2}$ a fibrilação restrita ao conjunto C_0 de conectivos.*

Então se verifica:
(a) C_0 é um SIG-objeto, $f_i : C_0 \longrightarrow C_i$ são SIG-monomorfismos, e a linguagem de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}_1 \circledast^{C_0} \mathcal{L}_2}$ é a gerada pela assinatura C, sendo C o contradomínio do co-equalizador (e, C). Este último co-equaliza o par de morfismos $inc_i \circ f_i : C_0 \longrightarrow C_1 \uplus C_2$ [12]*.*
(b) A lógica $\mathcal{L}_{\mathcal{L}_1 \circledast^{C_0} \mathcal{L}_2}$ é simplesmente o contradomínio da elevação co-cartesiana determinada pelo morfismo co-estruturado $(\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2, e)$.

Começamos aqui nossa contribuição original a este trabalho, com a análise deste teorema de uma forma intuitiva, ajudados pela Figura 2: em primeiro lugar, vemos que podemos definir o funtor esquecimento N entre as categorias HIL e SIG. Já em SIG vemos que

[12] Ese era o motivo pelo qual é preciso provar que SIG tem coprodutos e co-equalizadores.

fica claro que um conjunto de conectivos compartilhados C_0 pode ser visto claramente como um morfismo dessa categoria. É óbvio, também, que a linguagem da lógica obtida pela fibrilação, de acordo com a Definição 2.2.6 tem que estabelecer uma identificação entre as inclusões de C_0 nas duas lógicas envolvidas. Temos assim a noção de co-equalizador do par de morfismos com domínio C_0. Fora disso, os conectivos restantes devem ser considerados em forma disjunta, pelo que o contradomínio dos morfismos a serem equalizados deve ser $C_{\mathcal{L}_1} \uplus C_{\mathcal{L}_2}$.

Figura 2

$$HIL \xmapsto{\quad N \quad} SIG$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & C_0 \arrow[dl, hook, "f_1"'] \arrow[dr, hook, "f_2"] & \\
\mathcal{L}_1 \arrow[dr, "inc_1"] & & \mathcal{L}_2 \arrow[dl, "inc_2"'] & C_1 \arrow[dr, hook, "inc_1"] & & C_2 \arrow[dl, hook', "inc_2"'] \\
 & \mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2 \arrow[d] & & & C_1 \oplus C_2 \arrow[d, "e"'] & \\
 & \mathcal{L}' & & & C \arrow[lll, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Ora, a lógica em questão, além de ter a linguagem definida segundo os conceitos indicados, deve ser, mais uma vez, a "menor" lógica que preserva as relações de conseqüência originais. Por tal motivo, precisamos da noção de elevação co-cartesiana, que "leva" a linguagem gerada pela assinatura compartilhada C_0 à categoria das lógicas e, além disso, tal noção define o morfismo mais "próximo" a $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ que preserva relações de conseqüência originais.

Temos assim dado um tratamento formal á idéia intuitiva de fibrilação sintática. Porém, um fato verdadeiramente interessante é que tal formalismo pode ser aplicado também à fibrilação semântica, com os mesmos resultados que os estabelecidos pelos Teoremas 2.4.5 e 2.4.7. Isto é, que a noção de fibrilação irrestrita corresponde-se com a noção categorial de co-produto (na categoria INT, de lógicas induzidas por estruturas semânticas). E, por outro lado, que a fibrilação restrita é a elevação co-cartesiana de *certo* co-equalizador definido na categoria SIG. Isto nos leva, nesta tese, a considerar que a fibrilação é simplesmente um certo diagrama entre certas categorias especiais. Quais são as propriedades que deveriam possuir tais categorias? Neste texto levaremos a conta as seguintes:

- Primeiramente devemos expressar categorialmente relações entre linguagens: logo, precisamos de categorias $\mathcal{C}$ cujos objetos podem ser considerados como assinaturas. Por outro lado, a propriedade fundamental dos morfismos de $\mathcal{C}$ é que induzem funções entre as linguagens geradas pelas assinaturas. Assim, em SIG, uma das propriedades dos morfismos f é a de induzir a função $\widehat{f} : L(C_1) \longrightarrow L(C_2)$. Além disso, os SIG-morfismos deveriam ser também $\mathcal{C}$-morfismos.

- As categorias $\mathcal{C}$ devem possuir coprodutos, para poder expressar união disjunta de linguagens.

- Para poder expressar combinação de linguagens compartilhando um conjunto C_0 de conectivos, deve valer: para todo par de SIG-mono-morfismos $\widehat{f_i} : L(C) \longrightarrow L(C_i)$ $(i = 1, 2)$, sempre existe o coequalizador de $inc_i \circ f_i : C_0 \rightrightarrows C_1 \oplus C_2$, com inc_i $(i = 1, 2)$ as injeções canônicas $inc_i : C_0 \longrightarrow C_i$. □

Voltamos a indicar que as propriedades mencionadas são as que consideramos necessárias para expressar categorialmente os conceitos lingüísticos (porém não lógicos). Nesta tese utilizaremos uma categoria que possui estas propriedades e que inclui a SIG. Chamaremos $PLAN$ a tal categoria [13]. Vejamos a sua definição formal e algumas das suas propriedades.

Definição 2.4.8 *A categoria $PLAN$ é definida por:*
- $PLAN$-objetos: assinaturas C.
-$PLAN$-morfismos: funções $f : |C_1| \longrightarrow L(C_2)$ satisfazendo para todo $c \in {C^k}_1$, que $f(c) = \alpha_c(p_1, \cdots, p_k)$. Ou seja, f associa a cada conectivo k-ário de C_1 uma fórmula de $L(C_2)$ que depende no máximo de k variáveis. Os $PLAN$-morfismos f induzem uma única função $\widehat{f} : L(C_1) \longrightarrow L(C_2)$ da seguinte forma:
- $\widehat{f}(p_i) = p_i$ (para todo $p_i \in \mathcal{V}$);
- $\widehat{f}(w(\beta_1, \cdots, \beta_k)) = f(w)(\widehat{f}(\beta_1), \cdots, \widehat{f}(\beta_k))$, para todo $w \in {C^k}_1$.
- A composição $g \bullet f$ é a função $\hat{g} \circ f$ (aqui, $\circ$ é a tradicional composição conjuntista). □

[13] O nome "PLAN" vem do inglês "**P**ropositional **Lan**guages. Faz referência óbvia ao fato de que, embora os objetos sejam assinaturas, na verdade estamos utilizando funções entre as linguagens geradas respectivas.

Observação 2.4.9

Notemos que os SIG-morfismos $f : C_1 \longrightarrow C_2$, onde para todo $c \in C_1$, $f(c) = w \in C_2$ podem ser considerados obviamente como funções $f : C_1 \longrightarrow L(C_2)$, com $f(c) = w(p_1, \cdots, p_k)$. E tal tipo de funções são morfimos no sentido de $PLAN$. Assim, podemos entender que os SIG-morfismos estão contidos nos $PLAN$-morfismos. Portanto, usualmente faremos referência a os SIG-morfismos como sendo funções cujos contradomínios são linguagens, e não assinaturas. $\square$

Vejamos algumas outras propriedades de $PLAN$:

Proposição 2.4.10 *Para todo par de $PLAN$-morfimos f e g verifica-se:*
(a) Se $f : C_1 \longrightarrow L(C_2)$ e $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n) \in L(C_1)$ então $\widehat{f}(\varphi(p_1, \ldots, p_n)(p_i/\alpha_i)) = \widehat{f}(\varphi)(p_i/\widehat{f}(\alpha_i))$ (com $i = 1, \cdots, n$). Isto é, $\widehat{f}(\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n))$.
(b) Se $f : C_1 \longrightarrow L(C_2)$ e $\widehat{g} : L(C_2) \longrightarrow L(C_3)$ então $\widehat{g \bullet f} = \widehat{\widehat{g} \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.

Demonstração: Por indução na complexidade da fórmula $\varphi(p_1, \cdots, p_n)$. $\square$

A proposição anterior indica certas propriedades de linguagens proposicionais e de $PLAN$-morfismos.

Os resultados que verdadeiramente precisamos (que permitirão mixturar linguagens proposicionais) vêm dados a seguir:

Teorema 2.4.11 *$PLAN$ é, de fato, uma categoria.*

Demonstração: É claro que $\widehat{id}$ é o morfismo identidade (sendo, $id : C \longrightarrow L(C)$ definido por $id(w_k) = w_k(p_1, \ldots, p_k)$), para toda assinatura C e para todo conectivo $w \in C^k$. Para provar associatividade aplicamos Proposição 2.4.10 (b): $\widehat{h} \bullet (\widehat{g} \bullet \widehat{f}) = \widehat{h} \circ (\widehat{g} \circ \widehat{f}) = (\widehat{h} \circ \widehat{g}) \circ \widehat{f} = (\widehat{h} \bullet \widehat{g}) \bullet \widehat{f}$. $\blacksquare$

Teorema 2.4.12 *$PLAN$ possui coprodutos.*

Demonstração: Sejam as assinaturas C_i, com $i = 1, 2$. Consideremos a assinatura $C = C_1 \uplus C_2$ (sendo $\uplus$, como temos mencionado, a união disjunta). Provemos que $C = C_1 \oplus C_2$: definimos $inc_i : C_i \longrightarrow L(C)$ da forma óbvia. Isto é, para todo conectivo $w \in {C^k}_i$, $inc(w) = w(p_1, \ldots, p_k)$. Sejam agora os $PLAN$-morfismos $g_i : C_i \longrightarrow L(C')$ $(i \in \{1, 2\})$. Definimos $g : C \longrightarrow L(C')$ da maneira natural: $g(w) := g_i(w)$, para todo conectivo $w \in C_i$. Assim, é fácil provar que $g \bullet inc_i = g_i$, e que ésta última função é única. $\blacksquare$

Teorema 2.4.13 *Sejam $f_i : C_0 \longrightarrow L(C_i)$ $(i = 1, 2)$ dois SIG-monomorfismos (e portanto $PLAN$-morfismos), cf. Observação 2.4.9. Então, dadas as inclusões $inc_i : C_i \longrightarrow C_1 \oplus C_2$ temos que em $PLAN$ sempre existe o co-equalizador para $inc_i \bullet f_i : C_0 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$ $(i = 1, 2)$.*

Demonstração: Sejam duas assinaturas C_i $(i = i, 2)$, e a assinatura C_0 com os SIG-monomorfismos $f_i : C_0 \longrightarrow L(C_i)$. Definimos em $C_1^k \uplus C_2^k$ (com $k \in I\!N$) a seguinte relação de equivalência [14]: ${w^i}_k \equiv {w^j}_k$ se e somente se existe $w_k \in C_0$ tal que $f_i(w_k) = {w^i}_k(p_1, \cdots, p_k)$ e $f_j(w_k) = {w^j}_k(p_1, \cdots, p_k)$ (É claro que $\equiv$ é uma relação de equivalência). Notar que, se $(w_i, w_j) \in \equiv$, então somente pode acontecer:
a) $w_i = w_j$ ou então b) $w_k \in {C^k}_{r_i}$, $w_j \in {C^k}_{r_j}$ e $i \neq j$ (isso por ser f_i monomorfismos em SIG). Denotaremos à classe de equivalência de todo $c \in |C_0|$ por $\overline{c}$.

Seja agora a assinatura $\overline{C} := C/\equiv$. Notemos que $\overline{C}$ simplesmente "identifica" aqueles conectivos de assinaturas diferentes que são considerados o mesmo por causa de C_0, e faz disjuntos os restantes conectivos. Definimos agora $e : C_1 \oplus C_2 \longrightarrow \overline{C}$ definida por (para todo conectivo ${w^i}_k \in C_1 \uplus {C_2}^k$): $e({w^i}_k) = \overline{{w^i}_k}(p_1, \ldots, p_k)$. Provemos agora, para todo conectivo $w \in C_0$, que $e \bullet (inc_1 \bullet f_1(\varphi)) = e \bullet (inc_2 \bullet f_2(\varphi))$. Primeiramente notemos que, se $f_i(w) = c_i(p_1, \cdots, p_k)$, com $c_i \in {C^k}_i$, $(i = 1, 2)$ então $\overline{c_1} = \overline{c_2}$. Deste fato, e aplicando Proposição 2.4.10 (b) temos: $(e \bullet inc_1) \bullet f_1(c) = e \bullet (inc_1 \bullet f_1(c)) = \widehat{e} \circ (inc_1 \bullet f_1(c)) = \widehat{e} \circ (\widehat{inc_1} \circ f_1(c)) = \widehat{e}(\widehat{inc_1}(f_1(w))) = \widehat{e}(\widehat{inc_1}(c_1(p_1, \cdots, p_k))) = \widehat{e}(c_1(p_1, \cdots, p_k)) = \overline{c_1}(p_1, \cdots, p_k)$ $= \overline{c_2}(p_1, \cdots, p_k) = \widehat{e}(\widehat{inc}(c_2(p_1, \cdots, p_k))) = \widehat{e}(\widehat{inc_2}(f_2(w))) = \widehat{e} \circ (\widehat{inc_2} \circ f_2(c)) = \widehat{e} \circ (inc_2 \bullet f_2(c))$ $= (e \bullet inc_2) \bullet f_2(c)$, como desejávamos. A propriedade universal de $\widehat{e}$ é trivial, assim como a unicidade de dito morfismo. $\blacksquare$

Até agora somente vimos como eram tratadas categorialmente as linguagens mediante SIG, e generalizamos tal definição em $PLAN$. Porém, não trabalhamos ainda propriamente com categorias de lógicas. E é neste tipo de categorias onde o problema da fibrilação é analisado. Para estudar este problema, e lembrando a idéia de HIL-fibrilação irrestrita (que precisa de coprodutos) e restrita (que precisa de elevação cocartesiana) definiremos categorialmente o que entendemos por C-fibrilação de lógicas:

Definição 2.4.14 *A* **categoria de operadores de conseqüência relativa a** $PLAN$ *(denotada por $CONS_{PLAN}$ ou simplesmente por $CONS$) é definida por:*
(i) $CONS$-objetos: lógicas da forma $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, onde $C_{\mathcal{L}}$ é um $PLAN$-objeto.
(ii) $CONS$-morfismos: são $PLAN$-morfismos f tais que a função $\widehat{f}$ verifica (para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(C_1)$) que, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \alpha$, então $\hat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_2} \hat{f}(\alpha)$. $\square$

[14] Para simplificar notação, os morfismos inclusão serão entendidos como identidades. E portanto, $\widehat{inc}(w(p_1, \cdots, p_k)) = w(p_1, \cdots, p_k)$ simplesmente.

Como mencionamos a diferença conceitual entre uma lógica e as suas possíveis *apresentações*, definimos agora categorialmente o significado que daremos às apresentações nesta tese.

Definição 2.4.15 *Uma* **categoria de apresentações de lógicas** *(ou, mais brevemente, "categoria de apresentações") é simplesmente qualquer sub-categoria de $CONS$.* □

Exemplo 2.4.16

Segundo a última definição, temos que as categorias HIL e INT são, assim, categorias de apresentações. Além disso, a própria $CONS$ é uma categoria de apresentações. As categorias de lógicas que admitem semântica de Kripke, ou cálculo de seqüentes, ou semântica de tipo algébrico também podem ser consideradas categorias de apresentações (desde que sejam definidas convenientemente) . □

Com o anterior podemos dar a definição categorial de C-fibrilação:

Definição 2.4.17 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria de apresentações em $CONS$. Dois $\mathcal{C}$-objetos podem ser C-fibrilados irrestritamente se existe o coproduto $\oplus$ deles em $\mathcal{C}$ (nesse caso, $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ será denotado por $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$). Diremos que $\mathcal{C}$ é* **fechada por C-fibrilação irrestrita** *se $\mathcal{C}$ sempre possui coprodutos. Diremos que* **dois $\mathcal{C}$-objetos $\mathcal{L}_i$=$\langle C_i, \vdash_i\rangle$ admitem co-fibração restrita ao $PLAN$-objeto** *C_0, se:*

- *Existem SIG-mono-morfismos $f_i : C_0 \longrightarrow C_1$ $(i = 1, 2)$.*
- *Existe a elevação cocartesiana do morfismo coestruturado $(\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2, eq)$ para N, em que:*
  - *$N : \mathcal{C} \longrightarrow PLAN$ é o funtor esquecimento.*
  - *e é o $PLAN$-co-equalizador de $inc_i \circ f_i : C_0 \rightrightarrows C_1 \oplus C_2$ (O co-equalizador mencionado existe, por causa do Teorema 2.4.13)*
- *Finalmente, diremos que $\mathcal{C}$ é* **fechada por C-fibrilação restrita** *se todo par de lógicas $\mathcal{L}_i = \langle C_i, \vdash_i\rangle$ pode ser fibrilado restritamente a qualquer $PLAN$-objeto C_0 tal que existam mono-morfismos $f_i : C_0 \longrightarrow C_i$.* □

Observação 2.4.18

Da definição anterior temos que, para provar que certa categoria de apresentações $\mathcal{C}$ é fechada por C-fibrilação, deveríamos proceder da seguinte forma:

(a) Provar que $\mathcal{C}$ admite coprodutos.

(b) Considerar duas lógicas quaisquer de $\mathcal{C}$ e construir a elevação co-cartesiana do morfismo coestruturado acima mencionado.

Porém, é óbvio que (b) vale se for demonstrado que a categoria $\mathcal{C}$ admite elevação co-cartesiana *para qualquer morfismo coestruturado*. Ou seja, que o funtor esquecimento é uma cofibração. Nas demonstrações a seguir utilizaremos basicamente esta idéia. $\square$

Vemos agora que cada classe das lógicas da Hierarquia de Leibniz pode ser entendida como uma categoria de apresentações. E agora temos uma definição razoável para analisar C-fibrilação em tais classes de lógicas (ou seja, apresentações). Obviamente, é bom saber primeiramente se a própria $CONS$ admite fibrilação restrita e irrestrita. A resposta afirmativa está dada a seguir.

Teorema 2.4.19 *Dados $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ dois $CONS$-objetos. Então sempre existe o co-produto entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. Dito co-produto é (isomorfo a) $\mathcal{L} = \langle C_1 \uplus C_2, \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$, sendo $\vdash_{\mathcal{L}}$ a menor relação de conseqüência padrão tal que faz as funções $\widehat{inc}_i$ traduções ($i = 1, 2$).*

Para demonstrar o teorema anterior precisamos de certos resultados e definições preliminares: primeiramente, faremos uma abstração do conceito de "Cálculo de Hilbert" dado na Definição 2.2.2:

Definição 2.4.20 *Dada uma assinatura C,* **uma inferência na linguagem** *$L(C)$ é qualquer par $(\Gamma, \alpha) \in \wp(L(C)) \times L(C)$. Uma* **regra de inferência de tipo Gentzen** *é um par $R = (\Xi, (\Gamma, \alpha))$, sendo $\Xi = \{\Sigma_i, \beta_i\}_{i\in I}$ um conjunto de inferências em $L(C)$. Se $\Xi = \emptyset$, dizemos que R é um* **axioma de tipo Gentzen**. *Usualmente a regra R será apresentada da forma $\dfrac{\{\Sigma_i \vdash \beta_i\}_{i\in I}}{\Gamma \vdash \alpha}$. Finalmente, uma* **base inferencial de tipo Gentzen para** *$L(C)$(de demonstrações finitas) e um conjunto B de regras de inferência.*
Dada uma linguagem $L(C)$ e uma base inferencial B para $L(C)$, dizemos que **a relação** *$\vdash_B \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$* **induzida por** *$B$* **em** *$L(C)$ é definida por:*
$\Gamma \vdash_B \alpha$ se existe uma seqüência $(inf_1), \cdots, (inf_n)$ de inferências em $L(C)$ tal que (inf_n) $= \Gamma \vdash_B \alpha$ e, para todo $1 \leq k \leq n$, existe uma regra $R = (\Xi, (\Gamma \vdash_B \alpha) \in B$ tal que $\Xi \subseteq \{(inf_1), \cdots, (inf_{k-1})\}$ e $\Gamma \vdash_B \alpha = (inf_k)$. $\square$

Observação 2.4.21

Notemos que $\vdash_B$ não precisa ser uma relação de conseqüência, diferentemente do que foi definido como Cálculo de Hilbert. De fato, a noção de base inferencial somente impõe restrições no "comprimento das demonstrações" e (derivado de tal comprimento) na finitude do conjunto Ξ. Isto é, que uma base inferencial B pode ter cardinalidade arbitrária e, mais ainda, tais regras podem não ser estruturais nem finitárias. Ainda assim, se quisermos propriedades desse tipo na relação $\vdash_B$, podemos expressá-las a partir da possibilidade de que a cardinalidade de B seja infinita [15].

Os conceitos de base inferencial de tipo Gentzen e o de Cálculo de Hilbert são casos particulares do que usualmente é definido simplesmente por "base inferencial". Tal conceito, definido inicialmente por J. Łoś e R. Suszko e estudado entre outros por R. Wójcicki, nem sequer faz referência ao "número de passos" (inf) a serem aplicadas para considerar uma inferência como válida. Na verdade, a forma em que usualmente é tratada a idéia de base inferencial por tais autores é bem abstrata. De fato, em sua forma mais geral uma base inferencial não está vinculada à Teoria da Demonstração, como usualmente acontece com os cálculos de Hilbert ou de Gentzen usuais na literatura, em que o número de axiomas e regras é finito ou esquemático, por exemplo. Ver [Wójcicki, 1988], Seção 1.2.7 e a totalidade do Capítulo 2 para uma discussão detalhada do conceito abstrato de base inferencial.

De qualquer forma, se neste texto aparecer a expressão "base inferencial", na verdade estaremos fazendo referência às bases inferenciais de tipo Gentzen, e não a sua versão mais abstrata. $\square$

Definição 2.4.22 *Seja $\overline{\mathcal{L}} = \langle C_{\overline{\mathcal{L}}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ a lógica tal que $C_{\overline{\mathcal{L}}} = C_{\mathcal{L}_1} \uplus C_{\mathcal{L}_2}$, e $\vdash_{\overline{\mathcal{L}}}$ tem a seguinte base inferencial:*
Os axiomas têm uma estrutura comum:

$$[Ax-1]\ \ \widehat{inc_i}\Gamma \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \widehat{inc_i}\alpha$$

(Para toda inferência finita $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_i}, i = 1, 2$)

Por outro lado, as regras de inferência possuem alguma destas formas:

$$[RI-1]\frac{\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha}{\Sigma, \Sigma' \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha} \quad [RI-2]\frac{\Sigma_1 \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \beta_1 \quad \beta_1, \Sigma_2 \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \beta_2}{\Sigma_1, \Sigma_2 \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \beta_2} \quad [RI-3]\frac{\Sigma \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \beta}{\widehat{\sigma}(\Sigma) \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \widehat{\sigma}(\beta)} \qquad \square$$

Como veremos a seguir, $\overline{\mathcal{L}}$ é de fato uma lógica, e mais ainda, uma lógica padrão.

Proposição 2.4.23 *A lógica $\mathcal{L}$ do* Teorema 2.4.19 *é a mesma lógica $\overline{\mathcal{L}}$ da Definição anterior.*

Demonstração: As linguagens obviamente são as mesmas. Provemos agora:
$\vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$: é trivial ver que o único sequente axioma de $\overline{\mathcal{L}}$ é uma inferência válida em $\mathcal{L}$. Por

[15] Assim por exemplo, dado que temos infinitas substituições possíveis, existe uma regra de inferência de Gentzen para cada substituição σ.

outro lado, as regras de inferência de $\overline{\mathcal{L}}$ preservam a validade em $\mathcal{L}$ (aqui utilizamos o fato de ser $\mathcal{L}$ uma lógica padrão).
$\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vdash_{\overline{\mathcal{L}}}$: Demonstremos primeiramente que $\overline{\mathcal{L}}$ é uma lógica padrão:
Extensividade: seja $\alpha \in \Gamma$: sabemos que em $\mathcal{L}_1$ vale $p \vdash_{\mathcal{L}_1} p$. Logo, $p \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} p$ (por $Ax1$). Por $[RI_3]$, $\alpha \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha$. Por $[RI-1]$, $\Gamma \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha$.
Para Monotonicidade, Transitividade e Estruturalidade é suficiente aplicar convenientemente as regras $[RI-1]$-$[RI-3]$.
Para provar finitariedade suponha que existe $\Gamma \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha$. Precisamos achar Γ' finito, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma' \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha$. Provaremos isto por indução no número k de inferências neccesárias para chegar até $\Gamma \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha$. Se $k = 1$, então tal sequente é um axioma de $\overline{\mathcal{L}}$ e, por sua própria definição, Γ é finito. Se $\Gamma \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha$ pela aplicação de $[RI-1]$, então $\Gamma = \Sigma \cup \Sigma'$, e $\Sigma \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha$. Por (HI) existe um conjunto finito $\Gamma' \subseteq \Sigma$ (e portanto $\Gamma' \subseteq \Gamma$)) com $\Gamma' \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha$. Análogamente para as outras regras. Assim, $\overline{\mathcal{L}}$ é padrão. Além disso, por causa do $[Ax-1]$, as funções $\widehat{inc_i}$ $(i = 1, 2)$ são traduções de $\mathcal{L}_i$ a $\overline{\mathcal{L}}$.

Ora, como já tinhamos demonstrado que $\overline{\mathcal{L}}$ é padrão, e $\mathcal{L}$ é *a menor lógica padrão* no reticulado $\mathbf{Pad}_{(\mathbf{C_1} \uplus \mathbf{C_2})}$ que faz que as inclusões em $PLAN$ sejam traduções, temos que $\mathcal{L} \subseteq \overline{\mathcal{L}}$. Isso conclui a demonstração. ■

Definição 2.4.24 *Para todo $CONS$-cocone $\langle \mathcal{L}', f_1, f_2 \rangle$ de $\langle \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \emptyset \rangle$ (onde $\mathcal{L}' = \langle C_{\mathcal{L}'}, \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$), definimos o SIG-morfismo H* [16]*: $C_{\mathcal{L}} \longrightarrow C_{\mathcal{L}'}$ como $H(c_k) = f_i(c)(p_1, \cdots, p_k)$ se e somente se $c \in C_i$ $(i = 1, 2)$.* □

Agora demonstremos:

Proposição 2.4.25 *Seja f um SIG-morfismo entre C_1 e C_2, e seja uma substituição $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow L(C_1)$. Então existe uma substituição $\sigma' : \mathcal{V} \longrightarrow L(C_2)$ tal que, para toda fórmula $\alpha \in L(C_1)$, $\widehat{f} \circ \widehat{\sigma}(\alpha) = \widehat{\sigma'} \circ \widehat{f}(\alpha)$*

Demonstração: Considerando que $\sigma(p) \in L(C_1)$, definimos $\sigma'(p) := \widehat{f}(\sigma(p))$, para todo $p \in \mathcal{V}$. Por indução na complexidade de α temos: se $\alpha = p \in \mathcal{V}$ então $\widehat{\sigma'} \circ \widehat{f}(p) = \widehat{\sigma'}(p) = \sigma'(p) = \widehat{f} \circ \widehat{\sigma}(p)$ (por definição de σ'). Se $\alpha \in C^0{}_1$, então $\widehat{\sigma'} \circ \widehat{f}(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \widehat{f} \circ \widehat{\sigma}(\alpha)$.
Ora, se $\alpha = w(\beta_1, \cdots, \beta_k)$ então:
$\widehat{f}(\widehat{\sigma}(w(\beta_1, \cdots, \beta_k))) =$ (Definição 1.1.2)
$= \widehat{f}(w(\widehat{\sigma}(\beta_1), \cdots, \widehat{\sigma}(\beta_k))) =$ (Definição 2.4.8)
$= f(w)(\widehat{f}(\widehat{\sigma}(\beta_1)), \cdots, \widehat{f}(\widehat{\sigma}(\beta_k))) =$ (Hipótese de Indução)
$= f(w)(\widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\beta_1)), \cdots, \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\beta_1))) =$ (Definição 1.1.2 e σ' é substituição)

[16] E, portanto, $PLAN$-morfismo.

$= \widehat{\sigma}'(f(w)(\widehat{f}(\beta_1), \cdots, \widehat{f}(\beta_k))) =$ (Definição 2.4.8)
$= \widehat{\sigma}'(\widehat{f}(w(\beta_1, \cdots, \beta_k)))$. ■

Do resultado anterior temos obviamente o seguinte

Corolário 2.4.26 *Dado $\langle \mathcal{L}', \{\hat{f}_1, \hat{f}_2\}\rangle$ um co-cone qualquer do diagrama $\langle\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}, \emptyset\rangle$, dada H segundo a Definição 2.4.24, e dada qualquer substituição $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow L(C)$, sempre existe uma substituição $\sigma' : \mathcal{V} \longrightarrow L(C')$ tal que, para todo $\alpha \in L(C')$, $\hat{H} \circ \hat{\sigma} = \hat{\sigma}' \circ \hat{H}$.*

Com os resultados precedentes, podemos agora provar o Teorema 2.4.19:

Demonstração do Teorema 2.4.19: é óbvio que somente precisamos provar a propriedade universal em relação a $\langle \mathcal{L}, \{\widehat{inc}_1, \widehat{inc}_2\}\rangle$. Seja $\langle \mathcal{L}', \{\widehat{f}_1, \widehat{f}_2\}\rangle$ um co-cone arbitrário de $\langle\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}, \emptyset\rangle$. Provemos que o $PLAN$-morfismo H da Definição 2.4.24 valida a propriedade universal:
$f_i = H \bullet inc_i$: trivial, da definição de H.
H é $CONS$-morfismo: demonstremos que, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, então $H(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} H(\alpha)$. Usaremos aqui a caracterização inferencial de $\vdash_{\mathcal{L}}$, fornecida na Definição 2.4.22, provando o postulado por indução no número de inferências aplicadas.
Se $k = 1$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_i} \alpha$ para algum i ($i = 1, 2$). Logo $\widehat{f}_i(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{f}_i(\alpha)$. Ou seja, $\widehat{H} \circ \widehat{inc}_i(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H} \circ \widehat{inc}_i(\alpha)$. Isto é, $\widehat{H}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\alpha)$.
Suponha que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ em k-passos, e que o postulado vale para cualquer inferência obtida por n passos, $n < k$: se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ pela aplicação de $[RI-1]$, então $\Gamma = \Sigma \cup \Sigma'$, com $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$. Por (HI) $\widehat{H}(\Sigma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\alpha)$, e assim (por monotonicidade em $\mathcal{L}'$) $\widehat{H}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\alpha)$. Se a regra aplicada é $[RI-2]$ o raciocínio é análogo. Se a regra for $[RI-3]$, temos que existem Σ, β em $L(C_1 \uplus C_2)$, com $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \beta$, e uma substituição $\widehat{\sigma} : L(C_1 \uplus C_2) \longrightarrow L(C_1 \uplus C_2)$ tal que $\Gamma = \widehat{\sigma}(\Sigma)$ e $\alpha = \widehat{\sigma}(\beta)$. Por (HI) $\widehat{H}(\Sigma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\beta)$. Seja agora a substituição σ' induzida por σ, segundo o Corolário 2.4.26. Por estruturalidade em $\mathcal{L}'$ vale $\widehat{\sigma}'(\widehat{H}(\Sigma)) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{\sigma}'(\widehat{H}(\beta))$. Do Corolário mencionado, temos $\widehat{H}(\widehat{\sigma}(\Sigma)) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\widehat{\sigma}(\beta))$. Ou seja, $\widehat{H}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\alpha)$.
H é único: se existir o $CONS$-morfismo G com as mesmas propriedades que H, pode ser provado facilmente que $G = H$. Isto conclui a prova. ■

Finalmente provemos o resultado análogo para fibrilação irrestrita:

Teorema 2.4.27 *Todo N-morfismo co-estruturado $(\mathcal{L}, f)$ (com N o funtor esquecimento) admite elevação co-cartesiana.*

Demonstração: Seja $\mathcal{L}$ um $CONS$-objeto, e $(\mathcal{L}, f)$ um N-morfismo co-estruturado (com N o funtor esquecimento de $CONS$ a $PLAN$). Ou seja, $f : C_{\mathcal{L}} \longrightarrow L(C')$ para alguma linguagem

$L(C')$. Definimos $\mathcal{L}' = \langle C', \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$, como sendo a menor lógica padrão tal que $\widehat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{f}(\alpha)$, toda vez que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$. Pelas propriedades do reticulado $CONS$, é claro que $\mathcal{L}$ está bem definida e que é um $CONS$-objeto. Por outro lado, é possível dotar a $\mathcal{L}'$ de uma base inferencial segundo a Definição 2.4.20, cujos axioma têm uma única forma: $\widehat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{f}(\alpha)$ (para toda inferência $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$), e cujas regras são $[RI-1]$-$[RI-3]$, dadas na Definição 2.4.22. Além disso, pela definição de $\mathcal{L}'$, f agora pode ser considerado um $CONS$-morfismo entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$.
Provemos, portanto, a propriedade universal. Seja $\mathcal{L}''$ um $CONS$-objeto, $g : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}''$ um $CONS$-morfismo, e $H : L(C_{\mathcal{L}}) \longrightarrow L(C')$ um $PLAN$-morfismo tais que, em $PLAN$, $H \bullet f = g$. Provemos que existe um único $CONS$-morfismo k entre $\mathcal{L}'$ e $\mathcal{L}''$ tal que $N(k) = H$, e em $CONS$, $k \bullet f = g$. Obviamente, definimos $k{:=}H$, e pode ser provado que tem as propriedades desejadas com técnicas similares às utilizadas na prova do Teorema 2.4.19. ■

Observação 2.4.28

As fibrilações obtidas (tanto restrita quanto irrestrita), definidas a partir dos reticulados de lógicas da mesma linguagem, são construções das quais não temos nenhuma informação fora do fato de serem certos ínfimos especiais. Portanto, não conhecemos se tais lógicas podem ser axiomatizadas finitamente, se admitem um certo tipo especial de semântica ou se são decidíveis, por exemplo. Mais ainda, se fibrilarmos diversos fragmentos de uma certa lógica $\mathcal{L}$ não necessariamente obteremos a própria $\mathcal{L}$, pois não temos necessariamente "propriedades de interação" entre os diversos fragmentos. A seguir mostraremos um exemplo desta última situação, aparecido originalmente em [Coniglio, 2005]. Nesse artigo é apresentada uma solução para este problema através do fortalecimento da noção de tradução entre lógicas. □

Exemplo 2.4.29

Suponhamos que temos a lógica $\mathcal{L}_1 = \langle \{\neg\}, \vdash_1 \rangle$, sendo $\mathcal{L}_1$ o fragmento da negação do LPC (isto é, todas as relações de conseqüência válidas no LPC entre fórmulas cuja linguagem é exclusivamente $\{\neg\}$). Por outro lado, seja $\mathcal{L}_2 = \langle \{\vee\}, \vdash_2 \rangle$ o fragmento da disjunção do LPC. *Em $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$ a lei do terceiro excluido não é tautologia.* Com efeito, consideremos a lógica $\overline{\mathcal{L}} = \langle \{\neg, \vee\}, \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \rangle$, sendo $\overline{\mathcal{L}}$ a relação de conseqüência induzida pela matriz $M = (\{T, F, F1\}, \{T\})$, cujas funções associadas a $\neg$ e $\vee$ são:

	T	F_1	F
$\neg$	F	F_1	T

$\to$	T	F_1	F
T	T	F	F
F_1	T	T	T
F	T	T	T

Vejamos primeiramente que $\overline{\mathcal{L}}$ é padrão: A estruturalidade vale porque toda semântica matricial induz uma relação de conseqüência estrutural. E, além disso, se a classe M é finita e seus elementos são matrizes finitas (como neste caso), $\vdash_M$ é finitária, cf. [Wójcicki, 1973].

Por outro lado, pode ser provado que todas as inferências de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ também são inferências em $\overline{\mathcal{L}}$. Logo, $\vdash_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2} \subseteq \vdash_{\overline{\mathcal{L}}}$ (pois $\vdash_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2}$ é a *menor lógica padrão* que preserva as conseqüências das lógicas originais).

Finalmente, notemos que $\nvdash_{\overline{\mathcal{L}}} \neg p \vee p$: basta considerar a valoração v tal que $v(p) = F_1$. Portanto, $\nvdash_{\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2} \neg p \vee p$. Como conclusão, temos que $LPC \neq \mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$, levando em conta que $\{\neg, \vee\}$ é um conjunto adequado de conectivos para LPC. $\square$

Do exemplo anterior vemos que não sabemos grande coisa a respeito das lógicas de $CONS$ obtidas por C-fibrilação, fora da sua própria definição. Um problema que julgamos muito interessante (mas que foge do escopo deste texto) é caracterizar de alguma forma tais lógicas (seja por algum tipo de axiomática, ou por algum modelo semântico concreto).

Repassemos o feito até este momento; no primeiro capítulo demos uma revisão sucinta dos conceitos básicos em Lógica Algébrica Abstrata. No segundo Capítulo definimos formalmente a C-fibrilação de lógicas proposicionais, e demonstramos que a "categoria marco" $CONS$ admite C-fibrilação. É o momento de unificar os dois capítulos precedentes para estudar os pontos principais deste texto: A C-fibrilação de lógicas na Hierarquia de Leibniz.

Capítulo 3

C-Fibrilação na Hierarquia de Leibniz

Continuando com os resultados originais desta tese, estudaremos neste capítulo os resultados de tranferência (mediante fibrilação categorial) de propriedades algébricas. Como temos classificado estas propriedades segundo a Hierarquia de Leibniz, começaremos o nosso estudo a partir da C-fibrilação da classe mais abrangente dentro de tal Hierarquia: a classe das lógicas protoalgébricas.

3.1 C-Fibrilação de Lógicas Protoalgébricas

Veremos aqui de que forma podemos definir a categoria de lógicas protoalgébricas (chamada de $PROT$), baseados na caracterização dada no Teorema 1.4.3. Ou seja, a existência, em toda lógica protoalgébrica, de um conjunto de fórmulas que valida (R) e (MP). Antes de começar nossa tarefa notemos que se uma lógica tem dois ou mais proto-algebrizadores, estes não têm por que ser inter-deriváveis. Isto é, pode acontecer que numa lógica $\mathcal{L}$ existam dois protoalgebrizadores $PR_1(p_1, p_2)$, e $PR_2(p_1, P_2)$ tais que não é válido $PR_1(p_1, p_2) \dashv\vdash_{\mathcal{L}} PR_2(p_1, p_2)$. Ainda quando isto não é problemático, na definição da categoria $PROT$, dada a seguir, este fato indica que a idéia de "preservação de proto-algebrizabilidade" já é diferente da idéia de tradução (pois não todos os protoalgebrizadores têm o mesmo "peso" lógico). Esta observação é detalhada no exemplo seguinte:

Exemplo 3.1.1

Seja LPC a lógica clássica. Podemos considerá-la protoalgébrica por possuir o protoalgebrizador $PR_1 = \{\rightarrow(p_1, p_2)\}$. Notemos que um outro proto-algebrizador pode ser considerado: $PR_2 = \{\leftrightarrow(p_1, p_2)\}$. Obviamente, eles não são inter-deriváveis. Desta forma, se f é a função identidade, vemos que $f(PR_1)(p_1, p_2) \nsubseteq (PR_2)(p_1, p_2)$, ainda quando f é

$CONS$-morfismo. Por outro lado, f envia obviamente protoalgebrizadores em protoalgebrizadores: será esta, precisamente, a caracterização dos morfismos na categoria de lógicas protoalgébricas, definida a seguir. $\square$

Definição 3.1.2 *A categoria $PROT$ é definida por:*
$PROT$-Objetos: lógicas $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ protoalgébricas.
$PROT$-Morfismos: $CONS$-morfismos $f : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ tais que, para todo protoalgebrizador $PR(p_1, p_2)$ de $\mathcal{L}$, temos que $\widehat{f}(PR)(p,q)$ valida (R) e (MP) em $\mathcal{L}_2$. Isto é:
- $\vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(PR)(p,p)$
- $p, \widehat{f}(PR)(p,q) \vdash_{\mathcal{L}_2} q$

A composição e os morfismos identidade são como em $CONS$. $\square$

Um primeiro resultado que será útil aqui é o seguinte:

Proposição 3.1.3 *$PROT$ é uma subcategoria plena de $CONS$.*

Demonstração: Obviamente, os $PROT$-objetos são $CONS$-objetos. Em segundo lugar provemos que, se $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são $PROT$-objetos, e f é um $CONS$-morfismo entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, então também é $PROT$-morfismo. Seja $PR(p,q)$ um conjunto existente em $\mathcal{L}_1$ validando (R) e (MP). Logo, $p, PR(p,q) \vdash_{\mathcal{L}_1} q$ (MP), e analogamente para (R). Como f é $CONS$-morfismo (e portanto $\widehat{f}$ é tradução), temos $p, \widehat{f}(PR)(p,q) \vdash_{\mathcal{L}_2} q$. Analogamente para (R). Assim, $\widehat{f}$ é $PROT$-morfismo. Dado que a composição e a identidade são como em $CONS$, temos o resultado desejado. $\blacksquare$

Observação 3.1.4

Ainda quando os $PROT$-morfismos e os $CONS$-morfismos coincidem (entre $PROT$-objetos), temos optado por expressar estes seguindo a noção intuitiva de "preservação de protoalgebrizabilidade". Esta forma de tratar os morfismos será comum a outras categorias a serem estudadas, as quais não são plenas em relação a $CONS$. $\square$

Agora, provemos que é possível fibrilar em $PROT$.

Teorema 3.1.5 *Sempre existe a fibrilação em $PROT$ (restrita e irrestrita).*

Demonstração: Dados $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, seja $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2 := \langle C_1 \uplus C_2, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, sendo $\vdash_{\mathcal{L}}$ a menor relação de conseqüência padrão $\vdash_{\mathcal{L}}$ sobre $L(C_1 \uplus C_2$ tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \alpha$ implica $\widehat{inc}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}} \widehat{inc}(\alpha)$. Em relação aos coprodutos, como $PROT$ é subcategoria plena de $CONS$, estes coincidem, e assim é válida a fibrilação irrestrita. Resta provar que a lógicas definidas em $CONS$ através de cofibrações são protoalgébricas (uma vez feito isso, os morfismos respectivos validam as propriedades necessárias). Com efeito, seja $(\mathcal{L}, f)$ um morfismo coestruturado entre $PROT$ e $PLAN$. Como $(\mathcal{L}, f)$ também é um morfismo coestruturado entre $CONS$ e $PLAN$, e $N : CONS \longrightarrow PLAN$ foi demonstrado ser uma cofibração [1], existe $\mathcal{L}'$ em $CONS$ tal que $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ é um $CONS$-morfismo. Por outro lado, como $\mathcal{L}$ é protoalgébrica, existe $PR(p,q)$ em $\mathcal{L}$ validando (R) e (MP). Como $\widehat{f}$ é uma tradução, $\widehat{f}(PR(p,q))$ também valida (R) e (MP) (para qualquer um dos protoalgebrizadores de $\mathcal{L}_1$). Assim $\mathcal{L}'$ é protoalgébrica. O restante das propriedades relativas à cofibração é herdado de $CONS$. ■

3.2 C-Fibrilação de Lógicas Equivalenciais

Diferentemente do caso das lógicas protoalgébricas, nas equivalenciais todos os seus conjuntos que as caracterizam são interderiváveis, como foi indicado na Proposição 1.5.3:

Definição 3.2.1 A categoria EQUIV *vem definida por:*
$EQUIV$-Objetos: lógicas equivalenciais.
$EQUIV$-morfismos: os $CONS$-morfismos $f : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ tais que, para todo par de equivalências Δ_i $(i = 1, 2)$ das lógicas $\mathcal{L}_i$ respectivas, vale que $\Delta_2(p_1, p_2) \vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\Delta_1(p_1, p_2))$. □

Observação 3.2.2

A definição dos $EQUIV$-morfismos está motivada pelo seguinte: a imagem de qualquer equivalência em $\mathcal{L}_1$ funciona usualmente como *relação de equivalência* também em $\mathcal{L}_2$, no sentido de validar reflexividade, simetria e transitividade. Porém, $\widehat{f}(\Delta_1)$ não tem por que ser congruência em relação a todos os conectivos de $C_{\mathcal{L}_2}$: poderiam existir conectivos desta última assinatura tais que a relação $\widehat{f}(\Delta_1)$ não seja compatível com eles. Isto é o que acontece, por exemplo, quando desejamos incluir um fragmento de uma lógica na lógica completa. Portanto, $\widehat{f}(\Delta_1)$ é *mais fraca que* Δ_2.

Por outro lado, a definição dos $EQUIV$-morfismos pode parecer algo complicada. Com efeito, poderíamos conjeturar que uma definição bem mais "natural" deveria exigir simplesmente que $\widehat{f}(\Delta_1)$ fosse uma equivalência em $\mathcal{L}_2$. Porém, lembremos dois fatos: em geral

[1] Isto é, que sempre existe elevação cocartesiana para todo morfismo coestruturado.

em Teoria de Categorias os morfismos deveriam preservar as propriedades em questão *nas imagens*. Assim, por exemplo, um morfismo entre espaços topológicos é uma função contínua, não necessariamente sobrejetora. Esta idéia é a que desejamos expressar com a definição dos $EQUIV$-morfismos.

Notemos no entanto que, justamente por causa da congruencialidade exigida para os conjuntos Δ, a categoria $EQUIV$ não será fechada por fibrilações. Por outro lado, veremos que a sub-categoria de $EQUIV$ cujos morfismos são os sugeridos no parágrafo anterior *é fechada por fibrilação*. Definimos tal categoria a seguir. $\square$

Definição 3.2.3 A categoria *$EQUIV^*$ é a sub-categoria de $EQUIV$ que possui os mesmos objetos, sendo que os $EQUIV^*$-morfismos verificam (para todo par de equivalências $\Delta_i(p_1, p_2) \in \mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$)*

$$(*) \quad \widehat{f}(\Delta_1(p_1, p_2)) \dashv\vdash_{\mathcal{L}_2} \Delta_2(p_1, p_2)$$

$\square$

Proposição 3.2.4 *A condição $(*)$ da definição anterior é equivalente a dizer que, se Δ_1 é uma equivalência em $\mathcal{L}_1$, então $\widehat{f}(\Delta_1)$ é uma equivalência em $\mathcal{L}_2$-*

Demonstração: Para toda lógica equivalencial $\mathcal{L}$ e para toda equivalência $\Delta(p_1, p_2)$ de $\mathcal{L}$ vale facilmente o seguinte: se $\Delta'(p_1, p_2) \subseteq L(C_{\mathcal{L}})$, e $\Delta(p_1, p_2)) \dashv\vdash_{\mathcal{L}_2} \Delta'(p_1, p_2)$, então $\Delta'(p_1, p_2)$ é uma equivalência. A recíproca é válida por causa da Proposição 1.5.3. $\blacksquare$

Os $EQUIV^*$-morfismos serão caracterizados segundo este último resultado. Notemos que é trivial que $EQUIV^*$ é uma categoria. No entanto, temos a seguinte:

Proposição 3.2.5 *$EQUIV^*$ não é uma subcategoria plena de $EQUIV$.*

Demonstração: Consideremos a lógica P^1 de Sette, já mencionada na no Exemplo 1.6.42. Lembremos que a linguagem de P^1 é também a linguagem da lógica clássica LPC. A principal diferença entre elas é que P^1 rejeita o princípio de não contradição $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, *mas somente quando* $\alpha \in \mathcal{V}$. No fragmento implicativo, P^1 e LPC coincidem. Lembremos também que em [Lewin et al., 1990] foi demonstrado que P^1 é algebrizável (e portanto equivalencial), sendo uma de suas equivalências $\Delta_{P^1} = \{p_1 \to p_2, p_2 \to p_1, \neg p_1 \to \neg p_2, \neg p_2 \to \neg p_1\}$ [2]. Ora, consideremos $P^1(\to)$, o $\{\to\}$-fragmento de P^1. Dado que coincide com o fragmento impliativo de LPC, é equivalencial com $\Delta_{\to_{P^1}} = \{p_1 \to p_2, p_2 \to p_1\}$. Obviamente, considerando inc o morfismo inclusão, $\widehat{inc}(\Delta_{P^1(\to)})$ não pode ser uma equivalência de P^1. Por outro lado,

[2]Implicitamente, podemos ver que $\{p_1 \to p_2, p_2 \to p_1\}$ não é uma equivalência de P^1.

$\Delta_{P^1}(p_1, p_2) \vdash_{P^1} \Delta_{P^1(\rightarrow)}(p_1, p_2)$ trivialmente. Assim, *inc* é um *EQUIV*-morfismo, mas não é um *EQUIV**-morfismo. ■

Notemos que das definições acima, não pode se provar se *EQUIV* é fechada por fibrilação. Porém, é possível provar tal resultado restritos a *EQUIV**:

Teorema 3.2.6 *EQUIV** *é fechada por fibrilação, tanto restrita como irrestrita.*

A prova do teorema acima enunciado pode ser obtida a partir dos seguintes resultados técnicos:

Definição 3.2.7 *Sejam* $\mathcal{L}_i = \langle C_i, \vdash_{\mathcal{L}_i}\rangle$ $(i = 1, 2)$ *duas lógicas de EQUIV***. Seja agora a família I de lógicas padrão* $\overline{\vdash}$*, com assinatura* $C_1 \uplus C_2 := \{C^i{}_1 \uplus C^i{}_2\}_{i\in \boldsymbol{N}}$ *verificando:*
(a): $\Gamma \vdash_i \alpha$ implica $\Gamma \overline{\vdash} \alpha$ para todo conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(C_i)$ $(i = 1, 2)$ [3]*.*
(b): $\varphi\Delta_i\psi \overline{\vdash} \varphi\Delta_j\psi$, para quaisquer par de equivalências Δ_i, Δ_j de $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_j$ respectivamente $(i, j \in \{1, 2\})$. Definimos agora a relação de conseqüência $\vdash$ em $L(C_1 \uplus C_2)$ como sendo o ínfimo (em $\mathbf{Pad}_{(\mathbf{C_1}\uplus\mathbf{C_2})}$*) da família I (tal ínfimo existe por causa da Proposição 1.1.16).* □

A relação $\vdash$ é, em definitiva, a *menor relação de conseqüência* que identifica as equivalências das distintas lógicas. Temos agora:

Proposição 3.2.8 *Sejam $\mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$, e seja $\mathcal{L} = \langle C_1 \uplus C_2, \vdash\rangle$. Então $\mathcal{L}$ é uma lógica equivalencial.*

Demonstração: Somente precisamos provar que qualquer equivalência Δ (de qualquer das lógicas $\mathcal{L}_i$ envolvidas) é uma equivalência de $\mathcal{L}$:
(i) $\vdash_{\mathcal{L}} p_1\Delta_1 p_1$:
(ii) $\{p_1\Delta_1 p_2\} \vdash_{\mathcal{L}} p_2\Delta_1 p_1$:
(iii) $\{p_1\Delta_1 p_2, p_2\Delta_1 p_3\} \vdash_{\mathcal{L}} p_1\Delta_1 p_3$:
Todas estas propriedades são herdadas das lógicas $\mathcal{L}_i$. Consideremos, por exemplo (ii): para $p, q \in \mathcal{V}$ temos $\{p\Delta_1 q\} \vdash_{\mathcal{L}} p\Delta_1 q$. Analogamente para Δ_2, aplicando (ii) a cada $\mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$. Logo, $\{p\Delta q\} \vdash_{\mathcal{L}} q\Delta p$. Como $\mathcal{L}$ é estrutural, temos o resultado desejado.
(iv) $\{\varphi_1\Delta\psi_1, \ldots, \varphi_k\Delta\psi_k\} \vdash_{\mathcal{L}} w(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\Delta w(\psi_1, \ldots, \psi_k)$, para todo $w \in (C_1 \uplus C_2)^k$:
Podemos provar (iv) da seguinte forma (denotando a $(p_1, ..., p_k)$ por $\vec{p}$, e a $(q_1, ..., q_k)$ por $\vec{q}$): Seja $w \in |C_1 \uplus C_2|$; se $w \in |C_1|$, então $p_1\Delta_1 q_1, \cdots, p_k\Delta_1 q_k \vdash_{\mathcal{L}} w(\vec{p})\Delta_1 w(\vec{q})$. Se $w \in |C_2|$, então: $p_1\Delta_1 q_1, \cdots, p_k\Delta_1 q_k \vdash_{\mathcal{L}} p_1\Delta_2 q_1, \cdots, p_k\Delta_2 q_k \vdash_{\mathcal{L}} w(\vec{p})\Delta_2 w(\vec{q}) \vdash_{\mathcal{L}} w(\vec{p})\Delta_1 w(\vec{q})$. ■

Corolário 3.2.9 *$\langle \mathcal{L}, inc_1, inc_2\rangle$ é um EQUIV*-cocone de $\langle \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}, \emptyset\rangle$.*

[3] Lembrar que $\Gamma \overline{\vdash} \alpha$ é, na verdade, uma abreviatura de $\widehat{inc}(\Gamma) \overline{\vdash} \widehat{inc}(\alpha)$

Demonstração: Dados $i = 1, 2$ sejam inc_i: $\mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{L}$ os "morfismos inclusão": isto é, $inc_i(w)$ $= w(p_1, ..., p_k)$. É claro que estes morfismos preservam equivalencialidade. ■

Desejamos provar que a lógica $\mathcal{L}$ da Definição 3.2.7 é o coproduto das lógicas $\mathcal{L}_i$. Para tal objetivo, primeiramente caracterizaremos $\vdash_{\mathcal{L}}$ a partir de bases inferenciais:

Definição 3.2.10 *A lógica* $\overline{\mathcal{L}}$ *é aquela caracterizada pela seguinte base inferencial de seqüêntes:*

$[Ax-1]$ $\quad \Gamma \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha$ *(Para toda conseqüência* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_i} \alpha$*, com* Γ *finito);*

$[Ax-2]$ $\quad p\Delta_i q \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} p{\Delta^k}_j q$

são os axiomas, enquanto que

$$[RI-1]\ \frac{\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha}{\Sigma, \Sigma' \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \alpha} \qquad [RI-2]\ \frac{\Sigma_1 \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \beta_1 \qquad \beta_1, \Sigma_2 \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \beta_2}{\Sigma_1, \Sigma_2 \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \beta_2} \qquad [RI-3]\ \frac{\Sigma \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \beta}{\widehat{\sigma}(\Sigma) \vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \widehat{\sigma}(\beta)}$$

são as regras de inferência. □

Proposição 3.2.11 $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$.

Demonstração: Dado que as linguagens coincidem, somente precisamos provar que as relações $\vdash_{\mathcal{L}}$ e $\vdash_{\overline{\mathcal{L}}}$ são a mesma. Temos que $\vdash_{\overline{\mathcal{L}}} \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$, pois os axiomas são sempre inferências de $\vdash_{\mathcal{L}}$ e as regras de inferência da Definição 3.2.10 preservam as inferências em $\vdash_{\mathcal{L}}$. Para demonstrar a outra inclusão, provaremos que $\vdash_{\mathcal{L}} \in I$; desse fato, pode deduzir-se $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vdash_{\overline{\mathcal{L}}}$, por Proposição 1.1.16 e Definição 3.2.7. Provemos portanto:
$a)$ $\overline{\mathcal{L}}$ é padrão: seja $\alpha \in \Gamma = \{\alpha, \beta_1, ..., \beta_k, ...\}$ [4]. Denotemos à cardinalidade de Γ por $\mathbf{card}(\Gamma)$; seja agora o conjunto $\Gamma' = \{p_{i+1}\}_{i \in \mathbf{card}(\Gamma)} \cup \{p_1\}$. Dado que $\Gamma' \subseteq L(C_i)$ $(i = 1, 2)$, temos que $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}} p_1$ é um axioma da base inferencial previamente definida. Seja agora a substituição σ em C, tal que $\sigma(p_1) = \alpha$, e $\sigma(p_{k+1}) = \beta_k$. Por $[RI-3]$ temos $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$. Assim, Extensividade é válida. Procedemos similarmente para monotonicidade, transitividade e estruturalidade. Para finitariedade, simplesmente notemos que, se (Γ, α) é um axioma, então é válido. E as aplicações das regras $[RI-1]$– $[RI-3]$ preservam-a.
Além disso, $\overline{\mathcal{L}}$ verifica as condições (a) e (b) da Definição 3.2.7 das aplicações dos axiomas da Definição 3.2.10. ■

Os resultados seguintes valem para qualquer cocone de $\langle\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}, \emptyset\rangle$.

[4]Notemos que Γ é no máximo enumerável, e portanto pode ser expresso dessa forma.

Proposição 3.2.12 *Se* $\langle \mathcal{L}', \{f_1, f_2\}\rangle$ *é um cocone em* $EQUIV^*$ *do diagrama* $\langle\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}, \emptyset\rangle$, *então sempre vale que* $\phi\widehat{f_1}(\Delta_1)\psi \dashv\vdash_{\mathcal{L}'} \phi\widehat{f_2}(\Delta_2)\psi$, *para todo par* $\{\phi, \psi\}\subseteq L(C_{\mathcal{L}}')$, *toda equivalência* Δ_1 *de* $\mathcal{L}_1$ *e toda equivalência* Δ_2 *de* $\mathcal{L}_2$.

Demonstração: Dado que $f_i(\Delta_i)$ é uma equivalência de $\mathcal{L}'$ (com $i = 1, 2$), da Proposição 3.2.4 temos o resultado desejado. ■

Definição 3.2.13 *Para todo* $EQUIV^*$*-cocone* $\langle \mathcal{L}', f_1, f_2\rangle$ *de* $\langle \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \emptyset\rangle$, *definimos o* $PLAN$*-morfismo* H: $C_{\mathcal{L}}\longrightarrow C_{\mathcal{L}'}$ *como:* $H(c) = f_i(c)$ *se e somente se* $c \in C_i$ $(i = 1, 2)$. □

Proposição 3.2.14 *Seja* $\mathcal{L}'$ *um cocone de* $\langle \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \emptyset\rangle$, *e seja* σ *uma substituição em* C. *Então, sempre existe uma substituição* σ' *em* C' *tal que* $\widehat{H} \circ \widehat{\sigma} = \widehat{\sigma'} \circ \widehat{H}$,*sendo* $\widehat{H}$ *a função induzida pelo* SIG*-morfismo da Definição 3.2.13.*

Demonstração: Análogo à Proposição 2.4.25. ■

Finalmente:

Teorema 3.2.15 $\langle \mathcal{L}, \widehat{inc_1}, \widehat{inc_2}\rangle$ *é o* $EQUIV^*$*-coproduto de* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$.

Demonstração: Dado o diagrama $\langle\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}, \emptyset\rangle$ em $EQUIV^*$, somente precisamos provar a propriedade universal para $\mathcal{L}$, por causa da Proposição 3.3.5. Assim, seja $\mathcal{L}'$ qualquer cocone para $\langle\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}, \emptyset\rangle$. Consideremos o $PLAN$-morfismo H dado na Definição 3.2.13. Provaremos que H: $\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}'$ é o único $EQUIV^*$-morfismo tal que $f_i = H \bullet inc_i$ $(1 = 1, 2)$:
(a) $\widehat{H}$ é uma tradução: aplicamos aqui a Proposição 3.2.11, provando (por indução no número de inferências aplicadas) que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ implica $\widehat{H}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\alpha)$. Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ é um axioma do tipo $[Ax{-}1]$, então $\Gamma\cup\{\alpha\}\subseteq L(C_i)$, com $i \in \{1, 2\}$. Logo $\widehat{f_i}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{f_i}(\alpha)$. Ou seja, $\widehat{H}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\alpha)$. Se é da forma $[Ax-2]$, provemos que $\{\widehat{H}(\varphi)\widehat{H}(\Delta_i^k)\widehat{H}(\psi) : 1 \leq k \leq m_i\} \vdash_{\mathcal{L}} \widehat{H}(\varphi)\widehat{H}(\Delta^t)\widehat{H}(\psi)$ (com $1 \leq t \leq m_j$), sendo Δ_i, Δ_j equivalências respectivas de $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$. Ou seja, devemos provar $\widehat{H}(\varphi)\widehat{f_i}(\Delta_i)\widehat{H}(\psi) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\varphi)\widehat{f_j}(\Delta_j)\widehat{H}(\psi)$. Fato que é valido, por causa da Proposição 3.2.12, $\widehat{H}(\varphi), \widehat{H}(\psi) \in L(C_{\mathcal{L}'})$, e $\widehat{f_i}(\Delta_i) = \widehat{H}(\Delta_i)$ $(i = 1, 2)$. Suponhamos agora que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ a partir da aplicação de alguma das regras de inferência $[RI-1]$-$[RI-3]$. Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ foi obtido por causa de uma inferência de tipo $[RI - 1]$, então existe $\Sigma \cup \Sigma'$ $(=\Gamma)$ tal que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ mediante uma seqüência de comprimento $j < k$. Assim, por Hipótese de Indução, $\widehat{H}(\Sigma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\alpha)$. Como $\mathcal{L}'$ é monôtona, $\widehat{H}(\Gamma) = \widehat{H}(\Sigma \cup \Sigma') \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\alpha)$, como desejávamos. Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ é obtido por a regra $[RI - 2]$ o argumento é similar. Ora, suponhamos que $\Gamma = \widehat{\sigma}(\Sigma)$, $\alpha = \widehat{\sigma}(\beta)$, e $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \beta$ em j passos $(j < k)$. Da Hipótese de Indução, $\widehat{H}(\Sigma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\beta)$. Seja agora a substituição $\widehat{\sigma'}$ definida na Proposição 3.2.13.

Dado que $\mathcal{L}'$ é estrutural, $\widehat{\sigma'}(\widehat{H}(\Sigma)) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{\sigma'}(\widehat{H}(\beta))$. Aplicando Proposição 3.2.13 temos que $\widehat{H}(\widehat{\sigma}(\Sigma)) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\widehat{\sigma}(\beta))$. Ou seja, $\widehat{H}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\alpha)$.
(b) $\widehat{H}(\xi)\widehat{H}(\Delta)\widehat{H}(\eta) \dashv\vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{H}(\xi)\Delta'\widehat{H}(\eta)$ para quaisquer equivalências Δ e Δ' de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ respectivamente: isto é implícito na prova da Proposição 3.2.12, considerando que $\widehat{H}(\Delta) = \widehat{f_1}(\Delta_1) \cup \widehat{f_2}(\Delta_2)$ para $\Delta = \Delta_1 \uplus \Delta_2$.
(c) $f_i = H \bullet inc_i$. Óbvio.
(d) H é único. Com efeito, suponhamos que existe H': $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ verificando (a) - (c). É fácil provar (por indução na complexidade de α) que $\widehat{H}(\alpha) = \widehat{H'}(\alpha)$ para toda $\alpha \in L(C)$ ■

Finalmente, provemos:

Teorema 3.2.16 *Seja $N : EQUIV^* \longrightarrow PLAN$ o funtor esquecimento. Então, N é uma cofibração.*

Demonstração: Seja $(\mathcal{L}, F)$ um morfismo coestruturado para N, sendo $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$. Logo, F é um $PLAN$-morfismo de $C_{\mathcal{L}}$ a $\longrightarrow C'$ para algum $PLAN$-objeto C'. Definimos o $EQUIV^*$-objeto $\mathcal{L}' = \langle L', \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$ como sendo o ínfimo (no reticulado $\mathbf{Pad_{C'}}$) das relações de conseqüência $\vDash$ que, além de ser padrão verificam:
(1) Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$ e Γ é finito, então $\widehat{F}(\Gamma) \vDash \widehat{F}(\alpha)$.
(2) Para todo $w \in C'^k$, para quaisquer $\varphi_1, \cdots, \varphi_k, \psi_1, \cdots \psi_k \in L(C')$, e para toda equivalência Δ de $\mathcal{L}$, é válido $\varphi_1\widehat{F}(\Delta)\psi_1, \cdots, \varphi_k\widehat{F}(\Delta)\psi_k \vdash_{\mathcal{L}} w(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)\widehat{F}(\Delta)w(\psi_1, \cdots, \psi_k)$.

Obviamente, $\mathcal{L}'$ é uma lógica padrão, e pode ser expressa, por similares considerações à Proposição 3.2.11, como:
$[Ax-1]$ $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$ (Com $\Gamma = \widehat{F}(\Gamma')$ para algúm Γ' finito), $\alpha = \widehat{F}(\alpha')$, tais que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$
$[Ax-2]$ $\varphi_1\widehat{F}(\Delta)\psi_1, \cdots, \varphi_k\widehat{F}(\Delta)\psi_k \vdash_{\mathcal{L}'} w(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)\widehat{F}(\Delta)w(\psi_1, \cdots, \psi_k)$
(Para toda equivalência Δ de $\mathcal{L}$, $w \in C'^k$, e todo conjunto $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k, \psi_1, \cdots, \psi_k\} \subseteq L(C')$), como axiomas, sendo as regras as mesmas $[RI-1]-[RI-3]$.
Por outro lado, é claro que $\mathcal{L}'$ é equivalencial, sendo uma das suas equivalências $\widehat{F}(\Delta)$, por causa da Proposição 3.2.4. De fato, as condiçãoes $(i)-(iii)$ são triviais, e (iv) é simplesmente o axioma $[Ax-2]$. Agora, devemos provar que $F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ é um $EQUIV^*$-morfismo: seja $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, e provemos que $\widehat{F}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}} \widehat{F}(\alpha)$. Imediato, considerando $[Ax-1]$ e que $\mathcal{L}$ é finitária, e $\mathcal{L}'$ monotônica. Por outro lado, $p\widehat{F}(\Delta)q \dashv\vdash_{\mathcal{L}'} p\Delta'q$ para toda equivalência Δ' de $\mathcal{L}'$ (pois $\widehat{F}(\Delta)$ é uma equivalência). Aplicando estruturalidade de $\mathcal{L}'$, obtemos o resultado desejado. Assim, temos que $N(F)=F$
Para provar a propriedade universal, seja $G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}''$ um $EQUIV^*$-morfismo, e $H : C' \longrightarrow C''$ um $PLAN$-morfismo tal que $H \bullet F = G$ (em $PLAN$). Provemos (por indução no número de inferências aplicadas) que o próprio H é um $EQUIV^*$-morfismo. Primeiramente, $\widehat{H}$ é uma tradução:

Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$ por causa do $[Ax-1]$, então $\Gamma = \widehat{F}(\Gamma')$, $\alpha = \widehat{F}(\alpha')$ com $\Gamma \cup \{\alpha'\} \subseteq L(C)$, $\Gamma \cup \{\alpha'\}$ finito. Assim, $\widehat{G}(\Gamma') \vdash_{\mathcal{L}''} \widehat{G}(\alpha')$. Isto é, $\widehat{H}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}''} \widehat{H}(\alpha)$ pois $H \bullet F = G$.
Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}''} \alpha$ por causa de $[Ax-2]$, então $\Gamma = \{\varphi_1 \widehat{F}(\Delta)\psi_1, \cdots, \varphi_k \widehat{F}(\Delta)\psi_k\}$ e
$\alpha = c(\vec{\varphi})\widehat{F}(\Delta)c(\vec{\psi})$. Assim, precisamos provar:
$\widehat{H}(\varphi_1)\widehat{G}(\Delta)\widehat{H}(\psi_1), ...\widehat{H}(\varphi_k)\widehat{G}(\Delta)\widehat{H}(\psi_k) \vdash_{\mathcal{L}''} \widehat{H}(\alpha)\widehat{G}(\Delta)\widehat{H}(\alpha)$. Este resultado pode ser obtido *para todo* $\alpha(p_1, ..., p_k) \in L(C')$, por indução na complexidade de α [5].
Ora, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}''} \alpha$ é obtida por aplicaçãoes das regras $[RI-1]-[RI-3]$ procedemos como no Teorema 3.2.15. Portanto, $\widehat{H}$ é uma tradução.
Finalmente, temos que $\widehat{H}(\varphi)\widehat{H}(\Delta')\widehat{H}(\psi) \dashv\vdash_{\mathcal{L}''} \widehat{H}(\varphi)\Delta^*\widehat{H}(\psi)$ (Para toda equivalência Δ' em $\mathcal{L}'$, e toda equivalência Δ^* em $\mathcal{L}''$) da seguinte forma: $\varphi\Delta'\psi \dashv\vdash_{\mathcal{L}'} \varphi\widehat{F}(\Delta)\psi$ para qualquer equivalência Δ de $\mathcal{L}$. Logo, $\widehat{H}(\varphi)\widehat{H}(\Delta')\widehat{H}(\psi) \dashv\vdash_{\mathcal{L}''} \widehat{H}(\varphi)\widehat{G}(\Delta)\widehat{H}(\psi)$, pois $\widehat{H}$ é tradução. Por outro lado, dado que $\widehat{H}(\varphi)\widehat{G}(\Delta)\widehat{H}(\psi) \dashv\vdash_{\mathcal{L}''} \widehat{H}(\varphi)\Delta^*\widehat{H}(\psi)$, nosso postulado vale pela transitividade de $\vdash_{\mathcal{L}''}$. ■

Desta forma, o Teorema 3.2.6 é demonstrado dos Teoremas 3.2.15 e 3.2.16. É bom indicar o seguinte: os resultados demonstrados aqui terão o seu análogo na categoria de lógicas algebrizáveis. Discutiremos isto com mais detalhe na próxima seção.

3.3 C-Fibrilação de Lógicas Algebrizáveis

Estudaremos aqui duas categorias diferentes de lógicas algebrizáveis. Diferem no comportamento dos morfismos na preservação *da equivalencialidade*. Assim, os morfismos são simplesmente os morfismos de $EQUIV$ e de $EQUIV^*$ respectivamente. Isto é devido a que o comportamento dos morfismos nas equivalências é suficiente para determinar o comportamento dos morfismos nos algebrizadores.

Definição 3.3.1 *A categoria ALGE é aquela cujos objetos são lógicas algebrizáveis, conforme a Definição 1.6.28, e cujos morfismos são EQUIV-morfismos. Similarmente, a categoria $ALGE^*$ tem os mesmos objetos de ALGE e os morfismos da categoria $EQUIV^*$.* □

Proposição 3.3.2 *As seguintes condições são equivalentes:*
(a) $F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ *é um $ALGE^*$-morfismo.*
(b) $[F(\delta_1), F(\varepsilon_1), F(\Delta_1)]$ *é um algebrizador de $\mathcal{L}_2$, para todo algebrizador $(\delta_1, \varepsilon_1, \Delta_1)$ de $\mathcal{L}_1$.*

[5] A demonstração deste fato é simples, mas tediosa. Omitimos portanto os seus detalhes.

Demonstração: (a) implica (b): claramente, $\mathcal{V} \subseteq L(C_1)$, $pF(\Delta_1)q \dashv\vdash_{\mathcal{L}} p\Delta_2 q$ para quaisquer $p, q \in \mathcal{V}$. Logo, para todo par $\nu, \eta \in L(C_2)$, $\nu F(\Delta_1)\eta \dashv\vdash_{\mathcal{L}_2} \nu\Delta_2\eta$. Assim, é fácil demonstrar que $[F(\delta), F(\varepsilon), F(\Delta)]$ satisfaz a caracterização de algebrizabilidade fornecida no Teorema 1.6.32.
(b) implica (a): Se (b) valer temos que $F(\Delta)$ é uma equivalência de $\mathcal{L}_2$. Aplicamos agora Proposição 1.5.3, e obtemos (a). ■

Adaptando os resultados obtidos para as categorias de lógicas equivalenciais podemos demonstrar, em relação às lógicas algebrizáveis o resultado essencial desta seção [6]:

Teorema 3.3.3 *A categoria $ALGE^*$ é fechada por fibrilação, tanto restrita como irrestrita.*

A prova deste enunciado segue o mesmo raciocínio que a similar para lógicas equivalenciais (Teorema 3.2.6). Portanto são precisos resultados técnicos similares, indicados a seguir. Somente no caso de ser explicitamente necessário (sobretudo em relação às equações definidoras), forneceremos as demonstrações correspondentes.

Proposição 3.3.4 *Sejam $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, 2$) líogicas algebrizáveis (e portanto equivalenciais), e seja $\mathcal{L}=\langle L(C_1 \uplus C_2), \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$, seu coproduto em $EQUIV^*$ (ver Definição 3.2.7); então $\mathcal{L}$ é uma lógica algebrizável.*

Demonstração: Obviamente, $\mathcal{L}$ é equivalencial (pois as lógicas $\mathcal{L}_i$ são equivalenciais, e os morfismos em $EQUIV^*$ e $ALGE^*$ coincidem). Provemos que $(\delta, \varepsilon) := \uplus_{i=1,2}(\delta_i, \varepsilon_i)$ é um conjunto de equações definidoras para $\mathcal{L}$. Para isso é suficiente provar que (δ, ε) verifica a condição (b) do Teorema 1.6.32. Somente é preciso demonstrar $\theta \dashv\vdash_{\mathcal{L}} \delta_i(\theta)\Delta_j\varepsilon_i(\theta)$ com $i \neq j$ (Se $i = j$ o resultado é obviamente válido). Utilizamos aqui a Definição 3.2.7 (b) mais uma vez: $p \vdash_{\mathcal{L}} \delta_1(p)\Delta_1\varepsilon_1(p) \vdash_{\mathcal{L}} \delta_1(p)\Delta_2\varepsilon_1(p)$. Finalmente aplicamos estruturalidade. A outra inferência do Teorema 1.6.32 (b) é trivial. ■

Corolário 3.3.5 *$\langle \mathcal{L}, inc_1, inc_2\rangle$ é um $ALGE^*$-cocone de $\langle\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}, \emptyset\rangle$.*

Proposição 3.3.6 *Todo $ALGE^*$-cocone de $\langle \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \emptyset\rangle$ é um $EQUIV^*$-cocone de $\langle \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \emptyset\rangle$.*

Demonstração: Óbvio. ■

Proposição 3.3.7 *Seja $\mathcal{L}'$ um cocone de $\langle \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \emptyset\rangle$, e seja σ uma substituição em C. Então, sempre existe uma subsituição σ' em C' tal que $\widehat{H} \circ \widehat{\sigma} = \widehat{\sigma'} \circ \widehat{H}$, sendo H a função induzida por H da Definição 3.2.13.*

[6] Resultado já apresentado em [Fernández – Coniglio, 2004].

Demonstração: De fato, estamos enunciando novamente a Proposição 3.2.14 ■

Ora, provaremos:

Teorema 3.3.8 *Dadas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ duas lógicas algebrizáveis, e $\langle \mathcal{L}, inc_1, inc_2 \rangle$ o seu $EQUIV^*$-coproduto, então $\langle \mathcal{L}, inc_1, inc_2 \rangle$ é o seu $ALGE^*$-coproduto.*

Demonstração: Por causa da Proposicção 3.3.4 precisamos provar somente a propriedade universal em $ALGE^*$; tal propriedade verifica-se por causa de que os morfismos considerados são os mesmos que em $EQUIV^*$. ■

Assim, do teorema anterior e o Teorema 3.2.15 fica obviamente demonstrado que:

Lema 3.3.9 *$ALGE^*$ é fechada por co-produtos.*

Em relação à fibrilação restrita:

Lema 3.3.10 *Seja $N : ALGE^* \longrightarrow PLAN$ o funtor esquecimento. Então, N é uma cofibração.*

Demonstração: Consideremos o N-morfismo coestruturado $(\mathcal{L}, F)$, sendo $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$. Logo, $F : C_{\mathcal{L}} \longrightarrow C'$ para algum $PLAN$-objeto C'. Consideremos agora o $EQUIV^*$-objeto $\mathcal{L}' = \langle C', \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$ definido no Teorema 3.2.16: $\mathcal{L}'$ é trivialmente padrão, e equivalencial. Por causa da Proposição 3.3.2, temos que $\mathcal{L}'$ também é um $ALGE^*$-objeto. Por outro lado, $F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ é um $ALGE^*$-morfismo pois é um $EQUIV^*$-morfismo. A propriedade universal é análoga ao resultdo similar para $EQUIV^*$. ■

Do lema anterior e do Lema 3.3.9, infere-se o enunciado do Teorema 3.3.3. Finalizaremos esta seção com dois corolários óbvios dos teoremas anteriores, mas que podem ser de utilidade na análise da algebrizabilidade de uma certa lógica dada. Tais resultados são:

Corolário 3.3.11 *Seja $\mathcal{L}$ uma lógica proposicional. Se ela pode ser "decomposta" em dois fragmentos (ver Definição 1.1.9) $\mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$ tal que $\mathcal{L}_i \circledast \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$, e tais fragmentos são algebrizáveis, então $\mathcal{L}$ é algebrizável.*

O corolário acima é, em outras palavras, o mesmo Teorema 3.3.8, expresso em termos de "fragmentos" de uma lógica dada. Mais interessante é, novamente referido a fragmentos, o seguinte resultado:

Corolário 3.3.12 *Seja $\mathcal{L}$ uma lógica proposicional não algebrizável. Se existem duas lógicas $\mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$ tais que $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$, e $\mathcal{L}_1$ é algebrizável, então $\mathcal{L}_2$ é não algebrizável.*

Demonstração: Trivial. ■

Vemos que o resultado anterior diz que, em caso de acontecerem as hipóteses acima mencionadas, poderemos "isolar" o fragmento não algebrizável da lógica $\mathcal{L}$ analisada. Por outro lado, é conveniente estudar cuidadosamente a fibrilação entre certos fragmentos de uma lógica determinada: lembremos que, segundo a Observação 2.4.28, tais fragmentos, ao serem fibrilados, podem não reproduzir a lógica original.

Até aqui um estudo sintético da fibrilação categorial na Hierarquia de Leibniz. Notemos que temos trabalhado exclusivamente com categorias de linguagens e de lógicas. No próximo capítulo, o nosso interesse será outro: a definição e estudo da C-fibrilação em categorias de semânticas para as lógicas envolvidas.

Capítulo 4

C-Fibrilação de Estruturas Associadas

O objetivo deste capítulo é, basicamente, adaptar o conceito de C-fibrilação (inicialmente definido em lógicas) a operações entre estruturas matemáticas que fornecem semânticas adequadas para tais lógicas. De certa forma, este processo está vinculado ao que entendemos por "preservação externa de propriedades" na Seção 2.3.

De fato, se as relações de conseqüência são definidas por estruturas "externas" às lógicas, podemos tentar analisar o processo que combina ditas estruturas. Tal processo (que denominaremos C-fibrilação de estruturas), adicionalmente deve produzir uma nova estrutura *que seja adequada à lógica fibrilada* $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$. Desta forma, a lógica $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$ pode também ser entendida como aquela cuja semântica adequada é a estrutura fibrilada. Assim, o processo de C-fibrilação converte-se num processo "externo".

As classes de estruturas que estudaremos neste capítulo são duas: a primeira é a classe das semânticas matriciais. Dado que toda lógica estrutural admite semântica matricial, a C-fibrilação de lógicas matriciais poderia associarse à C-fibrilação numa categoria de lógicas estruturais. Porém, neste texto, associaremos a fibrilação de semânticas matriciais à C-fibrilação na categoria de lógicas padrão (isto é, em $CONS$), por motivos que detalharemos no início da Seção 4.1. A segunda classe de estruturas cuja fibrilação será estudada é a classe das *semânticas algébricas equivalentes* [1].

4.1 C-Fibrilação na classe das semânticas matriciais

Na Proposição 1.2.5 temos mencionado que a relação de conseqüência determinada por

[1] Os elementos de tal clase são quase-variedades, como sugere a Observação 1.6.29.

uma classe de matrizes, ainda quando estrutural, não precisa ser finitária. Porém neste texto temos optado por trabalhar exclusivamente com lógicas finitárias. Isto é devido a dois fatos, principalmente: o primeiro é que em geral temos nos baseado em [Blok – Pigozzi, 1989] fundamentalmente, e dita monografia estuda somente lógicas padrão. O segundo, e mais importante, é o seguinte: existe, como veremos a seguir, uma relação estreita entre semânticas matriciais e Teoria de Modelos, como foi sobretudo notado por S. Bloom. Esta relação, entre outras coisas, afirma que *uma lógica estrutural é padrão se e somente se a classe* $Mod(\mathcal{L})$ *pode ser axiomatizada, em primeira ordem, por um conjunto finito de fórmulas Horn.* E é justamente esta axiomatização a que vai nos permitir *fibrilar classes de modelos matriciais.* Portanto, para poder fibrilar (classes de) matrizes vamos precisar de lógicas finitárias.

Tudo o esboçado até agora será feito no percurso desta seção formalmente. Os resultados seguintes são creditados a Bloom (ver [Bloom, 1975]). A nossa exposição, mais uma vez, segue a exposição de [Wójcicki, 1988] e [Czelakowski, 2001]. Para os conceitos básicos de Teoria de Modelos aqui utilizados mas não explicitados temos nos baseado em [Chang – Keisler, 1973].

Essencialmente, o que desejamos saber é de que forma a Teoria de Modelos clássica trata de matrizes. Foi com tal objetivo que definimos as linguagens C-PO na Seção 1.2 (ver Definição 1.2.9). Desta forma foi possível identificar os conjuntos de valores distingüidos com um símbolo **D** de predicado unário. Agora relacionaremos inferências com fórmulas da linguagem C-PO:

Definição 4.1.1 *Seja uma inferência padrão (ou seja, estrutural e finitária) na linguagem* $L(C)$. *Isto é, um conjunto* $r = \alpha_1(p_1, ..., p_n), ..., \alpha_m(p_1, ...p_n)/\beta(p_1, ..., p_n)$ [2]. **A fórmula de** C**-PO associada a** r *é:*

$$(\overline{r}) := \forall(p_1)...\forall(p_n)(\mathbf{D}(\alpha_1) \barwedge ... \barwedge \mathbf{D}(\alpha_m) \Rightarrow \mathbf{D}(\beta))$$

Uma vez feita esta"tradução" de regras padrão a fórmulas de $C - PO$, temos os seguintes resultados essenciais:

Lema 4.1.2 [Lema de Bloom]*: Seja* $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ *tal que* $\vdash_{\mathcal{L}}$ *está determinada por um conjunto* R *de regras padrão na linguagem* $L(C)$*. Então a classe* $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L})$ *é a classe de todos os modelos (no sentido de Teoria de Modelos) do conjunto de fórmulas* $\{(\overline{r}) : r \in R\}$*. Isto é,* $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}) = Mod\{(\overline{r}) : r \in R\}$

Observação 4.1.3 Notar que, para toda lógica $\mathcal{L}$, todos os conjuntos $\langle L(C), T\rangle$ com $T \in Th(\mathcal{L})$ são elementos de $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L})$. Tais matrizes são usualmente chamadas de **fibrados de Lindenbaum da lógica $\mathcal{L}$.** □

[2] Lembrar que as inferências são simplesmente conjuntos de fórmulas, cf. Definição 2.4.20.

Teorema 4.1.4 [Teorema de Bloom]*: Seja $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ uma lógica estrutural. As seguintes condições são equivalentes:*
(i) A classe $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L})$ *é axiomatizable por fórmulas de* $C_{\mathcal{L}} - PO$*.*
(ii) A classe $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L})$ *é axiomatizable por fórmulas Horn de* $C_{\mathcal{L}} - PO$*.*
(iii) $\vdash_{\mathcal{L}}$ *é padrão.*
(iv) $\vdash_{\mathcal{L}}$ *tem uma base inferêncial R de regras padrão (ou seja, esquemáticas e finitas).*

Com estes resultados podemos "fibrilar" classes de matrizes. Para isso, começaremos com as seguintes definições:

Definição 4.1.5 *Dadas duas assinaturas C_1 e C_2, e um $PLAN$-morfismo f entre C_1 e C_2 (lembrar Definição 2.4.8), a* **tradução entre os termos de** $Ter(C_1)$ **e** $Ter(C_2)$ *induzida por f é simplesmente a função $\widehat{f}$. A* **tradução entre as linguagens de primeira ordem** $LPO(C_1)$ **e** $LPO(C_2)$ *é a função $\overline{f} : C_1 - PO \longrightarrow C_2 - PO$ definida por:*
(a) $\overline{f}(D(\varphi)) := D(\widehat{f}(\varphi))$*, para toda fórmula* $D(\varphi) \in C_1 - PO$*.*
(b) $\overline{f}(A \longrightarrow B) := \overline{f}(A) \longrightarrow \overline{f}(B)$
(c) $\overline{f}(\neg A) := \neg(\overline{f}(A))$
(d) $\overline{f}(\forall(p)A) := \forall(p)\overline{f}(A)$
para todo par de fórmulas A e B de $C_1 - PO$.

Um fato simples de demonstrar dentro da lógica de primeira ordem é o seguinte:

Proposição 4.1.6 *Se $\widehat{f}$ é uma tradução entre termos, então, para todo conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\}$ de fórmulas da linguagem $LPO(C_1)$vale que, se $\Gamma \models \alpha$, então $\widehat{f}(\Gamma) \models \widehat{f}(\alpha)$, sendo $\models$ a relação de conseqüência da lógica clássica de primeira ordem.*

Demonstração: É simples demonstrar que as traduções entre termos preservam validade dos axiomas e regras de inferência da lógica clássica de primeira ordem. ■

É bom notar aqui que a proposição anterior indica que as traduções entre termos preservam a validade dos "axiomas lógicos" da lógica de primeira ordem. Porém, tais traduções *não preservam validade de axiomas "novos" (não lógicos)*, em caso de estes serem acrescentados com o objetivo de definir teorias novas. No caso em que as traduções entre termos conseguirem preservar a validade dos novos axiomas é que estaremos em presença do análogo (em linguagens $C - PO$) às traduções entre lógicas proposicionais. É com esta motivação que podemos definir a categoria de classes de modelos matriciais da seguinte forma:

Definição 4.1.7 *Definimos a* **Categoria** $MATR$ **de modelos matriciais** *da seguinte forma:*

(a) *MATR-Objetos: pares da forma* $(C, \mathbf{Mmat}(\mathcal{L}))$*, sendo* $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L})$ *a classe dos modelos matriciais para uma lógica padrão* $\mathcal{L}$*, cuja assinatura é* C.

(b) *MATR-Morfismos: PLAN-morfismos que adicionalmente verificam, para todo conjunto* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *de fórmulas de* $LPO(C_1)$*, que* $\Gamma \models_{\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_1)} \alpha$ *implica* $\widehat{f}(\Gamma) \models_{\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_2)} \widehat{f}(\alpha)$*, sendo as relações* $\models_{\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_i)}$ *as usuais definidas pelas classes* $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_i)$ *segundo a Teoria de Modelos* [3].

(c) *A composição e a identidade são as de PLAN.*

Proposição 4.1.8 *MATR é, de fato, uma categoria.*

Demonstração: Obviamente, a composição está bem definida e é associativa, assim como a identidade. ■

Observação 4.1.9

Notemos antes do próximo resultado que, uma vez fixada C, as classes $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L})$ são semânticas matriciais de uma única lógica possível com assinatura C. Isto é devido, essencialmente, a que a própria lógica fornece modelos matriciais (mediante teorias) para ela mesma, conforme indicado na Observação 4.1.3. Logo, $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L})$ corresponde implicitamente a uma certa assinatura fixa $C_{\mathcal{L}}$. Além disso, vimos que $\vdash_{\mathbf{Mmat}(\mathcal{L})}$ é *fortemente adequada a* $\mathcal{L}$. cf. Proposição 1.2.6. Assim, tanto a linguagem quanto a relação de conseqüência associadas a $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L})$ ficam univocamente determinadas.

Porém, se não fixarmos C, poderiamos ter duas lógicas $\mathcal{L}_i = \langle C_i, \vdash_i \rangle$, em que existe uma bijeção entre C_1 e C_2, e $\vdash_1$ é essencialmente a mesma que $\vdash_2$. Neste caso, as lógicas são isomorfas (em $CONS$) mas não são a mesma lógica (pois diferem nas assinaturas). Por outro lado, é fácil ver que $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_1) = \mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_2)$ [4]. Dado que desejamos obter fibrilação de matrizes via isomorfismo, precisamos "indexar" aos objetos da categoria $MATR$ com as assinaturas respectivas. □

Teorema 4.1.10 *CONS e MATR são categorias isomorfas.*

Demonstração: Definimos o funtor $G_1 : CONS \longrightarrow MATR$ da seguinte maneira:
Se $\mathcal{L}$ um $CONS$-objeto, então $G_1(\mathcal{L}) := (C_{\mathcal{L}}, \mathbf{Mmat}(\mathcal{L}))$. Por outro lado, se f é um $CONS$-morfismo entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, $G_1(f) := \overline{f}$ (ou seja, a função entre linguagens de primeira ordem,

[3]Como veremos, (b) é análogo a solicitar que $\widehat{f} : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ seja uma tradução.

[4]Dado que as próprios fibrados de Lindenbaum de $\mathcal{L}_1$ pertencem à classe $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_1)$, temos o curioso fato de que acabam sendo modelos matriciais de $\mathcal{L}_2$. Analogamente para os fibrados de Lindenbaum de $\mathcal{L}_2$.

induzida pelo $CONS$-morfismo f). Tal definição faz sentido, por causa do Lema 4.1.2. Por outro lado, definimos o funtor $G_2 : MATR \longrightarrow CONS$ como: $G_2((C_{\mathcal{L}}, \mathbf{Mmat}(\mathcal{L}))) := \mathcal{L}$; e $G_2(\overline{f}) := f$. Similarmente a G_1, G_2 está bem definido.

A preservação de composição e identidade são óbvias. Além disso, $G_2(G_1(f)) = f$ e $G_1(G_2(\overline{f})) = \overline{f}$. Somente resta demonstrar que $G_2(G_1(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$ e $G_1(G_2((C_{\mathcal{L}}, \mathbf{Mmat}(\mathcal{L})))$ $= (C_{\mathcal{L}}, \mathbf{Mmat}(\mathcal{L}))$. Mas tais fatos são válidos, novamente, por causa do Lema de Bloom. ■

Neste ponto é bom notar um fato fundamental: o que nós temos entendido como fibrilação na classe $MATR$ de semânticas matriciais *não é exatamente o conceito de fibrilação dado no segundo capítulo.* A razão disto é que a fibrilação, tal como foi definida, é um colimite de certo diagrama realizado em categorias de lógicas. Porém, a fibrilação em $MATR$ "imita" a fibrilação em $CONS$, e daíque o nome seja o mesmo. Isto é o que entendiamos por "fibrilação externa" no início deste capítulo. Isto tem a ver com o seguinte corolário ao Teorema anterior:

Corolário 4.1.11 *Em $MATR$ sempre existe o co-produto entre dois objetos* $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_\mathbf{1})$ *e* $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_\mathbf{2})$*. Tal coproduto será chamado de "fibrilação irrestrita de modelos matriciais". Além disso, o funtor esquecimento $N : MATR \longrightarrow PLAN$ é uma co-fibração. Portanto, em $MATR$ podem ser definidas certas elevações co-cartesianas (análogas às de $CONS$) que serão denominadas de C-fibrilações de modelos matriciais, restritas à assinatura C_0.*

<u>Demonstração</u>: Óbvio. ■

Corolário 4.1.12 *A classe* $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_\mathbf{1}) \circledast \mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_\mathbf{2})$ *é aquela que é modelo da união disjunta das fórmulas Horn que axiomatizam cada classe* $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_\mathbf{i})$ *($i = 1, 2$)*

<u>Demonstração</u>: Lembrar que $\mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_\mathbf{1}) \circledast \mathbf{Mmat}(\mathcal{L}_\mathbf{2})$ é a semântica matricial associada a $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$, cuja base inferencial é a união disjunta das bases de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. E dai aplicamos Definição 4.1.1. ■

4.2 C-Fibrilação das semânticas algébricas equivalentes

Esta seção estabelece o resultado análogo, referido a classes de álgebras, ao estabelecido na seção anterior. Isto quer dizer que aqui definiremos *categorias de classes de álgebras* (de fato, de quase-variedades que sejam semânticas equivalentes). Modificando tal categoria com o objetivo de fazê-la isomorfa a $ALGE^*$, poderemos fibrilar semânticas algébricas equivalentes. Desejamos indicar aqui que este resultado também já foi apresentado em [Fernández – Coniglio, 2004], e está muito influenciado pelo artigo [Jánossy et al., 1996]. Curiosamente, esta seção que aqui aparece foi a motivação inicial que permitiu definir a fibrilação entre semânticas matriciais da seção anterior. Para atingir nosso objetivo começaremos definindo, dentro da lógica equacional das quase-variedades, o análogo aos algebrizadores das lógicas proposicionais.

Definição 4.2.1 *Seja C uma assinatura e $\mathcal{K}$ uma quase-variedade (sendo portanto $\models_{\mathcal{K}}$ uma relação de conseqüência finitária) expressa em $LEq(C)$. Sejam os seguintes conjuntos de termos de $LEq(C)$ (ou seja, de fórmulas de $L(C)$): $\delta = \{\delta_i\}_{i\leq n}$, $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i\leq n}$ (termos 1-ários), e $\Delta = \{\Delta_j\}_{j\leq m}$. Dizemos que $(\delta, \varepsilon, \Delta)$ é um* **dedutivizador de** *$\mathcal{K}$ se e somente se $\models_{\mathcal{K}}$ verifica:*
$x \approx y \dashv\models_{\mathcal{K}} \varepsilon(x\Delta y) \approx \delta(x\Delta y)$.
Dizemos que **uma quase-variedade $\mathcal{K}$ é dedutivizável** *se possui um dedutivizador.*

Ou seja, $\mathcal{K}$ é dedutivizável se e somente se é semântica equivalente de alguma lógica proposicional. Com isto implicitamente estamos indicando que nem toda quase-variedade é dedutivizável, em analogia ao fato de que nem todas as lógicas proposicionais são algebrizáveis. Por outro lado veremos daqui a pouco que os algebrizadores das lógicas acabam sendo os dedutivizadores das suas semânticas algébricas equivalentes.

Observação 4.2.2

Um fato de grande importância dentro da lógica algébrica abstrata é o seguinte: uma mesma quase-variedade pode ser semântica algébrica de diversas lógicas. Isto é devido a que o comportamento algébrico da quase-variedade não consegue distinguir as conseqüências válidas das não válidas. Assim, por exemplo, como foi indicado em [Blok – Pigozzi, 0?], a classe de álgebras que é semântica algébrica da lógica $Ł_3$ de Łukasiewicz é a mesma que a classe que constitui a semântica algébrica de J_3 de I. D'Ottaviano e da Costa (ver [D'Ottaviano – da Costa, 1970] e [D'Ottaviano, 1982]). Um resultado similar, provando que as lógicas já estudadas P^1 e I^1 possuim a mesma semântica, pode se achar em [Bueno, 2004]. Tal fato merece a seguinte observação.

Usualmente é possível defininir conectivos secundários a partir dos originais, como sendo "abreviaturas". Em tal caso, podemos analisar as relações de conseqüência válidas entre fórmulas expressas mediante os conectivos secundários. Assim por exemplo, é possível definir, com a implicação e negação de P^1, um conectivo binário $\rightarrow_{I^1}$ e um conectivo unário $\neg_{I^1}$.

Tais conectivos possuem as mesmas propriedades que a implicação e negação de I^1. Logo, na quase-variedade associada a P^1 valem as quase-equações correspondentes às relações de conseqüência de I^1, *mas operando nas fórmulas correspondentes aos conectivos secundários*:

não operamos aqui com os conectivos originais $\to_{P^1}$ e $\neg_{P^1}$. Como, por outro lado, é possível proceder em forma inversa (de I^1 a P^1) [5], acabamos obtendo que as quase-variedades, entendidas na sua forma puramente algébrica e sem levar em conta a assinatura na qual elas foram baseadas, acabam sendo a mesma. Mas, por outro lado, se indexarmos Q_{P^1} e Q_{I^1} pelas suas assinaturas (ou, como é comum na álgebra universal, pelos seus tipos de similaridade), tais quase-variedades não coincidem. Isto é porque são as mesmas álgebras mas *aplicadas a diferentes operações*. Isto quer dizer que os dedutivizadores das quase-variedades não são "essencialmente" o mesmo no seu caráter estritamente algébrico, a não ser que seja fixada a assinatura na qual trabalhar. Portanto, se nós quisermos associar *de forma unívoca* uma lógica a aquela quase-variedade que é a sua semântica algébrica equivalente, primeiramente teriamos que "indexá-la"com o algebrizador respetivo.

O caso de $Ł_3$ e J_3 é talvez diferente: os conectivos aqui são os mesmos *mas os conjuntos de equações definidoras não*. De fato, J_3 pode ser entendida como a lógica induzida pela mesma álgebra de Łukasiewicz de domínio $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ (ver [Cignoli et al., 1995]) mas onde o seu conjunto de valores distingüidos é $\{\frac{1}{2}, 1\}$, a diferença de $Ł_3$, em que o único valor distingüido é 1. Isto leva a que as equações definidoras sejam diferentes embora a classe de álgebras (e ainda a equivalência Δ) seja a mesma. Um exemplo similar foi fornecido em [Blok – Pigozzi, 1989], Seção 5.2.4.

Do acima exposto, se quisermos nos referir a uma semântica algébrica equivalente *de uma lógica $\mathcal{L}$ fixa*, tal semântica deverá em princípio estar indexada tanto pela sua assinatura (pelo exemplo de I_1 e P_1) quanto pelo conjunto de equações definidoras $(\delta, \varepsilon)_{\mathcal{L}}$. Ou mais geralmente, como faremos nas definições a seguir, *indexaremos as quase-variedades segundo os seus dedutivizadores*.

Por outro lado acontece o seguinte fato: ainda quando uma quase-variedade dedutivizável pode admitir diversos dedutivizadores, muitos deles estão associados a uma mesma lógica (de uma forma que será explicitada a seguir). Assim, chegamos à conclusão de que, se o "indexador" das quase-variedades dedutivizáveis fosse simplesmente um dedutivizador acabaríamos tendo muitas quase-variedades associadas a uma única lógica (o fenômeno inverso do parágrafo anterior). Para evitar este fato, indexaremos as quase-variedades com *classes de equivalência* definidas no conjunto dos dedutivizadores. $\square$

Definição 4.2.3 *Dada uma quase-variedade dedutivizável $\mathcal{K}$, definimos a* **relação de equivalência $\simeq_{\mathcal{K}}$ entre os dedutivizadores de $\mathcal{K}$** *como:*
$(\delta, \varepsilon, \Delta) \simeq_{\mathcal{K}} (\delta', \varepsilon', \Delta')$ *sse* $\delta(x) \approx \varepsilon(x) \mathrel{=\!\!|\!\models_{\mathcal{K}}} \delta'(x) \approx \varepsilon'(x)$. *A classe de equivalência de $(\delta, \varepsilon, \Delta)$ em relação a $\simeq_{\mathcal{K}}$ será denotada por $[\delta, \varepsilon, \Delta]_{\mathcal{K}}$.*

[5] Pelo fato de acontecer o acima descrito, dizemos que I^1 e P^1 são "fortemente inter-tradutíveis", cf. [Blok – Pigozzi, 0?].

Para completar as definições formais de que precisamos, veremos finalmente os conceitos de "tradução entre termos" e de "tradução entre linguagens equacionais".

Definição 4.2.4 *Dadas duas assinaturas C_1 e C_2, e um $PLAN$-morfismo f entre elas, consideremos a $\widehat{f}$ (a tradução entre os termos de $Ter(C_1)$ e $Ter(C_2)$ induzida por f, segundo a Definição 4.1.5). A* **tradução entre as linguagens equacionais** $LEq(C_1)$ **e** $LEq(C_2)$ *é a função $\overline{f} : LEq(C_1) \longrightarrow LEq(C_2)$ definida por:*
(a) $\overline{f}(\nu \approx \eta) := \widehat{f}(\nu) \approx \widehat{f}(\eta)$, para toda equação $\nu \approx \eta \in EQ(C_1)$.
(b) $\overline{f}(A \longrightarrow B) := \overline{f}(A) \longrightarrow \overline{f}(B)$
(c) $\overline{f}(\neg A) := \neg(\overline{f}(A))$
(d) $\overline{f}(\forall(p)A) := \forall(p)\overline{f}(A)$
para todo par de fórmulas A e B de $LEq(C_1)$.

Observação 4.2.5

Usualmente não explicitaremos o fato de que as traduções entre termos são simplesmente aquelas funções induzidas por $PLAN$-morfismos. Por outro lado, dado que tanto em $LEq(C_1)$ quanto em $LEq(C_2)$ estamos trabalhando com lógica clássica equacional não é difícil provar que as traduções entre termos induzem traduções nas relações de conseqüência respectivas. $\square$

Agora podemos definir a categoria de semânticas de que precisamos:

Definição 4.2.6 *Definimos a categoria $SEMA$ [6] da seguinte forma:*
$SEMA$-objetos: 3-uplas $\mathcal{A} = \langle C, \mathcal{K}, [\varepsilon, \delta, \Delta]_{\mathcal{K}} \rangle$, sendo C uma assinatura, $\mathcal{K}$ uma quase-variedade expressa em termos de $LEq(C)$ e $[(\delta, \varepsilon, \Delta)]_{\mathcal{K}}$ é a classe de equivalência (relativa a $\simeq_{\mathcal{K}}$) do dedutivizador $(\delta, \varepsilon, \Delta)$.
$SEMA$-morfismos: dados os $SEMA$-objetos $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, um $SEMA$-morfismo entre eles é uma tradução $\overline{f}$ entre termos de $Ter(C_1)$ e $Ter(C_2)$ verificando:

1) *Se $\Lambda \models_{\mathcal{K}_1} (\nu \approx \eta)$ então $\overline{f}(\Lambda) \models_{\mathcal{K}_2} \overline{f}(\nu \approx \eta)$, para todo conjunto $\Lambda \cup \{\nu \approx \eta\}$ de $\mathcal{K}_1$-equações.*

2) *Para todo termo τ de $Ter(C_1)$, $\varepsilon_2(\overline{f}(\tau)) \approx \delta_2(\overline{f}(\tau)) \dashv\models_{\mathcal{K}_2} \overline{f}(\varepsilon_1(\tau)) \approx \overline{f}(\delta_1(\tau))$*

Proposição 4.2.7 *Toda tradução entre termos verifica, para todo $\Lambda \cup \{\nu \approx \eta\} \in LEq(C_1)$, que se $\Lambda \models \nu \approx \eta$ então $\overline{F}(\Lambda) \models \overline{F}(\nu \approx \eta)$ (no sentido da teoria de modelos).*

Demonstração: Trivial. ■

[6] O nome $SEMA$ vem de "semânticas algébricas", obviamente.

Proposição 4.2.8 *Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ duas lógicas de $ALGE^*$, sendo $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, 2)$ as suas respectivas semânticas algébricas equivalentes. Dado o $ALGE^*$-morfismo $f : C_1 \longrightarrow C_2$, e $\widehat{f}$ a função associada, são equivalentes os fatos (a) e (b), com:*
(a): Para todo conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(C_1)$, todo par de fórmulas φ, ψ de $L(C_1)$, e para toda equivalência Δ_1 em $\mathcal{L}_1$:
$(a.1)$: Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \alpha$ então $\widehat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\alpha)$;
$(a.2)$: $\widehat{f}(\varphi)\Delta_2\widehat{f}(\psi) \dashv\vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\varphi)\widehat{f}(\Delta_1)\widehat{f}(\psi)$
(b) Para todo conjunto $\Lambda \cup \{\nu \approx \eta\}$ de $\mathcal{K}_1$-equações, para todo termo $\tau \in Ter(C_1)$:
$(b.1)$ Se $\Lambda \models_{\mathcal{K}_1} \nu \approx \eta$ então $\overline{f}(\Lambda) \models_{\mathcal{K}_2} \overline{f}(\nu \approx \eta)$
$(b.2)$ $\varepsilon_2(\overline{f})(\tau) \approx \delta_2\overline{f}(\tau) \mathrel{=\!\mid\models}_{\mathcal{K}_2} \overline{f}(\varepsilon_1(\tau)) \approx \overline{f}(\delta_1(\tau))$

Demonstração: Provaremos somente que de (a) infére-se (b), pois a outra implicação é similar; dividimos a demonstração em duas partes:
Parte 1): (a) implica $(b.1)$. Suponhamos que $\Lambda \models_{\mathcal{K}_1} \varphi \approx \psi$ para algum conjunto Λ de equações. Dado que $\mathcal{K}_1$ é finitária, podemos considerar que $\Lambda' \models_{\mathcal{K}_1} \varphi \approx \psi$ para algum $\Lambda' \subseteq \Lambda$, ou seja $\Lambda' = \{\xi_i \approx \eta_i\}_{1 \leq i \leq k}$. Ora, considerando que $[\varepsilon_1, \delta_1, \Delta_1]_{\mathcal{K}_1}$ é um dedutivizador de $\mathcal{K}_1$, temos $\{\varepsilon_1(\xi_i\Delta_1\eta_i) \approx \delta_1(\xi_i\Delta_1\eta_i)\}_{1 \leq i \leq k} \models_{\mathcal{K}_1} \varphi \approx \psi$. Assim, $\{\xi_i\Delta_1\eta_i\}_{1 \leq i \leq k} \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi\Delta_1\psi$, pois $\mathcal{L}_1$ é algebrizável. Por $(a.1)$ temos $\{\widehat{f}(\xi_i)\widehat{f}(\Delta_1)\widehat{f}(\eta_i)\}_{1 \leq i \leq k} \vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\varphi)\widehat{f}(\Delta_1)\widehat{f}(\psi)$. Assim, por $(a.2)$ (aplicado a ambos lados de $\vdash_{\mathcal{L}_2}$) temos $\{\widehat{f}(\xi_i)\Delta_2\widehat{f}(\eta_i)\}_{1 \leq i \leq k} \vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\varphi)\Delta_2\widehat{f}(\psi)$. E como $\mathcal{L}_2$ também é algebrizável,

$$\{\varepsilon_2(\widehat{f}(\xi_i)\Delta_2\widehat{f}\ (\eta_i)) \approx \delta_2(\widehat{f}(\xi_i)\Delta_2\widehat{f}(\eta_i))\}_{1 \leq i \leq k} \models_{\mathcal{K}_2} \widehat{f}(\varphi) \approx \widehat{f}(\psi)$$

Isto é, $\overline{f}(\Lambda') \models_{\mathcal{K}_2} \overline{f}(\varphi \approx \psi)$. Assim, $(b.1)$ é válida, considerando que $\models_{\mathcal{L}_2}$ é monotônica.
Parte 2): (a) implica $(b.2)$. Seja $\tau \in Ter(C_1)$. Podemos considerar portanto que $\tau \in L(C_1)$. Dado que $\mathcal{L}_1$ é algebrizável, $\tau \vdash_{\mathcal{L}_1} \varepsilon_1(\tau)\Delta_1\delta_1(\tau)$. Por $(a.1)$, $\widehat{f}(\tau) \vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\varepsilon_1(\tau)\Delta_1\delta_1(\tau))$. Isto é, $\widehat{f}(\tau) \vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\varepsilon_1(\tau))\widehat{f}(\Delta_1)\widehat{f}(\delta_1(\tau))$. Além disso, por $(a.2)$, $\widehat{f}(\tau) \vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\varepsilon_1(\tau))\Delta_2\widehat{f}(\delta_1(\tau))$. Por outro lado, $\varepsilon_2(\widehat{f}(\tau))\Delta_2\delta_2(\widehat{f}\tau)) \vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\tau)$, pois $\mathcal{L}_2$ é algebrizável e além disso $\widehat{f}(\tau) \in L(C_2)$. Por transitividade, $\varepsilon_2(\widehat{f}(\tau))\Delta_2\delta_2(\widehat{f}\tau)) \vdash_{\mathcal{L}_2} \widehat{f}(\varepsilon_1(\tau))\Delta_2\widehat{f}(\delta_1(\tau))$. Dado que $[(\varepsilon_2, \delta_2), \Delta_2]$ é um $\mathcal{L}_2$-algebrizador temos que $\varepsilon_2(\widehat{f}(\tau)) \approx \delta_2(\widehat{f}(\tau)) \models_{\mathcal{K}_2} \widehat{f}(\varepsilon_1(\tau)) \approx \widehat{f}(\delta_1(\tau))$ (e pelas propriedades dos algebrizadores). A prova da outra consqüência equacional é similar. Assim, (a) implica $(b.2)$. Das partes (1) e (2) temos que (a) implica (b). ■

Em outras palavras, este resultado indica que os $ALGE^*$-morfismos e os $SEMA$-morfismos são essencialmente os mesmos. Provaremos a seguir que todo objeto de $SEMA$ é semântica algébrica de alguma lógica proposicional.

Proposição 4.2.9 *Para todo objeto* $\mathcal{A} = \langle C, \mathcal{K}, [\varepsilon, \delta, \Delta]\rangle$ *de* $SEMA$*, existe um objeto* $\mathcal{L}$ *de* $ALGE^*$ *tal que* $\mathcal{K}$ *é uma semântica algébrica equivalente para* $\mathcal{L}$*.*

Demonstração: Definimos $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$, com $\vdash_{\mathcal{L}}$ definido assim (para todo $\Gamma \cup \{\alpha\}$): $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ se e somente se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ se e somente se $\varepsilon(\Gamma) \approx \delta(\Gamma) \models_{\mathcal{K}} \varepsilon(\alpha) \approx \delta(\alpha)$ [7]. É óbvio aqui que $\mathcal{L}$ é uma lógica algebrizável, sendo um algebrizador o conjunto $(\varepsilon, \delta, \Delta)$. Portanto, $\mathcal{K}$ é uma semântica equivalente para $\mathcal{L}$. ■

Todas as definições e resultados acima têm como objetivo o seguinte teorema:

Teorema 4.2.10 $ALGE^*$ *e* $SEMA$ *são categorias isomorfas.*

Demonstração: Os funtores G_1: $ALGE^* \longrightarrow SEMA$ e G_2: $SEMA \longrightarrow ALGE^*$ são definidos como segue:
(1.1) Para todo $ALGE^*$-objeto $\mathcal{L}=\langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$, $G(\mathcal{L}) := \langle C, \mathcal{K}_{\mathcal{L}}, [((\delta,\varepsilon)_{\mathcal{L}}, \Delta_{\mathcal{L}})]\rangle$, sendo $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ a única quase-variedade que é semântica algébrica equivalente a $\mathcal{L}$ (obviamente ela está em $SEMA$ pela Proposição 4.2.9), e $((\delta,\varepsilon)_{\mathcal{L}}, \Delta_{\mathcal{L}})$ é um algebrizador qualquer de $\mathcal{L}$.
(1.2) Para todo $ALGE^*$-morfismo $f : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$, $G_1(f) = \overline{f}$. A definição faz sentido por causa da Proposição 4.2.8.
(2.1) Para todo objeto $\mathcal{A}$ de $SEMA$, $G_2(\mathcal{A})$ é aquela lógica $\mathcal{L}$ em $ALGE^*$, obtida pela construção da Proposição 4.2.9.
(2.2) Para todo morfismo $\overline{f} : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$, $G_2(\overline{f}) = f$. Também aqui a definição faz sentido por causa da Proposição 4.2.8.

Temos assim que $G_2(G_1(f)) = f$ e que $G_1(G_2(\overline{f})) = \overline{f}$ (das definições acima), para qualquer $ALGE^*$-morfismo f. Notemos que é fácil provar que G_1 e G_2 preservam composição de morfismos e os morfismos identidade. Logo, somente precisamos demonstrar que $G_2(G_1(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$ para todo $ALGE^*$-objeto $\mathcal{L}$, e que $G_1(G_2(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$ para todo $SEMA$-objeto $\mathcal{A}$:
(I) Seja $\mathcal{L}$ um $ALGE^*$-objeto. Obviamente $C_{(G_2(G_1(\mathcal{L})))} = C_{\mathcal{L}}$. Por outro lado, para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \in L(C_{(G_2(G_1(\mathcal{L})))})$, $\Gamma \vdash_{G_1(G_2(\mathcal{L}))} \alpha$ se e somente se existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$, (Γ' finito) tal que $\{\varepsilon(\psi) \approx \delta(\psi) : \psi \in \Gamma'\} \models_{\mathcal{K}} \varepsilon(\alpha) \approx \delta(\alpha)$, (sendo $\mathcal{K}$ a quase-variedade implícita em $G(\mathcal{L})$), se e somente se $\{\varepsilon(\psi)\Delta\delta(\psi) : \psi \in \Gamma'\} \vdash_{\mathcal{L}} \varepsilon(\psi)\Delta\delta(\psi)$ (pois $(\varepsilon, \delta, \Delta)$ é um algebrizador de $\mathcal{L}$), se e somente se $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ para algum Γ' finito incluido em Γ, se e somente se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$.
(II) Seja agora $\mathcal{A} = \langle C_{\mathcal{A}}, \mathcal{K}_{\mathcal{A}}, [\delta, \varepsilon, \Delta]_{\mathcal{A}}\rangle$ em $SEMA$. Para demonstrar que $G_1(G_2(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$ é suficiente provar que $\models_{G_1(G_2(\mathcal{K}_{\mathcal{A}}))} = \models_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$. Seja $\Lambda \cup \{\nu \approx \eta\}$ um conjunto de $\mathcal{K}$-equações. Então, $\Lambda \models_{G_1(G_2(\mathcal{K}_{\mathcal{A}}))} \nu \approx \eta$ se e somente se existe um conjunto finito $\{\nu_i \approx \eta_i\}_{i \leq n} \subseteq \Lambda$ tal que $\{\nu_i \approx \eta_i\}_{i \leq n} \models_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \nu \approx \eta$ se e somente se $\{\nu_i \Delta \eta_i\}_{i \leq n} \vdash_{G_1(\mathcal{A})} \nu\Delta\eta$, pois $\mathcal{K}_{G_1(\mathcal{A})}$ é uma

[7] Dado que $\mathcal{K}$ é uma quase-variedade e toda quase-variedade é finitária, a afirmação anterior equivale simplesmente a dizer que existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ (Γ' finito) tal que $\varepsilon(\Gamma') \approx \delta(\Gamma') \models_{\mathcal{K}} \varepsilon(\alpha) \approx \delta(\alpha)$.

semântica algébrica equivalente à lógica $G_1(\mathcal{A})$. Se e somente se (da definição de G_1), existe um conjunto finito $\{\nu_i \approx \eta_i\}_{i\leq n}\subseteq\Lambda$ tal que $\{\nu_i \approx \eta_i\}_{i\leq n} \models_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \nu \approx \eta$, se e somente se ($\mathcal{K}$ é finitária), $\Lambda \models_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \nu \approx \eta$.
De (I), (II) e as considerações acima, o teorema é válido. ■

O corolário óbvio é:

Corolário 4.2.11 *A categoria $SEMA$ possui sempre coprodutos, e $N : SEMA \longrightarrow PLAN$ é uma cofibração.*

Observação 4.2.12

Desta forma, é possível definir operações entre classes de álgebras da mesma forma ao feito para semânticas matriciais. Notar que, por exemplo, no caso do co-produto em $SEMA$ (isto é, a fibrilação irrestrita de semânticas algébricas equivalentes), ele é a classe $\mathcal{K}_1 \circledast \mathcal{K}_2$ axiomatizada (quase-equacionalmente) pela união disjunta dos axiomas de $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ *com os seguintes axiomas adicionais*: $\bigwedge_{k\leq i}({\delta^k}_i \approx {\varepsilon^k}_i) \Rightarrow {\delta^r}_j \approx {\varepsilon^r}_j$, com $i, j = 1, 2$, $1 \leq i \leq n_i$, $1 \leq j \leq n_j$ (sendo n_i e n_j o cardinal das equivalências Δ_i e Δ_j) e $i \neq j$ [8]. Ou seja, acrescentamos como axiomas da classe $\mathcal{K}_1 \circledast \mathcal{K}_2$ aquelas fórmulas de $LEq(C_1 \uplus C_2)$ que indicam que no coproduto precisamos inter-derivabilidade entre equivalências (lembrar que $SEMA$ é isomorfa a $ALGE^*$). Em relação à co-fibração, os axiomas novos a serem acrescentados são os que exigem congruencialidade para todo conectivo da assinatura C'. □

Dado que já podemos "identificar" à categoria $ALGE^*$ com $SEMA$, utilizaremos este fato para dar o último resultado deste capítulo: uma nova caracterização dos $ALGE^*$-morfismos em termos do operador de Leibniz Ω restrito a teorias. Para isso observemos os seguintes fatos referidos ao operador Ω: neste ponto lembraremos a idéia fundamental que relaciona o Operador de Leibniz Ω com a definição de algebrizabilidade de Blok-Pigozzi: uma lógica é algebrizável sse $Th_\mathcal{L}$ e $Th_\mathcal{K}$ são isomorfos; tal isomorfismo é expressável em termos de Ω (restrito ao reticulado $\mathbf{Th}_\mathcal{L}$) (ver o Teorema 1.6.35 e o Lema 1.6.36, já utilizados).

Com esta idéia podemos agora caracterizar os morfismos de $ALGE^*$. Mas vejamos antes que podemos caracterizar tanto as traduções de lógicas quanto as traduções entre linguagens equacionais como sendo "funções fechadas" para teorias e para teorias equacionais respectivamente:

[8] Este é um outro motivo pelo qual trabalhamos nesta tese com algebrizadores *finitos*: em caso de não ser assim, os axiomas não seriam quase-equações, e a classe definida não seria uma quase-variedade mas uma *classe implicativa*, cf. indicado em [Herrmann, 1996]. De qualquer modo, ao trabalhar com classes implicativas para definir semânticas algébricas equivalentes não mudaríamos nenhum resultado substancialmente.

Proposição 4.2.13 *$f : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ é um CONS-morfismo se e somente se para toda teoria $T \in Th_{\mathcal{L}_2}$ vale que $\widehat{f}^{-1}(T) \in Th_{\mathcal{L}_1}$.*

Demonstração: Ver [da Silva et al., 1999], por exemplo. □.

Proposição 4.2.14 *Sejam $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ duas classes de álgebras, e Ax_1 e Ax_2 os conjuntos de axiomas respectivos, tal como é definido na seção anterior. Temos que $\overline{f}$ é uma tradução entre as linguagens equacionais de Ax_1 e Ax_2 [9], se e somente se, para todo $\Theta \in Th_{\mathcal{K}_2}$, $\overline{f}^{-1}(\Theta) \in Th_{\mathcal{K}_1}$ (isto é, $\overline{f}$ é tradução entre linguagens equacionais se e somente se $\overline{f}^{-1}$ é uma função fechada entre conjuntos de equações).*

Demonstração: Ver [van Benthem – Pearce, 1984] ■

Observação 4.2.15

Notemos que, se f é um $ALGE^*$-morfismo entre as lógicas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ (sendo portanto $\widehat{f}$ uma tradução), cujas semânticas respectivas são $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$, então f pode ser entendida como uma tradução entre termos, induzindo uma tradução $\overline{f}$ entre linguagens equacionais, que por sua vez induz uma função $\overline{f}^{-1} : Th_{\mathcal{K}_1} \longrightarrow Th_{\mathcal{K}_2}$. Assim, a partir de $\widehat{f}$ temos definido duas novas funções (entre conjuntos de teorias): a função $\widehat{f}^{-1} : Th_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow Th_{\mathcal{L}_2}$ da Proposição 4.2.13 e $\overline{f}^{-1} : Th_{\mathcal{K}_2} \longrightarrow Th_{\mathcal{K}_1}$. Por outro lado, lembremos que os reticulados acima mencionados estão relacionados por meio do operador de Leibniz Ω, segundo o Teorema 1.6.35. Destes fatos podemos agora caracterizar os morfismos de $ALGE^*$ mediante Ω: □

Proposição 4.2.16 *Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ dois $ALGE^*$-objetos, sendo $f : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ um CONS-morfismo (ou seja, $\widehat{f}$ uma tradução). Sejam $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, 2)$ as suas semânticas algébricas equivalentes respectivas. Sejam agora $\widehat{f}^{-1} : Th(L_2) \longrightarrow Th(L_1)$ e $\overline{f}^{-1} : Th_{\mathcal{K}_2} \longrightarrow Th_{\mathcal{K}_1}$ os morfismos induzidos segundo as observações anteriores. Então, são equivalentes:*
a) $\widehat{f}(\varphi)\widehat{f}(\Delta_1)\widehat{f}(\psi) \dashv\vdash_{L_2} \widehat{f}(\varphi)\Delta_2\widehat{f}(\psi)$ para quaisquer fórmulas φ, ψ de $L(C_1)$.
b) Para toda teoria T de $Th_{\mathcal{L}_2}$, $\Omega(\widehat{f}^{-1}(T)) = \overline{f}^{-1}(\Omega(T))$.

Demonstração:
a) implica b) : seja $(\varphi \approx \psi) \in \Omega(\widehat{f}^{-1}(T))$. Do Lema 1.6.36, $\varphi\Delta_1\psi \in \widehat{f}^{-1}(T)$. Logo $\widehat{f}(\varphi)\widehat{f}(\Delta_1)\widehat{f}(\psi) \in T$. De a), e o fato de ser T teoria, temos que $\widehat{f}(\varphi)\Delta_2\widehat{f}(\psi) \in T$. Logo, $(\widehat{f}(\varphi) \approx \widehat{f}(\psi)) \in \Omega(T)$. Como $(\overline{f}(\varphi \approx \psi)){:=}(\widehat{f}(\varphi) \approx \widehat{f}(\psi))$, temos que $(\varphi \approx \psi) \in$

[9]Aqui a axiomática é indicada com o único objetivo de fixar os símbolos lingüísticos que expressam cada classe.

$\overline{f}^{-1}(\Omega(T))$. Temos assim $\Omega(\widehat{f}^{-1}(T)) \subseteq \overline{f}^{-1}(\Omega(T))$. A outra inclusão é análoga, por causa da dupla inferência em L_2 da hipótese.
<u>b) implica a)</u>: provemos primeiramente que $\widehat{f}(\varphi)\widehat{f}(\Delta_1)\widehat{f}(\psi) \vdash_{L_2} \widehat{f}(\varphi)\Delta_2\widehat{f}(\psi)$ para todo par de fórmulas φ, ψ de $L(C_2)$: seja $T{:=}Cn\{\widehat{f}(\varphi)\widehat{f}(\Delta_1)\widehat{f}(\psi)\} \in Th(L_2)$, e provemos que $\widehat{f}(\varphi)\Delta_2\widehat{f}(\psi) \in T$: como $\widehat{f}(\varphi)\widehat{f}(\Delta_1)\widehat{f}(\psi) \in T$, temos da definição de $\widehat{f}$ que $(\varphi\Delta_1\psi) \in \widehat{f}^{-1}(T)$. Logo, $(\varphi \approx \psi) \in \Omega(\widehat{f}^{-1}(T)) = \overline{f}^{-1}(\Omega(T))$ (por b)). Logo $(\widehat{f}(\varphi) \approx \widehat{f}(\psi)) \in \Omega(T)$, e finalmente (ver Lema 1.6.36) $\widehat{f}(\varphi)\Delta_2\widehat{f}(\psi) \in T$. A outra inferência é demonstrada de forma dual. ■

Da Proposição anterior é imediato o Corolário seguinte:

Corolário 4.2.17 (Ver Figura 3): f é morfismo de $ALGE^*$ se e somente se, valida:
a') $f : L_1 \longrightarrow L_2$ é $CONS$-morfismo.
b') Para toda teoria $T \in Th_{\mathcal{L}_2}$ vale que $\Omega(\widehat{f}^{-1}(T)) = \overline{f}^{-1}(\Omega(T))$, sendo $\overline{f}$ a tradução entre linguagens equacionais induzida pela função f.

Figura 3

$$ALGE^* \stackrel{\Omega}{\longmapsto} SEMA$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_2 \arrow[r, dotted] & Th_{\mathcal{L}_2} \arrow[rr, "\Omega"] \arrow[d, "\widehat{f}^{-1}"] & & Th_{\mathcal{K}_2} \arrow[d, "\overline{f}^{-1}"] & \mathcal{K}_2 \arrow[l, dotted] \\
\mathcal{L}_1 \arrow[u, "\widehat{f}"] \arrow[r, dotted] & Th_{\mathcal{L}_1} \arrow[rr, "\Omega"] & = & Th_{\mathcal{K}_1} & \mathcal{K}_1 \arrow[l, dotted] \arrow[u, "\overline{f}"]
\end{tikzcd}$$

Uma questão interessante é saber se a caracterização dada para os $ALGE^*$-morfismos pode ser aplicada a $PROT$-morfismos ou a $EQUIV^*$-morfismos. Infelizmente não podemos dar uma resposta afirmativa para tal questão. O motivo disso é que não possuímos uma "categoria isomorfa" às últimas categorias mencionadas onde interpretar Ω. Ainda assim, notemos que possuímos uma categoria isomorfa à categoria $CONS$, qual seja a categoria $MATR$. O problema de caracterizar os $CONS$-morfismos (e implicitamente os $MATR$-morfismos) mediante o operador de Leibniz é un dos tantos problemas em aberto cujo estudo propomos no último capítulo.

Capítulo 5

G-Fibrilação de Lógicas

Neste capítulo prescindimos da idéia categorial de fibrilação. O motivo desta nova abordagem é que, conforme foi indicado na Seção 2.1, a idéia de D.Gabbay era misturar diretamente as semânticas de Kripke para certas lógicas modais. E, em tal processo, não se fazia nenhuma menção a formalismos categoriais. Assim, a tarefa que tentaremos realizar aqui será adaptar a fibrilação segundo Gabbay (chamada de G-fibrilação) ao contexto de lógicas matricias. E, posteriormente, ver de que forma tal mecanismo pode ser relacionado com a Hierarquia de Leibniz.

5.1 G-Fibrilação de Semânticas Matriciais

Já vimos na Motivação 2.1.1 quais são as idéias por trás da fibrilação de lógicas. Agora vejamos como foram aplicadas tais idéias no contexto da combinação de lógicas modais (ou, melhor, das suas semânticas). Um exemplo disso será apresentado a seguir. Mas, dado que a G-fibrilação foi originalmente concebida para semânticas de Kripke, fornecemos primeiramente uma definição delas adequada o suficiente para este trabalho:

Definição 5.1.1 *Uma* **assinatura modal (normal)** *é uma assinatura C tal que $C^1 = \{\neg, \Box\}$; $C^2 = \{\to\}$; $C^i = \emptyset$, para todo $i \geq 3$. Uma* **linguagem modal (normal)** [1] *é uma linguagem $L(C)$ tal que C é uma assinatura modal normal. Um* **modelo de Kripke** *(para lógicas modais normais) é uma terna $m = \langle W_m, R_m, h_m\rangle$ tal que:*
- W_m é um conjunto (denominado "conjunto de mundos possíveis" de m).

[1] No percurso deste texto, quando utilizarmos a expressão "modal", implicitamente estaremos entendendo "modal normal".

- $R_m \subseteq (W_m)^2$ *(denominada a "relação de acessibilidade" de m).*

- $h_m : \mathcal{V} \longrightarrow \wp(W_m)$ *(denominada a "valoração" de m).*

Uma semântica de Kripke é uma classe Kr cujos membros são modelos de Kripke. □

Dada uma assinatura modal C e uma semântica de Kripke Kr é possível definir uma relação de conseqüência $\vdash_{Kr}$ em $L(C)$, como veremos a seguir:

Definição 5.1.2 *Fixada uma assinatura modal C e uma semântica de Kripke Kr, definimos a relação de conseqüência $\vdash_{Kr} \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$ da seguinte forma:*
(1) *Dado $m \in Kr$ e $w \in W_m$, diremos que "m valida a fórmula α no mundo w" (simbolizado por $m \Vdash_w \alpha$) se valer (segundo a complexidade de α):*

- *Se $\alpha \in \mathcal{V}$, $m \Vdash_w \alpha$ sse $w \in h_m(\alpha)$.*
- *Se $\alpha = \neg\beta$, então $m \Vdash_w \alpha$ sse $m \nVdash_w \beta$.*
- *Se $\alpha = \beta \rightarrow \delta$ então $m \Vdash_w \alpha$ sse $m \nVdash_w \beta$ ou $m \Vdash_w \delta$.*
- *Se $\alpha = \Box\beta$, então $m \Vdash_w \alpha$ sse, para todo $w' \in W_m$ tal que wR_mw' vale que $m \Vdash_{w'} \beta$.*

(2) *Dizemos que "m valida a fórmula α" (simbolizado por $m \Vdash \alpha$) sse, para todo mundo $w \in W_m$ vale que $m \Vdash_w \alpha$.*
(3) *Dadas $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(C)$, dizemos que "$\alpha$ é conseqüência de Γ" (segundo a semântica Kr) (simbolizado por $\Gamma \vdash_{Kr} \alpha$) sse todo modelo $m \in Kr$ tal que $m \Vdash \gamma$ (para todo $\gamma \in \Gamma$) verifica $m \Vdash \alpha$.*
Uma lógica $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ tal que $C_{\mathcal{L}}$ é uma assinatura modal, e $\vdash_{\mathcal{L}} = \vdash_{Kr}$ para alguma semântica de Kripke, se denomina **lógica modal**. □

Em suma, a definição anterior é (fora algumas diferenças estilísticas) a conhecida semântica relacional de Kripke. Notemos que os modelos de Kripke atuam de forma similar às valorações das semânticas matriciais. Isto é, definem satisfabilidade *local*. Por outro lado, a classe Kr é o conjunto das valorações, dando a relação de satisfabilidade *global*; sintetizando, a relação de conseqüência da lógica. Por outro lado o conjunto de mundos é uma variante complexa do conjunto de valores de verdade das semânticas matriciais (notar que, em cada modelo, h_m tem como contradomínio o conjunto $\wp(W_m)$). Este fato será utilizado posteriormente, na adaptação da G-fibrilação a semânticas matriciais.

A seguir veremos de que forma é definida a G-fibrilação de duas lógicas modais. Porém, notemos antes disso que a relação de conseqüência de uma lógica modal pode ser dada por estruturas de Kripke diferentes: um exemplo conhecido deste fato é $\vdash_{S_5}$; tal relação pode ser obtida a partir de Kr_1 (a semântica de todos os modelos onde R_m é relação de equivalência) ou a partir de Kr_2 (onde não impomos condições a R_m). Por outro lado, o processo de G-fibrilação depende, não somente de $\vdash_{\mathcal{L}}$, mas da semântica escolhida para defini - la (isto é comumente referido assim: a G-fibrilação *depende da apresentação escolhida*). Portanto, na definição seguinte, as lógicas serão denotadas como pares $\mathcal{L} = \langle C_{\mathcal{L}}, \vdash_{Kr} \rangle$, fixando assim as semânticas de Kripke que serão utilizadas na G-fibrilação.

Definição 5.1.3 *Sejam* $\mathcal{L}_i = \langle C_i, \vdash_{Kr_i} \rangle$ $(i = 1, 2)$. *A* **assinatura G-fibrilada de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$** *é a assinatura* $C_{\circledast}$ *definida por:* $C^1_{\circledast} = \{\neg, \Box_1, \Box_2\}$; $C^1_{\circledast} = \{\rightarrow\}$; $C^j_{\circledast} = \emptyset$ *para todo* $j \geq 3$. *A* **linguagem G-fibrilada de $L(C_1)$ e $L(C_2)$** *é* $L(C_{\circledast})$. *Um* **modelo G-fibrilado de Kr_1 e Kr_2** *é uma terna* (f, g, h) *com* $f : \biguplus_{m \in Kr_1} W_m \longrightarrow \biguplus_{n \in Kr_2} W_n$; $g : \biguplus_{m \in Kr_2} W_m \longrightarrow \biguplus_{n \in Kr_1} W_n$; $h : \mathcal{V} \longrightarrow \wp(W)$, *sendo* $W := (\biguplus_{m \in Kr_1} W_m) \uplus (\biguplus_{n \in Kr_2} W_m)$. *A* **estrutura G-fibrilada de Kr_1 e Kr_2** *(simbolizada por* $Kr_1 \circledast Kr_2$*) é a classe consistente em todos os modelos G-fibrilados de* Kr_1 *e* Kr_2.
Definimos a **relação de conseqüência** $\vdash_{Kr_1 \circledast Kr_2} \subseteq \wp(L(C_{\circledast})) \times L(C_{\circledast})$ *da seguinte forma:*

(1) *Seja* $w \in W$; $h : \mathcal{V} \longrightarrow \wp(W)$ *e* $(f, g, h) \in Kr_1 \circledast Kr_2$ *um modelo G-fibrilado: então dizemos que (para* $\alpha \in L(C_{\circledast})$*: "*$(f, g, h)$ *valida a fórmula* α *no mundo* w*" (simbolizado por* $(f, g, h) \Vdash_w \alpha$*) se valer (segundo a complexidade de* α*):*

- *Se* $\alpha \in \mathcal{V}$, $(f, g, h) \Vdash_w \alpha$ *sse* $w \in h(\alpha)$.
- *Se* $\alpha = \neg\beta$, *então* $(f, g, h) \Vdash_w \alpha$ *sse* $(f, g, h) \not\Vdash_w \beta$.
- *Se* $\alpha = \beta \rightarrow \delta$ *então* $(f, g, h) \Vdash_w \alpha$ *sse* $(f, g, h) \not\Vdash_w \beta$ *ou* $(f, g, h) \Vdash_w \delta$.
- *Se* $\alpha = \Box_1 \beta$, *então* $(f, g, h) \Vdash_w \alpha$ *sse:*
  - *Se* $w \in W_m$, $m \in Kr_1$, *então* $(f, g, h) \Vdash_w \alpha$ *se, para todo* $w' \in W_m$ *tal que* $wR_m w'$ *vale que* $m \Vdash_{w'} \alpha$.
  - *Se* $w \in W_m$, $m \in Kr_2$, *então (considerando que* $g(w) = w' \in W_{m'}$, $m' \in Kr_1$*)* $(f, g, h) \Vdash_w \alpha$ *se, para todo* $w'' \in W_m{}'$ *tal que* $w' R_m w''$ *vale que* $(f, g, h) \Vdash_{w''} \alpha$.
- *Se* $\alpha = \Box_2 \beta$ *procedemos como no caso anterior, utilizando* f *em lugar de* g *no caso em que* $w \in W_m$, $m \in Kr_1$.

(2) *Dizemos que "*(f, g, h) *valida a fórmula* α*" (simbolizado por* $(f, g, h) \Vdash \alpha$*) sse, para todo mundo* $w \in W$; $h : \mathcal{V} \longrightarrow W$, $(f, g, h) \Vdash_w \alpha$.

(3) *Dadas* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(C_{\circledast})$*, dizemos que "*$\alpha$ *é conseqüência de* Γ*" (segundo a semântica G-fibrilada* $Kr_1 \circledast Kr_2$*) (simbolizado por* $\Gamma \vdash_{Kr_1 \circledast Kr_2} \alpha$*) sse para todo modelo G-fibrilado* $(f, g, h) \in Kr_1 \circledast Kr_2$ *tal que* $(f, g, h) \Vdash \gamma$ *(para todo* $\gamma \in \Gamma$*) verifica-se* $(f, g, h) \Vdash \alpha$.
A lógica [2] $\mathcal{L}_{\circledast} = \langle C_{\circledast}, \vdash_{Kr_1 \circledast Kr_2} \rangle$ *é* **a lógica** G**-fibrilação de** $\mathcal{L}_1$ **e** $\mathcal{L}_2$. $\square$

Exemplo 5.1.4 *Seja* $\mathcal{L}_1$ *a lógica modal* $\mathbf{T}$*. Logo,* Kr_1 *pode se entendida como a classe de todos os modelos m tais que* R_m *é reflexiva. Seja* $\mathcal{L}_2$ *a lógica temporal de Von Wright* **VW** *(com* $\square_{VW}$ *significando "em todo tempo futuro"), sendo portanto* R^n *uma relação de ordem total, e* $W_m = \mathbb{N}$ *para todo modelo* $m \in Kr_2$*. A assinatura G-fibrilada* $C_{\circledast}$ *vem dada por:* $(C_{\circledast})^1 = \{\square_{\mathbf{T}}, \square_{\mathbf{VW}}, \neg\}$*;* $(C_{\circledast})^1 = \{\rightarrow\}$*. Suponhamos agora que desejamos avaliar a fórmula* $\square_{\mathbf{VW}}(\square_{\mathbf{T}} q \rightarrow p)$ *num certo modelo G-fibrilado* (f, g, h)*, num mundo* $w \in W_m$*, com* $m \in Kr_1$*.*
Logo temos;
$(f, g, h) \Vdash_w \square_{\mathbf{VW}}(\square_{\mathbf{T}} q \rightarrow p)$ *se e somente se (dado que* $w \in W_1$*)*
Para todo $w' \in W_{m'}$ *(com* $f(w) \in m'$*,* $m' \in Kr_2$*) tal que* $f(w) R_{m'} w'$ *vale:*
(a) $(f, g, h) \Vdash_{w'} \square_{\mathbf{T}} q \rightarrow p$.
Para testar a expresão (a) em cada mundo w' *procedemos assim:* $(f, g, h) \Vdash_{w'} \square_{\mathbf{T}} q \rightarrow p$ *se e somente se* $(f, g, h) \nVdash_{w'} \square_{\mathbf{T}} q$ *(b) ou* $(f, g, h) \Vdash_{w'} p$ *(c).*
A expressão (c) vale se e somente se $w' \in h(p)$*.*
A expressão (b) vale se e somente se não vale $(f, g, h) \Vdash_{w'} \square_{\mathbf{T}} q$*. Isto é, se existe* $w'' \in W_{m''}$ *(com* $g(f(w)) \in W_{m''}$*,* $m'' \in Kr_1$*) tal que* $g(f(w)) R^{m''} w''$ *e além disso* $w'' \notin h(q)$*.*
Desta forma, temos testado a validade de $\square_{\mathbf{VW}}(\square_{\mathbf{T}} q \rightarrow p)$ *no mundo w, no modelo G-fibrilado* (f, g, h)*. Para saber se dita fórmula é uma tautologia devemos utilizar todos os modelos G-fibrilados de* $Kr_1 \circledast Kr_2$*.* $\square$

É bom notar que a lógica $\mathcal{L}_{\circledast}$ é uma *extensão fraca* de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ (ou seja, preserva as tautologias, cf. Definição 1.1.9). Em geral a G-fibrilação não é extensão forte. Este fato também acontecerá no caso da G-fibrilação de semânticas matriciais. Além disso, podemos entender a $\mathcal{L}_{\circledast}$ como a G-fibrilação "compartilhando os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$".

Observação 5.1.5

Até aqui temos apresentado (em forma bem simplificada) a idéia de G-fibrilação para lógicas modais. Julgamos bom indicar que na forma original de G-fibrilação os modelos são mais complexos, pois consideram associado a cada modelo um mundo "distingüido" (denominado "mundo atual"), e cada modelo somente avalia as fórmulas no mundo atual. Isto leva a muitas complicações formais, que não são precisas (neste texto) para entender a idéia que vai nos levar à G-fibrilação de lógicas matriciais.

[2] Notar que se $\mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$ são lógicas então $\mathcal{L}_{\circledast}$ também o é. Isto é, verifica extensividade, monotonicidade e transitividade. Não podemos ter certeza por enquanto se valida estruturalidade e finitariedade.

Fizemos também outras modificações: em primeiro lugar, nos artigos originais sobre G-fibrilação, é levada em conta a possibilidade de estabelecer que, a medida que a fórmula a ser testada vai sendo decomposta, apliquemos diferentes funções entre conjuntos de mundos. Assim, os modelos G-fibrilados acabam sendo seqüências finitas $(f, g, f_1, g_1, ...)$ de funções. Na nossa simplificação, porém, somente consideramos o par (f, g) de funções entre conjuntos de mundos. Omitimos o enfoque original devido a que, com ele, cada modelo (seqüência finita) somente pode avaliar fórmulas com certo tipo de complexidade, e não qualquer fórmula $\alpha \in L(C_{\circledast})$.

Uma outra modificação foi realizada em relação aos textos de D. Gabbay. Neles o autor está principalmente preocupado em caracterizar as tautologias válidas nas lógicas G-fibriladas, mas não uma relação de conseqüência. Portanto, a definição da relação de conseqüência $\vdash_{Kr_1 \circledast Kr_2}$ é nossa. Para defini-la optamos por considera uma relação de conseqüência "local" e não "global". Esta distinção é muito comum no âmbito da lógica modal. Recomendamos ver [Blackburn et al., 2001] em relação a estes temas. □

A partir daqui veremos de que forma adaptar a idéia de G-fibrilação modal à G-fibrilação matricial. O problema aqui consiste em que nas matrizes não temos a idéia de conjuntos de mundos. Porém, levemos em conta o seguinte: os mundos, além de fornecer informação com respeito à relação de acessibilidade, indicam os diferentes "valores de verdade" das lógicas modais. Com efeito, as valorações modais h_m estão definidas tendo como contradomínio o conjunto de mundos.

Assim, quando um modelo G-fibrilado estabelece uma função entre conjuntos de mundos de certos modelos, estamos estabelecendo uma função entre as possibilidades de valoração das lógicas envolvidas. Com esta idéia, veremos que um modelo G-fibrilado entre lógicas matriciais é simplesmente uma terna (f, g, h) onde h é uma valoraçõ (cujo contradomínio simplesmente é a união disjunta das álgebras das matrizes envolvidas) e, além disso, as funções f e g levam valores de verdade de uma lógica a outra. Desta forma, a estrutura matricial G-fibrilada consiste em todos os modelos matriciais G-fibrilados possíveis.

O comentário acima pode ser formalizado da forma seguinte:

Definição 5.1.6 *Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C_{\mathcal{L}_i}, \vdash_{M_i} \rangle$ (com $i = 1, 2$) duas lógicas induzidas pelas matrizes $M_i = (\mathbf{A_i}, D_i)$. Denotando por A_i ao domínio das álgebras $\mathbf{A_i}$, definimos $V := (A_1 \uplus A_2)^{\mathcal{V}}$. A* **assinatura matricial G-fibrilada** *é $C_1 \uplus C_2$. A* **linguagem matricial G-fibrilada** *é $L(C_1 \uplus C_2)$. Uma* **valoração G-fibrilada** *é uma terna (f, g, v) onde $(f, g) \in A_2^{A_1} \times A_1^{A_2}$, e $v \in V$. Dada $\alpha \in L(C_1 \uplus C_2)$, e a valoração G-fibrilada (f, g, v),* **definimos** *$(f, g, v)(\alpha) \in A_1 \uplus A_2$ por (recursivamente, segundo a complexidade de α):*
- Se $\alpha \in \mathcal{V}$, então $(f, g, v)(\alpha) = v(\alpha)$.
- Se $\alpha = c(\beta_1, \cdots, \beta_k)$, então $(f, g, v)(\alpha) = c_k(\overline{(f, g, v)}(\beta_1), \cdots, \overline{(f, g, v)}(\beta_k)$ onde (para toda

fórmula β_j, (com $j = 1, \cdots, k$)
- Se $c_k \in C_1^k$ e $(f,g,v)(\beta_j) \in A_1$, então $\overline{(f,g,v)}(\beta_j) = (f,g,v)(\beta_j)$.

- Se $c_k \in C_1^k$ e $(f,g,v)(\beta_j) \in A_2$, então $\overline{(f,g,v)}(\beta_j) = g((f,g,v)(\beta_j))$.

- Se $c_k \in C_2^k$ procedemos similarmente, aplicando f no caso em que $(f,g,v)(\beta_j) \in A_1$.

Dizemos que uma **valoração G-fibrilada** (f,g,v) **satisfaz** (α) *sse* $(f,g,v)(\alpha) \in D_1 \uplus D_2$. *Definimos a* **relação de conseqüência G-fibrilada** $\vdash_{M_1 \circledast M_2} \subseteq \wp(L(C_1 \uplus C_2)) \times L(C_1 \uplus C_2)$ *da seguinte forma: $\Gamma \vdash_{M_1 \circledast M_2} \alpha$ se, para toda valoração G-fibrilada (f,g,v) que satisfaça simultaneamente todas as fórmulas de Γ, temos que (f,g,v) satisfaz α.* $\square$

Exemplo 5.1.7

Seja $|C^1| = \{\rightarrow_{P^1}, \neg_{P^1}\}$, e seja $|C^2| = \{\wedge_{LPC}, -_{LPC}\}$, tendo cada conectivo a aridade usual na literatura:
Calcularemos $(v,f,g)[\rightarrow_{P^1}(p, \wedge_{LPC}(-_{LPC}r, \wedge_{LPC}(q, \neg_{P^1}r)))]$, sendo que:
$v(p) = T$; $v(q) = 0$; $v(r) = T_1$.
$f(T)$=1; $f(T_1) = 1$; $f(F) = 0$.
$g(1)$=T; $g(0)$=F [3].
O cálculo é assim:
$(f,g,v)[\rightarrow_{P^1}(p, \wedge_{LPC}(-_{LPC}r, \wedge_{LPC}(q, \neg_{P^1}r)))] =$
$\rightarrow_{P^1}((f,g,v)(p), \wedge_{LPC}(-_{LPC}(f,g.v)(r), \wedge_{LPC}((f,g,v)(q), \neg_{P^1}(f,g,v)(r)))) =$
$\rightarrow_{P^1}(T, \wedge_{LPC}(-_{LPC}(T_1), \wedge_{LPC}(0, \neg_{P^1}T_1))) =$
$\rightarrow_{P^1}(T, \wedge_{LPC}(-_{LPC}(T_1), \wedge_{LPC}(0, T))) =$
$\rightarrow_{P^1}(T, \wedge_{LPC}(-_{LPC}f(T_1), \wedge_{LPC}(0, f(T)))) =$
$\rightarrow_{P^1}(T, \wedge_{LPC}(-_{LPC}(1), \wedge_{LPC}(0, 1))) =$
$\rightarrow_{P^1}(T, \wedge_{LPC}(0, 0)) =$
$\rightarrow_{P^1}(T, 0) =$
$\rightarrow_{P^1}(T, g(0)) = \rightarrow_{P^1}(T, F) = F$.
Desta forma, sabemos que a fórmula acima não é $\mathcal{L}_\circledast$-tautologia. $\square$

Notemos que a G-fibrilação depende da escolha da matriz. Logo, se uma lógica $\mathcal{L}$ é induzida por duas matrizes diferentes, a G-fibrilação de $\mathcal{L}$ com qualquer outra lógica mudará

[3] Aqui, deliberadamente enviamos (mediante f e g) valores distinguidos de uma matriz a outra. Esta escolha não é necessária, toda vez que consideramos todas as valorações G-fibriladas possíveis, como indicamos oportunamente.

segundo trabalhemos com M_1 ou M_2 [4]. Isto não quer dizer que $\mathcal{L}_1 \circledast \mathcal{L}_2$ não possa ser invariante segundo a escolha das matrizes, mas é um problema ainda não resolvido. Até ter uma resposta nesse ponto a G-fibrilação será considerada mais como "fibrilação de semânticas" (ou seja, externa) do que fibrilação de lógicas propriamente dita.

Embora quando já esteja explicitado o método de G-fibrilação, não sabemos grande coisa em relação à relação $\vdash_\circledast$. É, de fato, uma relação de conseqüência padrão? Qual relação tem $\mathcal{L}_\circledast$ com as lógicas que a definem? Veremos alguns resultados ao respeito.

Proposição 5.1.8 *Dadas duas lógicas padrão $\mathcal{L}_i$. Então:*
(a) $\mathcal{L}_\circledast$ é uma lógica estrutural. Além disso:
(b) Se $\vdash_i$ são caracterizáveis matricialmente por uma classe finita $\mathcal{K}_i$ de matrizes finitas M_{j_i}, temos que $\vdash_\circledast$ é finitária.

Demonstração: A idéia essencial é a seguinte: $\vdash_\circledast$ é caracterizável por certa classe $K_\circledast$ de $C_1 \circledast C_2$-matrizes $M = (A_1 \uplus A_2, D_1 \uplus D_2)$ tais que, se $a_1, ..., a_k \in A_i$ e $c \in {C^k}_i$, então $c^M(a_1, \cdots, a_k) = c^{M_i}(a_1, \cdots, c_k)$. Isto é, As matrizes da classe $K_\circledast$ verificam: a sua linguagem é a linguagem G-fibrilada (e portanto a assinatura de todas as matrizes de $\mathcal{K}_\circledast$ é $C_1 \circledast C_2$); o conjunto dos elementos das álgebras das matrizes é $A_1 \uplus A_2$; o seu conjunto de valores distingüidos é a união disjunta dos conjuntos D_i das lógicas originais; e além disso a restrição de cada operação às matrizes originais coincide com as operações originais [5]. Tal caracterização será feita da seguinte forma:
(i) Para cada valoração G-fibrilada (f, g, v) existe uma $(C_1 \circledast C_2)$-matriz $M_{(f,g)}$, e uma valoração v^* em $M_{(f,g)}$ tal que, para toda fórmula $\alpha \in L(C_1 \circledast C_2)$, $(f, g, v)(\alpha) = v^*(\alpha)$.
(ii) Reciprocamente, Para cada $C_1 \circledast C_2$-matriz $M \in K_\circledast$ (onde $K_\circledast$ é a classe definida no ítem anterior) e cada valoração v em $M_{(f,g)}$ existe uma valoração G-fibrilada (f, g, v') tal que, para toda fórmula $\alpha \in L(C_1 \circledast C_2)$, $(f, g, v')(\alpha) = v(\alpha)$.
Se valer (i) e (ii), da definição das relações de conseqüência $\vdash_\circledast$ e $\vdash_{K_\circledast}$ teremos assim que elas coincidem. A prova do ítem (i) é a seguinte: dada a valoração G-fibrilada (f, g, v), definimos a $C_1 \circledast C_2$-matriz $M_{(f,g)} = (A_1 \uplus A_2, D_1 \uplus D_2)$, sendo as suas operações definidas da seguinte forma:
- Se $c_k \in {C^k}_1$, e $a_1, \cdots, a_k \in A_i$, então ${c_k}^{M_{(f,g)}}(a_1, \cdots, a_k) = c_k(\overline{a_1}, \cdots, \overline{a_k})$, onde (para todo a_j, $j = 1, \cdots k$:
  - Se $a_j \in A_1$, então $\overline{a_j} = a_j$.
  - Se $a_j \in A_2$, então $\overline{a_j} = g(a_j)$.
- Se $c_k \in {C^k}_2$, procedemos em forma similar, aplicando f em lugar de g.
Por outro lado, dada a matriz $M_{(f,g)}$, definimos a valoração v^*, para todo $p \in \mathcal{V}$ por: $v^*(p)$

[4]Preciso é notar que a mesma coisa acontece com a fibrilação de lógicas modais.
[5]A classe $K_\circledast$ *não é* a classe de *todas as matrizes* verificando as propriedades acima mencionadas.

$= (f, g, v)(p)$. É trivial ver que, para toda $\alpha \in L(C_1 \circledast C_2)$, $v^*(\alpha) = (f, g, v)(\alpha)$.
Para demonstrar (ii), consideremos as matrizes de $K_\circledast$. Pela sua forma, é possível reconstruir as funções $f : A_1 \longrightarrow A_2$ e $g : A_2 \longrightarrow A_1$. A valoração v' é simplesmente v^*, e é claro que $v^(*)(\alpha) = (f, g, v')(\alpha)$. Isto prova (ii), e pelas considerações anteriores temos que $\vdash_{K_\circledast} = \vdash_\circledast$.
Provamos assim que $\vdash_\circledast$ é caracterizável por uma classe de matrizes. Mas toda relação caracterizável por uma classe de matrizes é estrutural, cf. [Łoś – Suszko, 1958].
(b) De acordo com [Wójcicki, 1973], toda relação de conseqüência induzida por uma classe finita de matrizes finitas é finitaria. Se M_i $(i = 1, 2)$ são matrizes finitas, então, considerando que ${A_1}^{A_2}$ e ${A_2}^{A_1}$ são finitos, a classe $K_\circledast$ definida no item anterior é uma classe finita de matrizes finitas. Assim, $\vdash_\circledast$ é padrão. ■

Observação 5.1.9

Dado que existem relações de conseqüência finitárias não caratecrizáveis por matrizes finitas (um exemplo é a lógica intuicionista, cf. os resultados de [Gödel, 1932] e [Wrónski, 1974]), não podemos aplicar o item (b) da proposição anterior para provar a seguinte conjectura: a G-fibrilação de lógicas finitárias é finitária. Tal conjectura fica como um problema em aberto. □

Fora do acima estudado, temos o seguinte resultado que vincula as lógicas a serem G-fibriladas com $\vdash_\circledast$:

Proposição 5.1.10 *Sejam $\mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$ duas lógicas induzidas por matrizes M_i tais que $A_i - D_i \neq \emptyset$. Seja $\alpha \in L(C_i)$, então: se $\vdash_{\mathcal{L}_i} \alpha$ então $\vdash_\circledast \alpha$ (isto é: $\vdash_\circledast$ é uma extensão fraca das relações $\vdash_{\mathcal{L}_i}$).*

Demonstração: Notar que a condição $A_i - D_i \neq \emptyset$ implica que as variáveis proposicionais não são tautologias [6]. Notemos também que, independentemente dos valores $(f, g, v)(p_i)$ (sendo p_i as variáveis proposicionais), ao avaliar qualquer $\mathcal{L}_i$-tautologia α tais valores "convertem-se" em um valor em A_i (o domínio da matriz M_i), mediante as funções f ou g. Tal mudança é devida precisamente ao fato de α não ser variável proposicional. Da observação acima é possível demonstrar que para toda valoração G-fibrilada (f, g, v), $(f, g, v)(\alpha) \in D_i \subseteq D$. Isto é, que α é $\mathcal{L}_\circledast$-tautologia. □

[6] Se $A_i = D_i$ não somente as variáveis proposicionais mas todas as fórmulas de $L(C_i)$ seriam tautologias.

Solicitamos na proposição anterior que $A_i - D_i \neq \emptyset$ para ambas lógicas porque, se tal fato não acontecer, teríamos que as variáveis proposicionais seriam tautologias de alguma das lógicas, mas não da fibrilada. Com efeito: suponhamos que p é $\mathcal{L}_1$-tautologia mas não é $\mathcal{L}_2$-tautologia (isso por causa de alguma valoração $v : \mathcal{V} \longrightarrow A_2 - D_2$). Para qualquer valoração fibrilada (f, g, v), temos que $(f, g, v)(p) \notin D_1 \uplus D_2$. Notar que não é possível saber se, toda vez que $\Gamma \vdash_{\circledast} \alpha$, temos $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_i} \alpha$ (ou seja, se a lógica G-fibrilada *é uma extensão conservativa* das lógicas originais. Isto é devido a que as valorações G-fibriladas são definidas a partir de funções $v : \mathcal{V} \longrightarrow A_1 \cup A_2$, e portanto tais valorações sofrem mudanças segundo as definições de f e g. Notemos além disso um fato importante: da forma em que as valorações G-fibriladas foram definidas (isto é, como funções $v : \mathcal{V} \longrightarrow A_1 \uplus A_2$), temos que a lógica $\mathcal{L}_{\circledast}$ *não é extensão forte* das lógicas originais, como mostra o exemplo seguinte:

Exemplo 5.1.11

Seja $\mathcal{L}_{\vee} = \langle \{\vee_{LPC}\}, \vdash_{\vee} \rangle$, o fragmento da disjunção da lógica clássica (induzido, portanto, pela matriz $M_{\vee} = (\{0, 1\}, \{1\})$ e a tabela da disjunção); seja, por outro lado, uma lógica $\mathcal{L}_2 = \langle C, \vdash_2 \rangle$, com $\vdash_2$ induzido por uma matriz $M = (\{T, T_1, F\}, \{T, T_1\})$ (notar que a assinatura de M não tem importância aqui). Ora, sabemos que vale $p_1 \vdash_{\vee} p_1 \vee p_2$. Por outro lado, seja $v : \mathcal{V} \longrightarrow \{0, 1, T, T_1, F\}$ com $v(p_1) = T$, $v(p_2) = 0$, e seja $g : \{T, T_1, F\} \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que $g(T) = 0$. Consideremos agora a valoração G-fibrilada (f, g, v) (sendo f qualquer função $f : \{0, 1\} \longrightarrow \{T, T_1, F\}$). Temos então:
- $(f, g, v)(p_1) = T \in D_1 \uplus D_2$.
- $(f, g, v)(p_1 \vee p_2) = (f, g, v)(p_1) \vee (f, g, v)(p_2) = \overline{(f, g, v)}(T) \vee \overline{f, g, v}(0) = 0 \vee 0 = 0 \notin D_1 \uplus D_2$.
Logo, $p \nvdash_{\circledast} p \vee q$. $\square$

Do exemplo anterior temos que, se quisermos conservar as idéias indicadas na Motivação 2.1.1, deveríamos restringir tal análise ao conjunto de todas as G-valorações possíveis tais que a relação de conseqüência resultante seja extensão forte das lógicas $\mathcal{L}_i$ originais ($i = 1, 2$). É um interessante problema em aberto caracterizar o conjunto de G-valorações que possui tal propriedade. Por exemplo, temos a seguinte conjectura para dar condições suficientes para a obtenção de extensões conservativas mediante G-fibrilação:

Conjectura 5.1.12 *Seja V_* o conjunto de valorações G-fibriladas (f, g, v) que, adicionalmente, verificam: $f(D_1) \subseteq D_2$; $f(A_1 - D_1) \subseteq A_2 - D_2$; $g(D_2) \subseteq D_1$ e $g(A_2 - D_2) \subseteq A_1 - D_1$. Seja agora a relação de conseqüência $\vdash_* \subseteq (\wp(L(C^{\circledast})) \times L(C^{\circledast}))$ definida por: $\Gamma \vdash_* \alpha$ sse, para toda valoração de V_* (f, g, v), se $(f, g, v)(\Gamma) \subseteq D$, então $(f, g, v)(\alpha) \in D$. Então $\mathcal{L}_* = \langle C_1 \uplus C_2, \vdash_* \rangle$ é extensão conservativa forte das lógicas $\mathcal{L}_i$* [7].

[7] Na verdade, esta conjectura já teria sido demonstrada pelo orientador desta tese (comunicação pessoal).

Se o conjunto de valorações v utilizadas na definição das valorações G-fibriladas fica restrito à união das valorações das lógicas originais, a conjectura é facilmente demonstrável. Porém, não sabemos ainda o que acontece se tais valorações são funções $v : \mathcal{V} \longrightarrow A_1 \uplus A_2$. A prova de tal caso é um dos problemas a serem resolvidos que proporemos no Capítulo 5.3.

Notar no entanto que o problema da relação da G-fibrilação com as extensões (conservativas, fracas, fortes) não está diretamente vinculado com a Hierarquia de Leibniz. Assim, pode-se estudar o problema da transferência de propriedades de tal hierarquia [8] mediante G-fibrilação, ainda quando esta não seja extensão conservativa.

De qualquer modo, o estudo da transferência de propriedades neste capítulo não foi completamente desenvolvido: demos somente o primeiro resultado fundamental (Teorema 5.1.8) para poder trabalhar em tais problemas. A resposta a estas questões deverá ser analisada no futuro. Entre uma das suas múltiplas abordagens, notemos que existem lógicas com semântica matricial (e portanto suscetíveis de serem G-fibriladas) mas que não precisam ser algebrizáveis, nem sequer protoalgébricas, ainda quando sejam lógicas padrão. Um exemplo desta situação é:

Exemplo 5.1.13

A lógica de Urquhart Urq, introduzida em [Urquhart, 1977], é a lógica $\mathcal{L}$ dada pela seguinte matriz M: $M = \langle \{0, 1, 2, 3, 4\}, \{*\}, \{0\} \rangle$, sendo a função $*$ descrita pela tabela embaixo.

$*$	0	1	2	3	4
0	4	4	0	0	4
1	4	4	1	0	4
2	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

Ainda quando Urq é uma lógica matricial, é fácil ver (por indução estrutural) que ela não tem tautologias . Isto é, não existe nenhuma fórmula α tal que $\vdash_{Urq} \alpha$. A condição de protoalgebrizabilidade requer a existência de um conjunto $PR(p, q)$ que verifique R: $\vdash_{Urq} PR(p, p)$. Como Urq não possui tautologias, somente pode acontecer que $PR(p, q) = \emptyset$. Mas nesse caso, se Urq verificar MP, temos que $p \vdash_{Urq} q$, cf. Observação 1.4.4. E tal não é o caso, como pode ser facilmente comprovado segundo a tabela de acima. $\Box$

Com respeito à relação da Hierarquia de Leibniz com a G-fibrilação de lógicas, veremos na seção seguinte que em certa variante da G-fibrilação podemos, desta vez, garantir a

[8] Por "propriedades" referi-mo-nos a protoalgebrizabilidade, equivalencialidade e algebrizabilidade.

transferência de algebrizabilidade. Tal variante (de fato, uma simplificação) é a fusão de lógicas.

5.2 G-fibrilação sobre uma única matriz: fusão

A problemática que essencialmente deseja resolver a fibrilação (na versão modal e na G-fibrilação de matrizes) é a de lidar com semânticas diferentes: quando cada uma das lógicas envolvidas tem a sua relação de conseqüência definida sobre classes de mundos (ou, no caso da G-fibrilação, sobre matrizes M_i), consideramos uniões disjuntas (de conjuntos de mundos ou de matrizes, segundo seja o caso). Porém, notemos que se os domínios das duas semânticas é o mesmo, então nesse caso podemos avaliar as fórmulas de $L(C_1 \uplus C_2)$ sobre tal domínio de forma unívoca. Denominaremos tal modificação da G-fibrilação *fusão de lógicas* [9]. Formalmente, a fusão é definida da seguinte maneira:

Definição 5.2.1 *Sejam duas lógicas* $\mathcal{L}_i = \langle C_{\mathcal{L}_i}, \vdash_{\mathcal{L}_i} \rangle$*, com* $\vdash_{\mathcal{L}_i}$ *caracterizada pelas matrizes* $M_i = (A_i, D_i)$ *(com* $i = 1, 2$*) tais que* $(A_i, D_i) = (A_j, D_j)$ [10]*para* $i, j \in \{1, 2\}$*. A* **fusão de $\mathcal{L}_1$ com $\mathcal{L}_2$** *é a lógica* $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \langle C_1 \uplus C_2, \vdash_{1+2} \rangle$ *onde* $\vdash_{1+2}$ *é a relação de conseqüência definida pela* $C_1 \uplus C_2$*-matriz* $M^+ = (A, D) = (A_i, D_i)$*, sendo as operações de* $C_1 \uplus C_2$ *definidas da seguinte forma: seja* $c_k \in C_1 \uplus C_2$ *e* $a_1, \cdots, a_k \subseteq A_i$*, então* $c_k^{M^+}(a_1, \cdots, a_k) = c^{M_i}(a_1, \cdots, a_k)$*, quando* $c_k \in C_i$*.* □

É óbvio que, pelo fato de considerar a assinatura $C^+ = C_1 \uplus C_2$, esta definição faz sentido. Provemos agora os seguintes resultados:

Proposição 5.2.2 *A fusão de lógicas protoalgébricas é uma lógica protoalgébrica.*

Demonstração: Qualquer protoalgebrizador de qualquer uma das lógicas envolvidas também é protoalgebrizador de $\mathcal{L}_+$, por causa da estruturalidade. ■

Proposição 5.2.3 *A fusão de lógicas equivalenciais é equivalencial.*

[9]Tal nome já foi utilizado na literatura referida a combinações entre lógicas. Por exemplo, em [Finger, 2004], define-se a fusão entre duas lógicas modais. De qualquer forma, tanto em dito trabalho quanto neste, a expressão fusão está indicando a combinação de lógicas que são similares em certo sentido (em nosso caso, a similaridade está focalizada no mesmo domínio das matrices).

[10]Ainda quando o domínio e conjunto de valores distingüidos seja o mesmo, as matrizes M_i podem se diferençar pela definição das operações em A_i. Mais ainda, M_1 e M_2 podem ser definidas sobre assinaturas diferentes, como veremos.

Demonstração: Dadas as equivalências $\Delta_i(p_1, p_2)$ das lógicas $\mathcal{L}_i$ respectivas $(i = 1, 2)$, temos que $\Delta = \Delta_1 \uplus \Delta_2$ é uma equivalência de $\mathcal{L}_+$. A prova segue os mesmos linhamientos que o Teorema 3.2.6. ■.

Proposição 5.2.4 *A fusão de lógicas algebrizáveis é algebrizável.*

Demonstração: Neste caso, de forma análoga ao Teorema 3.3.3, adaptamos a demonstração feita para lógicas equivalenciais. Aqui o algebrizador é $(\delta_1 \uplus \delta_2, \varepsilon_1 \uplus \varepsilon_2, \Delta_1 \uplus \Delta_2)$. ■

Daremos um exemplo particular deste último resultado na próxima seção. Mas antes disso notemos que, diferentemente do caso da fibrilação categorial, a fusão dos fragmentos de uma lógica $\mathcal{L}$, coincide com a própria lógica. De fato, cada fragmento tem a sua própria "tabela de verdade" explicitando de que forma agem as funções associadas aos conectivos do fragmento. E a lógica $\mathcal{L}$ simplesmente "reúne" as diferentes tabelas de verdade.

5.3 Exemplos em lógicas induzidas por t-normas

Concluiremos este texto com um exemplo da última proposição demonstrada. Julgamos conveniente introduzir tal exemplo por dois motivos: em primeiro lugar, o direcionamento tomado por esta pesquisa (abordagem abstrata, tanto da lógica algébrica quanto das combinações entre lógicas) acabou fornecendo poucos resultados em relação a lógicas conhecidas na literatura. Este exemplo seria uma forma de suprir tal falência. Em segundo lugar, dado que estudaremos uma família de lógicas difusas, veremos como (no contexto da algebrizabilidade) todas as lógicas da família podem ser analisadas por um método comum. Assim, vemos que a lógica algébrica abstrata pode ter interessantes aplicações fora do seu próprio campo de ação. O exemplo em questão trata com lógicas induzidas por t-normas. Todas estas lógicas são definidas a partir de uma matriz comum (o intervalo $[0, 1] \in I\!R$), pelo que podemos fusionar lógicas de tal classe, segundo o método mostrado na Seção anterior. As definições formais de que precisamos nesta seção vêm dadas a seguir:

Definição 5.3.1 *Uma* t-**norma** *é uma função* $* : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ *satisfazendo (para quaisquer* x, y, $z \in [0, 1]$*):*
(i)$x * y = y * x$ *(Comutatividade)*
(ii) $x * (y * z) = (x * y) * z$ *(Asociatividade)*
(iii) Se $x \leq y$ *então* $x * z \leq y * z$ *(Não decrecimento à esquerda)*
(iv) $1 * x = x$ *(1 é elemento neutro em relação a* $*$*)*

Conseqüências triviais das propriedades anteriores são as seguintes:
(iii b) Se $x \leq y$ *então* $z * x \leq z * y$ *(Não decrecimento à direita)*
(iv b) $0 * x = 0$ *(*0 *é elemento absorvente em relação a* $*$*)*
Uma t-norma é **contínua** *se é contínua no sentido das topologias usuais em* $[0, 1]$. □

Proposição 5.3.2 *Dada uma t-norma contínua, há uma única operação* $\rightarrow : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ *satisfazendo*

$$x * z \leq y \text{ se e somente se } x \leq x \rightarrow y$$

Demonstração: Aqui, definimos $x \rightarrow y := \sup\{z \in [0, 1] : x * z \leq y\}$ (Ver [Hájek, 1998]). ■

Definição 5.3.3 *Dada uma t-norma contínua* $*$*, a operação* $\rightarrow$ *existente (devido à Proposição 5.3.2) é denominada* **o resíduo de** $*$. □

Definição 5.3.4 *Dada uma t-norma contínua (e portanto com resíduo), a* **lógica gerada por** *t é* $\mathcal{L}(*) = \langle C_{\mathcal{L}(*)}, \vdash_{\mathcal{L}(*)} \rangle$*, em que* ${C_{\mathcal{L}(*)}}^1 = \{*\}$, ${C_{\mathcal{L}(*)}}^2 = \{\rightarrow\}$, ${C_{\mathcal{L}(*)}}^n = \emptyset$ *(com* $n \neq 1, 2$*), e* $\vdash_{\mathcal{L}(*)}$ *é a relação de conseqüência induzida pela matriz* $([0, 1], \{1\})$ [11]. □

Lema 5.3.5 *Para toda t-norma, temos os sequintes resultados:*
a) $x \rightarrow x = 1$ *para qualquer* $x \in [0, 1]$.
b) Para todo $\{x, y\} \subseteq [0, 1]$, $x * y = 1$ *se e somente se* $x = y = 1$.

Demonstração:
a) Obviamente $x \rightarrow x \leq 1$. Por outro lado, $x \leq x$. Como $1 * x = x$, das propriedades dos resíduos, temos $1 \leq x \rightarrow x$.
b) É claro que, se $x = y = 1$, então $x * y = 1$. Por outro lado, sabemos que $x \leq y \rightarrow y$ (por *a*)). Assim $1 = x * y \leq y$. Analogamente para x. ■

Lema 5.3.6 *Para toda valoração* v, $v(p \rightarrow q) = 1$ *se e somente se* $v(p) \leq v(q)$.

Demonstração: $v(p) \leq v(q)$ sse $1 * v(p) \leq v(q)$ sse $1 \leq v(p) \rightarrow v(q)$ (por propriedades de resíduo) sse $1 = v(p \rightarrow q)$. ■

Proposição 5.3.7 *Toda lógica* $\mathcal{L}(*)$ *que seja gerada por uma t-norma* $*$ *é algebrizável (e portanto equivalencial e, obviamente, protoalgébrica).*

[11] É claro que os conectivos de $C_{\mathcal{L}(*)}$ são interpretados em $[0, 1]$ pela t-norma $*$ e o resíduo $\rightarrow$ da forma óbvia. Daíque os símbolos para denotar os conectivos da lógica e as operações associadas na matriz sejam os mesmos, como aconteceu em geral em toda a tese.

Demonstração: Provaremos que $\langle(\varepsilon, \delta), \Delta\rangle$ verifica as condições do Teorema 1.6.32 (sendo portanto um algebrizador de $\mathcal{L}(*)$), com $\epsilon := p$, $\delta := p{\rightarrow}p$ e $\Delta := (p{\rightarrow}q){*}(q{\rightarrow}p)$. Considerando a definição de lógica induzida por uma matriz, temos que provar para qualquer valoração v vale (aplicamos aqui os Lemas 5.3.5 c), e 5.3.6):
(i) $v(p\Delta p) = 1$.
(ii) Se $v(p\Delta q) = 1$, então $v(q\Delta p) = 1$
Estas propriedades são triviais, por causa do lema anterior e a comutatividade de $*$. (iii) Se $v(p\Delta q) = 1$ e $v(q\Delta r) = 1$ então $v(p\Delta r) = 1$. Se valer $v(p\Delta q) = 1$, por causa do Lema 5.3.6 temos $v(p{\rightarrow}q) = v(q{\rightarrow}p) = 1$. Analogamente temos $v(q{\rightarrow}r) = v(r{\rightarrow}q) = 1$. Aplicando o lema anterior novamente, $v(p\Delta r) = 1$. Também vale o seguinte, para todo conjunto $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots \beta_k\} \subseteq L(C_{\mathcal{L}(*)})$ e para todo conectivo $w \in C_{\mathcal{L}(*)}$:
$\alpha_1\Delta\beta_1, \cdots, \alpha_k\Delta\beta_k \vdash_{\mathcal{L}(*)} w(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)\Delta w(\beta_1, \cdots, \beta_k)$. Para prová-lo, dado que os únicos conectivos primitivos de $\mathcal{L}(*)$ são $*$ e $\rightarrow$ analisaremos somente estes casos [12]: (iv-a) Se $v(p_1\Delta q_1) = 1$ e $v(p_2\Delta q_2) = 1$, então temos (aplicando resultados anteriores) que:
$v(p_1{\rightarrow}q_1) = v(q_1{\rightarrow}p_1) = 1$, e assim $v(p_1) = v(q_1)$. Raciocinando analogamente, $v(p_2) = v(q_2)$. Logo $v(p_1 * p_2) = v(q_1 * q_2)$. Aplicando Lema 5.3.6, temos que $v((p_1 * p_2)\Delta(q_1 * q_2))$ $= 1$.
(iv-b) Se $v(p_1\Delta q_1) = 1$ e $v(p_2\Delta q_2) = 1$, então $v((p_1{\rightarrow}p_2)\Delta(q_1{\rightarrow}q_2)) = 1$. Lembremos que $v(p\Delta q) = 1$ se e somente se $v(p) = v(q)$. Com efeito, $v(p\Delta q) = 1$ sse $v(p{\rightarrow}q) = v(p{\rightarrow}q) = 1$ sse, pelo lema anterior, $v(p) \leq v(q)$ e $v(p) \leq v(q)$. Ora, seja v tal que $v(p_1\Delta q_1){=}1{=}v(p_2\Delta q_2)$. Temos que $v(p_1) = v(q_1)$ e $v(p_2) = v(q_2)$. Assim, $v(p_1{\rightarrow}p_2) = v(q_1{\rightarrow}q_2)$, e portanto (pelo acima observado) $v(p_1{\rightarrow}p_2\Delta q_1{\rightarrow}q_2)$. Finalmente, provemos
(v) $p \dashv\vdash_{\mathcal{L}(*)} p\Delta(p{\rightarrow}p)$. Primeiramente, se $v(p\Delta(p{\rightarrow}p)) = 1$, então $v(p) = v(p{\rightarrow}p) = 1$. Por outro lado, se $v(p) = 1$, como $v(p{\rightarrow}p) = 1$ sempre, temos que $v(p) = v(p\Delta(p{\rightarrow}p))$ e assim, $v(p\Delta(p{\rightarrow}p)) = 1$. ■

Proposição 5.3.8 *Sejam $*_i$ ($i = 1, 2$) duas t-normas contínuas, e sejam $L(*_i)$ as lógicas induzidas respectivas (isto é, as lógicas tais que $\vdash_{*_i} = \vdash_{M_i}$, com $M_i = ([0, 1], \{1\})$). Se $\mathcal{L}$ é a fusão das lógicas $\mathcal{L}(*_i)$, então $p\Delta_1 q \dashv\vdash_{\mathcal{L}} p\Delta_2 q$ para toda equivalência Δ_i de $\mathcal{L}(*_i)$ ($i = 1, 2$).*

Demonstração: Por propriedades das equivalências, somente precisamos provar que $(p{\rightarrow_1}q) *_1 (q{\rightarrow_1}p) \dashv\vdash_{\mathcal{L}} (p{\rightarrow_2}q) *_2 (q{\rightarrow_2}p)$: seja $v : \mathcal{V} \longrightarrow [0, 1]$ tal que $v((p{\rightarrow_1}q) *_1 (q{\rightarrow_1}p)) =$ 1. Pelo fato implícito na proposição anterior, $v(p) = v(q)$ e assim $v((p{\rightarrow_2}q) *_2 (q{\rightarrow_2}p)) = 1$. Analogamente para o caso recíproco. ■

A proposição anterior implica o seguinte resultado:

[12] Na verdade, $\rightarrow$ é definível a partir de $*$ *dentro da aritmética de $\mathbb{R}$*, mas isso não quer dizer que $\rightarrow$ seja definível no sentido lógico, ou seja como sendo uma "abreviação"de uma fórmula particular construida unicamente com $*$. Portanto, consideramos a $\rightarrow$ como sendo uma operação indepentente de $*$.

Corolário 5.3.9 *A fusão de duas lógicas induzidas por t-normas é algebrizável* [13].

Demonstração: Provaremos que um algebrizador para $\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2$ pode ser qualquer algebrizador de $\mathcal{L}_i$ (com $i \in \{1, 2\}$). Por exemplo, $(\delta, \varepsilon, \Delta)_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2} = (p, p{\to_1}p, \Delta_1(p, q))$:
As condições (i) - (iii) são triviais. Em relação a iv): se $w_k \in C_1$, então temos: $p_1\Delta q_1, \cdots, p_k\Delta q_k \vdash_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2} w(p_1, \cdots, p_k)\Delta w(q_1, \cdots, q_k)$ e aplicamos estruturalidade (toda lógica induzida por uma matriz é estrutural). Ora, se $w \in C_2$, então:
$p_1\Delta q_1, \cdots, p_k\Delta q_k \vdash_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2} p_1\Delta_2 q_1, \cdots, p_k\Delta_2 q_k \vdash_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2} w(p_1, \cdots p_k)\Delta_2 w(q_1, \cdots q_k) \vdash_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}$ $\vdash_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2} w(p_1, \cdots, p_k)\Delta w(q_1, \cdots, q_k)$ (temos aplicado aqui a proposição anterior em duas ocasiões). A demonstração de v) é trivial. ■

Notar que a preservação da algebrizabilidade mediante fusão acaba gerando uniões disjuntas de lógicas bem conhecidas na literatura. Assim, por exemplo, duas lógicas induzidas por t-normas já estudadas por diversos autores são $Ł_{\aleph_1}$ e $G_{\aleph_1}$ (as lógicas infinito-valentes de Łukasiewicz e Gödel respectivamente). A fusão de tais lógicas acaba gerando uma "lógica Łukasiewicz - Gödel" infinito-valente de forma óbvia. Como tal lógica é algebrizável, deve ser interessante estudar as propriedades algébricas da semântica algébrica associada a ela, e relacionar (em termos algébricos) com as classes das álgebras de Łukasiewicz e Gödel.

Vimos assim a aplicação da Proposição 5.2.4 utilizando técnicas próprias da teoria de t-normas. De qualquer forma, já vimos como resultados desse tipo podem ser tratados de forma abstrata. Concluímos aqui o capítulo desejando indicar que a teoria de algebrizabilidade aplicada a t-normas tem muitos problemas interessantes para estudar, e esboçaremos alguns destes problemas nas considerações finais.

[13] Podemos chegar a este mesmo resultado aplicando o Teorema 5.2.4 e a Proposição 5.3.7: vemos assim de que maneira podem ser aplicados os resultados gerais da lógica algébrica abstrata. De qualquer forma, a demonstração aqui apresentada segue técnicas próprias das t-normas para ilustrar com um exemplo concreto o nosso trabalho.

Considerações finais e problemas em aberto

Talvez por causa de ter tentado relacionar duas áreas bem diferenciadas dentro da Lógica, o trabalho que aqui apresentamos seria simplesmente um marco inicial para futuras pesquisas. Consideramos portanto que é possível desenvolver em grande parte o texto aqui apresentado. E, mais ainda, que existem muitas formas de prosseguir o que vimos até agora. Algumas dessas linhas de trabalho que julgamos merecedoras de uma maior atenção são:

- Temos mencionado já que o conceito de C-fibrilação não fornece muita informação em relação à lógica resultado de tal processo. Por outro lado, grande parte das lógicas utilizadas na literatura são axiomatizáveis no sentido de Hilbert, e assim é possível obter mais informação em relação a tais lógicas. E, dado que já tem sido estudada a C-fibrilação para categorias de (lógicas induzidas por) cálculos de Hilbert, poder-se-ia estudar a C-fibrilação em "categorias intersecção". Ou seja, analisar a fibrilação categorial em categorias de lógicas protoalgébricas (ou equivalenciais, ou algebrizáveis) e axiomatizáveis por cálculos de Hilbert ao mesmo tempo. É bom mencionar que já temos estudado tal tópico em [Fernández – Coniglio, 2003b], mas a abordagem apresentada em tal comunicação é complexa demais, e suscetível de reformas e simplificações.
- O último resultado da Seção 4.2 relacionou o operador Ω com os $ALGE^*$-morfismos. Será possível fazer o mesmo com os $CONS$-morfismos, $PROT$-morfismos e $EQUIV^*$-morfismos? Já temos indicado tal problemática anteriormente, e consideramos que o seu estudo é de grande importância, pois muitas das pesquisas feitas em lógica algébrica abstrata estão baseadas em teoria de operadores (tais como Ω).
- Notemos que a Hierarquia de Leibniz não consiste somente nas classes estudadas (protoalgébricas, equivalenciais e algebrizáveis). Existem muitas outras classes dentro de

tal hierarquia (as fortemente algebrizáveis , fregeanas, fregeanas protoalgébricas, entre outras), além dos casos infinitários das classes aqui estudadas. Uma extensão natural deste texto seria adaptar os resultados conhecidos às outras classes.

- Já no contexto da G-fibrilação, poder-se-ia vincular a fibrilação de lógicas modais com o seu aspecto algébrico. De fato, as lógicas modais normais não são caracterizadas exclusivamente pelas suas semânticas de Kripke, mas possuem um tratamento algébrico bem conhecido (as álgebras de Boole com operadores, em suas diferentes variantes). Logo, é natural tentar uma abordagem da fibrilação para tais lógicas que possa ser relacionada com a fibrilação modal de Gabbay.

- Observemos que não estudamos com profundidade a relação entre algebrizabilidade e G-fibrilação de lógicas (em sua versão mais geral). Conjecturamos que em geral as propriedades relativas à Hierarquia de Leibniz não são preservadas mediante G-fibrilação, a não ser que restrinjamos o conjunto de valorações fibriladas. A motivação de nosso raciocínio tem a ver com o Exemplo 5.1.11: fundamentalmente, ao escolher as funções $v : \mathcal{V} \longrightarrow A_1 \uplus A_2$ na definição de valorações G-fibriladas, estamos considerando um conjunto excessivo de tais valorações. Foi tal fato o que causou no exemplo mencionado que a G-fibrilação não fosse extensão conservativa.

- Finalmente, considerando que a relação entre algebrizabilidade abstrata e lógicas induzidas por t-normas já tem sido estudada fora deste texto (ver [Bou et al., 2005] por exemplo), no contexto de lógicas difusas axiomatizáveis por seqüentes. Tais resultados são bem mais gerais que os aqui apresentados. Porém, não fazem referência a processos de combinações entre lógicas. Logo, poder-se-ia aprofundar na última seção deste texto para tentar generalizá-la aos trabalhos indicados.

Fica claro que não pretendemos responder no futuro a todas estas questões. Ainda assim, achamos que eles são uma boa amostra que a linha de pesquisa que decidimos estudar é fecunda o suficiente, e merece ser considerada com atenção. Os resultados e discussões que mostramos aqui são somente um pequeno começo com respeito à vinculação entre combinações entre lógicas e algebrizabilidade.

Referências Bibliográficas

[Blackburn et al., 2001] Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y. *Modal Logic*, vol. 53 de *Cambridge Tracts is Theoretical Computer Science.* Cambridge University Press, Cambridge. (2001).

[Blok – Pigozzi, 0?] Blok, W., Pigozzi, D. Abstract algebraic logic and the deduction theorem. *The Bulletin of Symbolic Logic.* (A aparecer).

[Blok – Pigozzi, 1986] Blok, W., Pigozzi, D. Protoalgebraic logics. *Studia Logica*, 45:337–369. (1986).

[Blok – Pigozzi, 1989] Blok, W., Pigozzi, D. *Algebraizable Logics*, volume 77 (396) of *Memoirs of the American Mathematical Society.* AMS, Providence, Rhode Island. (1989).

[Bloom, 1975] Bloom, S. Some theorems on structural consequence operations. *Studia Logica*, 34(1):1 – 9. (1975).

[Bou et al., 2005] Bou, F., Cerdaña, Á. G., Verdú, V. On two fragments with negation and without implication of the logic of resituated lattices. Preprint 369, Mathematics Preprint Series, Barcelona University. (2005).

[Brown – Suszko, 1973] Brown, D., Suszko, R. (1973). Abstract logics. *Dissertationes Mathematicae*, 102:9–41.

[Bueno, 2004] Bueno, J. (2004). *Semântica Algébrica de Traduções Possíveis.* Dissertação de Mestrado. IFCH-Unicamp.

[Bueno et al., 2004] Bueno, J., Coniglio, M. E., Carnielli, W. A. Finite algebraizability via possible-translations semantics. *Proceedings of CombLog'04 - Workshop on Combination of Logics: Theory and Applications.* (W. A. Carnielli, F. M. Dionísio, P. Mateus eds.): 79–86. (2004).

[Caleiro, 2000] Caleiro, C. *Combining Logics.* Tese de Doutorado. IST-Lisboa. (2000).

[Caleiro – Ramos, 0?] Caleiro, C., Ramos, J. Cryptofibring. Submetido a publicação.

[Carnielli, 2000] Carnielli, W. A. Possible - translation semantics for paraconsistent logics. *Proceedings of the 1st World Congress on Paraconsistency.* (D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P.Van Bendegem eds.). Research Studies Press. Baldock, UK: 149 – 163. (2000).

[Carnielli – D'Ottaviano, 1997] Carnielli, W. A., D'Ottaviano, I. M. Translations between logics: A manifesto. *Logique & Analyse*, 40(157):67 – 81. (1997).

[Carnielli – Lima - Marques, 1999] Carnielli, W. A., Lima - Marques, M. Society semantics and Multiple - valued Logics. *Contemporary Mathematics.* Vol. 235 . (W. A. Carnielli, I. M. L. D'Ottaviano eds.). American Mathematical Society. Providence, Rhode Island: 435 – 448. (1999).

[Chang – Keisler, 1973] Chang, C. C., Keisler, H. J. *Model Theory.* North Holland and American Elsevier Co., New York. (1973).

[Cignoli et al., 1995] Cignoli, R., D'Ottaviano, I., Mundici, D. *Álgebras das Lógicas de Łukasiewicz.* Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Campinas. (1995).

[Coniglio, 2005] Coniglio, M. The meta-fibring environment: Preservation of meta-properties by fibring. (2005). *CLE e-Prints*, 5(4).
URL = http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_5,n_4,2005.htm.

[Czelakowski, 1980] Czelakowski, J. Reduced products of logical matrices. *Studia Logica*, 39:19–43. (1980).

[Czelakowski, 1981] Czelakowski, J. Equivalential logics (I) e (II). *Studia Logica*, 40:227–236; 335–372. (1981).

[Czelakowski, 2001] Czelakowski, J. *Protoalgebraic Logics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. (2001).

[da Silva et al., 1999] da Silva, J. J., D'Ottaviano, I. M., Sette, A. M. Translations between logics. *Models, Algebras and Proofs: Lecture Note in Pure and Applied Mathematics. vol. 203.*. (X. Caicedo, C. H. Montenegro eds.). Marcel Dekker. Providence, Rhode Island: 435–448. (1999).

[D'Ottaviano, 1982] D'Ottaviano, I. M. L. (1982). *Sobre uma Teoria de Modelos trivalente.* Tese de Doutorado. IMECC - UNICAMP. Campinas.

[D'Ottaviano – da Costa, 1970] D'Ottaviano, I. M. L., da Costa, N. C. A. Sur un problème de Jaśkowski. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris. Séries A - B*, t. 270:1349–1353. (1970).

[Feitosa – D'Ottaviano, 2001] Feitosa, H. A., D'Ottaviano, I. M. L. Conservative translations. *Annals of Pure and Applied Logic*, 108:205–227. (2001).

[Fernández, 2001] Fernández, V. L. (2001). *Semântica de Sociedades para lógicas n-valentes.* Dissertação de Mestrado. IFCH-Unicamp.

[Fernández – Coniglio, 2003a] Fernández, V. L., Coniglio, M. E. . Combining valuations with society semantics. *Journal of Applied Non - Classical Logics*, 13(1):21–46. (2003)

[Fernández – Coniglio, 2003b] Fernández, V. L., Coniglio, M. E. Syntactic fibring of algebraizable logics. *XIII Brazilian Logic Conference – Book of Abstracts*: 61–62. (2003).

[Fernández – Coniglio, 2004] Fernández, V. L.; Coniglio, M. E. Fibring algebraizable consequence systems. *Proceedings of CombLog'04 - Workshop on Combination of Logics: Theory and Applications.* (W. A. Carnielli, F. M. Dionísio, P. Mateus eds.), pps. 93–98. (2004).

[Finger, 2004] Finger, M. Fusion of normal and non - normal modal logics. *Proceedings of CombLog'04 - Workshop on Combination of Logics: Theory and Applications.*(W. A. Carnielli, F. M. Dionísio, P. Mateus eds.), pps. 113–118. (2004).

[Font – Jansana, 1994] Font, J. M., Jansana, R. A general algebraic semantics for deductive systems. *Bulletin of the IGPL*, 2:55–76. (1994).

[Font et al., 2003] Font, J. M., Jansana, R., Pigozzi, D. A survey of abstract algebraic logic. *Studia Logica (Special Issue on Abstract Algebraic Logic II)*, 74(1–2):13–97. (Uma versão preliminar aparece como Preprint 329, Mathematics Preprint Series, Universitat de Barcelona). (2003).

[Gabbay, 1994] Gabbay, D. *What is a logical system?* Oxford Science Publications. (1994).

[Gabbay, 1996] Gabbay, D. Fibred semantics and the weaving of logics: part 1. *The Journal of Symbolic Logic*, 61(4):1057–1120. (1996).

[Gabbay, 1999] Gabbay, D. *Fibring Logics.* Clarendon Press - Oxford. (1999).

[Gödel, 1932] Gödel, K. Zum intuitionistischen aussagenkalkül. *Mathematisch – naturwissenschaftliche Klasse*, 69:65 – 66. (1932).

[Goldblatt, 1979] Goldblatt, R. *Topoi. The categorial analysis of Logic.* Nort Holland, Amsterdam.

[Hájek, 1998] Hájek, P. (1997). *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer, Amsterdam. (1979).

[Herrmann, 1996] Herrmann, B. Equivalential and algebraizable logics. *Studia Logica*, 57:419–436. (1996).

[Herrmann, 1997] Herrmann, B. Characterizing equivalential and algebraizable logics by the Leibniz operator. *Studia Logica*, 58:305–323. (1997).

[Jánossy et al., 1996] Jánossy, A., Kurucz, A., Eiben, A. Combining algebraizable logics. *The Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(2):336–380. (1996).

[Lewin et al., 1990] Lewin, R., Mikenberg, I., Schwarze, M. Algebraization of paraconsistent logic P^1. *The Journal of Non-Classical Logics*, 7(1/2):79–88. (1990).

[Lewin et al., 1991] Lewin, R., Mikenberg, I., Schwarze, M. C_1 is not algebraizable. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32(4):609–611. (1991).

[Łoś – Suszko, 1958] Łoś, J., Suszko, R. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae*, 20:177–183. (1958).

[Łuzasiewicz – Tarski, 1930] Łukasiewicz, J., Tarski, A. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus des Séances de la Societé des Sciences et des Lettres*, 23:30–50. (1930).

[Marcos, 1999] Marcos, J. *Semântica de Traduções Possíveis.* Dissertação de Mestrado. IFCH-Unicamp. (1999).

[Mendelson, 1964] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic.* D. Van Nostrand Company Inc., London. (1964).

[Németi – Andréka, 1994] Németi, I., Andréka, H. General algebraic logic: A perspective on “What is logic”. Incluido em [Gabbay, 1994]: 393–443. (1994).

[Porte, 1983] Porte, J. Axiomatization and independence in $S4$ and $S5$. *Reports on Mathematical Logic*, 16:23–33. (1983).

[Prucnal – Wrónski, 1974] Prucnal, T., Wrónski, A. An algebraic characterization of the notion of structural completeness. *Bulletin of the Section of Logic*, 3:30–33. (1974).

[Rasiowa, 1974] Rasiowa, H. *An Algebraic approach to Non-Classical Logics*. Nort-Holland, Amsterdam. (1974).

[Rasiowa – Sikorski, 1970] Rasiowa, H., Sikorski, R. *The Mathematics of Metamathematics*. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 3a. ed. (1970).

[Sernadas et al., 1999] Sernadas, A., Sernadas, C., Caleiro, C. Fibring of logics as a categorical construction. *Journal of Logic and Computation*, 9 (2):149–179. (1999).

[Sette, 1973] Sette, A. On the propositional calculus P^1. *Mathematica Japonicae*, 18:173–180. (1973).

[Sette – Carnielli, 1995] Sette, A., Carnielli, W. A. Maximal weakly-intuitionistic logics. *Studia Logica*, 55:181–20. (1995).

[Surma, 1979] Surma, S. On the origin and subsequent applications of the concept of the Lindenbaum algebra. *Proceedings of the sixth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Hannover.* (L. J. Cohen, J. Łoś, H. Pfeiffer and K. P. Podewski, eds.): 93–98. (1979).

[Tarski, 1935a] Tarski, A. Grundzüge des Systemenkalküls. Erster Teil. *Fundamenta Mathematicae*, 25:503–526. (A tradução ao inglês aparece em [Tarski, 1983]). (1935).

[Tarski, 1935b] Tarski, A. Zur grundlegung der booleschen algebra. i. *Fundamenta Mathematicae*, 24:177–198. (A tradução ao inglês aparece em [Tarski, 1983]). (1935).

[Tarski, 1983] Tarski, A. *Logic, Semantics, Metamathematics.* Hackett Publishing Company, Indianapolis, 2nd. ed. (1983).

[Urquhart, 1977] Urquhart, A. A finite matrix whose consequence relation is not finitely axiomatizable. *Reports on Mathematical Logic*, 9:71–73. (1977).

[van Benthem – Pearce, 1984] van Benthem, J., Pearce, D. A mathematical characterization of interpretation between theories. *Studia Logica*, 43:295–303. (1984).

[Wójcicki, 1969] Wójcicki, R. Logical Matrices srongly adequate for structural sentential calculi. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences.Série des sci. math., astr. et phisiques*, 6:333 – 335. (1969).

[Wójcicki, 1973] Wójcicki, R. Matrix Approach in methodology of Sentential Calculi. *Studia Logica*, 32:7 – 39. (1973).

[Wójcicki, 1988] Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi.* Synthese Library. Kluwer Academic Publishers. (1988).

[Wrónski, 1974] Wrónski, A. On cardinalities of matrices strongly adequate for the intuitionistic propositional logic. *Reports on Mathematical Logic*, 3:67 – 72. (1974).

[Zanardo et al., 2001] Zanardo, A., Sernadas, A., Sernadas, C. Fibring: Completeness preservation. *The Journal of Symbolic Logic*, 66(1):414–439. (2001).