Relatório de Iniciação Científica[1]: Feixes sobre álgebras de Heyting e aplicações à teoria de conjuntos *fuzzy*.

Teófilo de Souza Reis
(Aluno)

Marcelo Esteban Coniglio
(Orientador)

Universidade Estadual de Campinas

[1]Este projeto teve apoio financeiro do CNPq

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O conceito de feixe tem surgido de maneira natural em diferentes ramos da matemática, sob diferentes motivações e perspectivas. A principal característica dos feixes, do ponto de vista geométrico, é a obtenção de propriedades globais a partir de propiedades locais. As aplicações de feixes podem ser apreciadas em diversas disciplinas da matemática, tais como geometria analítica, geometria diferencial e topologia algébrica (através do estudio de cohomologia com coeficientes em feixes).

A noção de feixe surgiu a partir dos estudos no século XIX da continuação analítica de funções, que foram posteriormente formalizados e sistematizados por H. Weyl. Na década compreendida entre os anos 1940 e 1950, H. Cartan e K. Oka propuseram o estudo de ideiais sobre um domínio, motivados pelo estudo de domínios de holomorfia em análise complexa em varias variáveis. Nestes estudos apareceu pela primeira vez (embora implícito) o conceito de feixe. A primeira definição formal de feixe sobre um espaço topológico foi dada por J. Leray em 1945, curiosamente formulada em termos de conjuntos fechados. A versão atual, utilizando o reticulado de conjuntos abertos de um espaço topológico, foi introduzida pelo próprio Leray entre os anos 1948 e 1951. Nesses trabalhos foi provada a equivalência dos conceitos de feixe sobre um espaço topológico e os *étale espace* introduzidos por Lazard e estudados em profundidade por H. Cartan em 1950. Foi a partir dos inovadores trabalhos de Grothendieck em geometria algébrica que foi elaborada uma noção mais geral de feixe, a de feixes sobre um *site* (hoje em dia chamados de *topos de Grothendieck*), o que levou imediatamente à importante noção de topos.

A noção de feixe sobre um espaço topológico X pode ser compreendida a partir do seguinte exemplo: considere, para cada aberto $U \subseteq X$, o conjunto $\mathcal{A}(U)$ de funções com domínio U satisfazendo alguma propriedade específica (por exemplo, funções $f : U \to \mathbb{R}$ contínuas, ou funções diferenciáveis). A família de conjuntos $\{\mathcal{A}(U)\}_{U\in\Omega(X)}$ (aqui, $\Omega(X)$ denota o reticulado completo dos subconjuntos abertos de X) deve ser definida de maneira tal que a descrição de cada função $f \in \mathcal{A}(U)$ possa ser feita a partir da descrição da restrição $f|_V$ de f a cada subconjunto aberto V de U. Isto é, a “colagem” das funções $f|_{V_i}$ (para uma cobertura por abertos $\{V_i\}_{i\in I}$ de U) deve permitir recuperar a função f, e vice-versa. Para tornar o exemplo mais concreto, suponhamos que $\mathcal{A}(U)$ consiste do conjunto de funções contínuas $f : U \to \mathbb{R}$, e seja $\{f_i\}_{i\in I}$ uma família tal que $f_i \in \mathcal{A}(V_i)$, em que $\{V_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura por abertos do aberto $U \in \Omega(X)$

tal que $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$ (ou seja, as funções f_i são dois a dois *compatíveis*). Portanto, existe uma única função $f \in \mathcal{A}(U)$ obtida pela "colagem"(a união) das funções f_i tal que $f|_{V_i} = f_i$. A possibilidade de descrever um objeto "global"(no exemplo, f) a partir de informação "local"compatível (no exemplo, a família das funções f_i) é a essência do conceito de feixe.

Seguindo com este exemplo, podemos descrever o feixe $\mathcal{A}$ alternativamente da maneira seguinte: definimos, para cada $x \in X$, o conjunto F_x de "germes"em x das funções sendo consideradas. A união disjunta $E = \coprod_{x \in X} F_x$ pode ser topologizada de maneira de obter um fibrado $p : E \to X$ sobre X (isto é, a projeção p que envia os elementos da fibra F_x no ponto x é um homeomorfismo local). Cada elemento $f : U \to \mathbb{R}$ de $\mathcal{A}(U)$ é recuperado como a seção $\hat{f} : U \to E$ da projeção $p : E \to X$ tal que $\hat{f}(x)$ é o germe de f em x, para cada $x \in U$. Nesta perspectiva, um feixe é um conjunto F_x que "varia continuamente"junto a x sobre o espaCo X. Frequentemente os conjuntos F_x possuem alguma estrutura. Assim, um feixe de grupos abelianos é um feixe tal que cada fibra F_x é um grupo abeliano.

Foi o grande matemático J.P. Serre quem observou que os feixes poderiam ser utilizados também em geometria algébrica, substituindo os subconjuntos $U \subseteq X$ por funções $U \to X$ de um espaço U em X. Esta generalização somente foi possí vel utilizando conceitos de teoria de categorias, o que levou Grothendieck a definir feixes sobre um *site*, utilizando famílias apropriadas de morfismos $U_i \to X$ (que generalizam a idéia de "cobertura por abertos"). Desta maneira, no contexto das assim chamadas "topologias de Grothendieck"os feixes nada mais são do que funtores (contravariantes) satisfazendo a propriedade de poder "colar"famílias de seções localmente compatíveis.

A linguagem da Teoria de Categorias (TC) revelou-se fundamental para o desenvolvimento moderno da teoria de feixes. A partir dos desenvolvimentos de Lawvere, desde 1963, da semântica funtorial, numa tentativa de obter uma fundamentação da matemática a partir de conceitos puramente categoriais, inicia-se uma frutífera interação da TC (em especial, teoria de topos elementares) com a lógica matemática. Um topos elementar pode ser visto como uma categoria de conjuntos generalizados (por exemplo, conjuntos variando continuamente, isto é, feixes sobre um espaço topológico) na qual é possível efetuar operações "conjuntistas" tais como a formação do objeto Y^X de todas as aplicações de X em Y, o produto cartesiano $X \times Y$, ou o objeto $\wp(X)$ de todos os subobjetos de X. Utilizando topos como "universos de conjuntos" (parafraseando Lawvere) é possível obter de maneira mais geral alguns desenvolvimentos avançados da teoria de conjuntos, tais como a independência da Hipótese do Contínuo ou a independência do Axioma da Escolha usando o método de *forcing* de Cohen, mas agora generalizado para a teoria de topos.

Entre os topos elementares, os feixes sobre espaços topológicos são um caso particular interessante. A partir dos trabalhos de C. Mulvey, é possível analizar álgebras C^* comutativas (as quais, pelo teorema de Gelfand-naimark, são da forma $C(X)$, o espaço de funções contínuas sobre X a valores complexos) através do feixe de funções contínuas sobre X a valores reais, o qual representa (via as suas seções globais) os elementos hermitianos da álgebra. Este estudo de $C(X)$ via o feixe de funções reais contínuas sobre X pode ser feito utilizando a lógica interna do topos de feixes sobre o espaço X. Sabe-se que a lógica interna dos topos é intuicionista, portanto é possível realizar matemática construtiva com modelos em topos.

A generalização natural dos feixes sobre espaços topológicos são os feixes sobre álgebras de Heyting completas (aHc's). De fato podemos observar que, na definição e no estudo dos feixes sobre um espaço topológico X, a única informação topológica sobre X que é utilizada é a que diz respeito com a estrutura de reticulado $\Omega(X)$, e que resulta ser uma estrutura de aHc. Surge portanto o interesse natural de estudar o topos de feixes sobre aHc's. Um reticulado Ω é uma aHc se é completo (isto é, admite o supremo e o ínfimo de qualquer subconjunto $B \subseteq \Omega$) e os ínfimos distribuem por supremos arbitrários, isto é: $x \wedge \bigvee_{i \in I} x_i = \bigvee_{i \in I} x \wedge x_i$. Os feixes sobre aHc's constituem um interessante ponto médio de abstração entre os topos de Grothendieck (dos quais são um caso particular) e os feixes sobre espaços topológicos (os quais generalizam). Estes feixes podem ser alternativamente caracterizados algebricamente (em vez de categorialmente) a partir de uma relação de igualdade entre seções, que toma valores na aHc. Estas estruturas denominam-se Ω-sets. Assim, nos Ω-sets existe implícita uma noção de igualdade que toma valores intermediários entre os valores clássicos 0 (falso) e 1 (verdadeiro). Esta característica dos feixes sobre uma aHc é o ponto de partida para a sua aplicação no estudo geral da teoria dos conjuntos *fuzzy*, e constitui a principal motivação para o nosso projeto de pesquisa.

Os conjuntos *fuzzy*, introduzidos por L. Zadeh em 1965, generalizam o conceito clássico de conjunto ao permitir diferentes graus de pertinência, além dos clássicos 0 (não pertinência) e 1 (pertinência absoluta). Assim, um conjunto *fuzzy* F é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_F : X \to [0,1]$, em que X é o domínio de definição do conjunto. Os conjuntos clássicos são então conjuntos *fuzzy* F tais que μ_F toma apenas os valores 0 e 1. Esta idéia pode ser generalizada, considerando conjuntos *fuzzy* caracterizados por funções caractarísticas $\mu : X \to L$, em que L é um reticulado.

Desde a sua aparição, a teoria de conjuntos *fuzzy* chamou a atenção de pesquisadores de diferentes áreas, e o seu desenvolvimento foi considerável, tanto no campo teórico quanto nas suas aplicações tecnológicas. No âmbito da matemática, os conjuntos *fuzzy* têm dado origem a diferentes tópicos de pesquisa tais como medidas e integrais generalizadas, as quais podem ser combinadas com métodos estatísticos. Os conjuntos *fuzzy* têm mostrado também a sua aplicabilidade no desenvolvimento de tecnologias de informação, por exemplo no campo do reconhecimento de padrões e visão computadorizada. Existem também inúmeras aplicações de conjuntos *fuzzy* no desenvolvimento de software com ferramentas de inteligência artificial (por exemplo, combinados com redes neurais e computação evolutiva), assim como aplicações na engenharia, especialmente na área de controle e robótica.

O desenvolvimento da teoria de conjuntos *fuzzy*, porém, foi marcado pela escolha às vezes arbitrária ou não devidamente justificada de determinadas opções, e não existe um consenso geral entre os pesquisadores a respeito da correta definição de alguns conceitos da teoria de conjuntos *fuzzy*.

A partir dos recentes trabalhos de U. Höhle, fica demonstrado que a teoria de feixes sobre aHc's é a teoria matemática mais apropriada para definir e analisar os conjuntos *fuzzy* e conceitos correlatos, tais como função de pertinência, medida de pertinência, ordens *fuzzy*, equações relacionais *fuzzy*, etc. No trabalho [8], apresentado no *25th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory*, em fevereiro de 2004. Höhle mostra que uma boa parte da teoria de conjuntos *fuzzy* está incluida na teoria de feixes. Assim, conjuntos *fuzzy* são subfeixes de um feixe simples, relações de similaridade são feixes de relações de equivalência, e os subgrupos *fuzzy* são subfeixes de subgrupos de feixes de grupos. Mais ainda, interseções, uniões, imagens e imagens inversas de conjuntos *fuzzy*, assim como a Min-Max composição de relações *fuzzy*, podem ser obtidos a partir de construções (usuais) na categoria de feixes. Adicionalmente, certos problemas da teoria de conjuntos *fuzzy* que não tem uma resposta satisfatória (por exemplo, na teoria de grupos *fuzzy*) são facilmente resolvidos no contexto da matematicamente bem desenvolvida teoria de feixes.

Capítulo 2

Reticulados e aHc´s

Nesta primeira parte estudamos os conjuntos ordenados e mapas entre estes conjuntos. Feito isto, voltamos nossa atenção para os reticulados, em especial para os reticulados completos. Podemos então passar ao estudo das álgebras de Heyting completas, que desempenham papel crucial nos parágrafos seguintes. As referências para este capítulo são [1], [2] e [3].

2.1 *Posets* e reticulados

As estruturas ordenadas são extremamente comuns e se fazem presentes em todos os ramos da matemática. Abaixo definimos um dos tipos básicos de estruturas ordenadas.

Definição 2.1 *Sejam P um conjunto e $\leq$ uma relação binária em P.*
A relação $\leq$ é uma pré-ordem se satisfaz, para quaisquer $x, y, z \in P$,
i) $x \leq x$ (reflexividade)
ii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitividade)
A relação $\leq$ é uma ordem parcial se, além de i) e ii), também satisfizer
iii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (anti-simetria).
O par $(P, \leq)$ é dito um poset (abreviação para "partially ordered set").

É essencial observar que nem todos os elementos de um *poset* são comparáveis entre si. Como exemplo, tome um conjunto X não vazio e seja $P = (\wp(X), \subseteq)$. Como bem sabemos, existem elementos x,y $\in \wp(X)$, $x \cap y = \emptyset$, tais que $x \neq \emptyset \neq y$ e portanto $x \not\subseteq y \not\subseteq x$. Quando em um *poset* P todos os elementos forem comparáveis (isto é, para quaisquer $x, y \in P$, vale $x \leq y$ ou $y \leq x$), diremos que P é uma cadeia.

Quando não houver risco de confusão, diremos apenas P é um *poset* para nos referir ao par $(P, \leq)$. Vejamos alguns exemplos de *posets*:

• O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais com a relação de ordem usual é um *poset* . Mais ainda: $\mathbb{N}$ é uma cadeia.

• Se P é um *poset* e $Q \subseteq P$, então Q herda uma estrutura de pré-ordem: dados $x, y \in Q$, definimos $x \leq y$ em Q se, e só se, $x \leq y$ em P. Dizemos que Q tem a ordem induzida por P.

Uma maneira de produzir novos *posets* é inverter a relação de ordem. Assim, se P é um *poset*, o *poset* dual de P, P^∂ , é obtido definindo-se $x \leq y$ em P^∂ se, e só se, $y \leq x$ em P. Dada uma proposição Φ sobre *posets* , a proposição dual Φ^∂ é obtida trocando-se, em Φ , $\leq$ por $\geq$ e vice-versa.

A dualidade em *posets* nos permite, em alguns casos, redizir pela metade a quantidade de proposições a se provar, pois se uma proposição Φ sobre *posets* é verdadeira em todos os *posets*, então Φ^∂ é verdadeira em todos os *posets*. A afirmação precedente é conhecida como *Princípio da Dualidade*.

Olharemos agora um pouco mais de perto a estrutura de um *poset*. Começamos por destacar alguns elementos especiais. Se P é um *poset* e $Q \subseteq P$, um elemento $a \in Q$ é um elemento maximal de Q se $a \leq x \in Q \Rightarrow a = x$. $a \in Q$ será dito maior elemento (ou máximo) de Q se, para todo $x \in Q$, tem-se $a \geq x$. Neste caso, escrevemos $a = maxQ$. Elemento minimal e menor elemento (ou mínimo) são definidos por dualidade. Note que Q tem um maior elemento somente se existir exatamente um elemento maximal, e este maior elemento, quando existe, é unico. Já os elementos maximais não precisam ser únicos. O maior elemento de P, se existir, será chamado top, e escreveremos $\top$ (lê-se "top"). O menor elemento de P, se existir, será chamado bottom e escrevemos $\bot$ ("bottom").

A fim de abarcar uma classe maior de objetos, em vez de máximo e mínimo pediremos a existência de supremos e ínfimos. As definições destes termos são as mesmas que comumente surgem em Análise. Para relembrar, sejam P um *poset* e $S \subseteq P$. Um elemento $x \in P$ é uma cota superior de S se, $\forall s \in S$, $s \leq x$. O conjunto de todas as cotas superiores de S é $S^u = \{x \in P \mid (\forall s \in P) s \leq x\}$. Se S^u tem um menor elemento a, então a é chamado menor cota superior, ou supremo, de S. Escrevemos $a = sup(S)$ ou $a = \bigvee S$. Por dualidade definem-se cota inferior, o conjunto S^l das cotas inferiores e maior cota inferior, ou ínfimo, de S (para o qual escrevemos $inf(S)$ ou $\bigwedge S$). Para facilitar as notações, escreveremos $x \vee y$ ("x ou y") para $sup\{x, y\}$, e $x \wedge y$ ("x e y") para $inf\{x, y\}$.

Como estamos interessados em *posets* com supremos e ínfimos, daremos a esta classe um nome especial.

Definição 2.2 *Seja P um poset não vazio.*
i) P é um reticulado se $x \vee y$ e $x \wedge y$ existem para quaisquer $x, y \in P$.
ii) P é um reticulado completo se $\bigvee S$ e $\bigwedge S$ existem para todo $S \subseteq P$.

É fácil ver que, se L é um reticulado e $a, b \in L$, as operações $\vee$, $\wedge$ e a relação de ordem $\leq$ estão relacionadas por

$$(a \leq b) \leftrightarrow (a \vee b = b) \leftrightarrow (a \wedge b = a)$$

Segue-se diretamente das definições que em um reticulado L, as operações binárias $\vee$, $\wedge$ satisfazem, para todos $a, b, c \in L$,
$(L1)$ $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (associatividade)
$(L2)$ $a \vee b = b \vee a$ (comutatividade)
$(L3)$ $a \vee a = a$ (idempotência)
$(L4)$ $a \vee (a \wedge b) = a$ (lei de absorção).

Por dualidade, obtemos as seguintes propriedades:

$(L1)^\partial$ $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

$(L2)^{\partial}$ $a \wedge b = b \wedge a$
$(L3)^{\partial}$ $a \wedge a = a$
$(L4)^{\partial}$ $a \wedge (a \vee b) = a$

Podemos ver um mesmo *poset* L de duas maneiras: como um conjunto com uma relação de ordem $\leq$ ou como um conjunto com duas operações binárias $\vee$, $\wedge$ satisfazendo as porpriedades $(L1) - (L4)$ e $(L1)^{\partial}$-$(L4)^{\partial}$. O que nos permite olhar um mesmo objeto de duas formas diferentes são os seguintes fatos:
i) Para todos $a, b \in L$, $a \vee b = b$ se, e só se, $a \wedge b = a$.
ii) Defina $\leq$ por $a \leq b$ se $a \vee b = b$. Então $\leq$ é uma relação de ordem.
iii) Com $\leq$ como em ii), $(L, \leq)$ é um reticulado no qual as operações originais combinam com as operações induzidas, isto é, para quaisquer $a, b \in L$,

$$a \vee b = sup\{a, b\} \text{ e } a \wedge b = inf\{a, b\}$$

Mostraremos duas outras formas de se obter novos reticulados. A primeira consiste em encontrar reticulados contidos em reticulados já conhecidos. Para isto, tomemos um reticulado L e $\emptyset \neq M \subseteq L$. M é dito um subreticulado de L se

$$a, b \in L \Rightarrow a \vee b \in M \text{ e } a \wedge b \in M.$$

A segunda maneira consiste em formar o produto de dois reticulados. Se L e K são reticulados, defina $\vee$ e $\wedge$ coordenada a coordenada em $L \times K$, como abaixo

$$(l_1, k_1) \vee (l_2, k_2) = (l_1 \vee l_2, k_1 \vee k_2)$$

$$(l_1, k_1) \wedge (l_2, k_2) = (l_1 \wedge l_2, k_1 \wedge k_2)$$

$(L \times K, \vee, \wedge)$ é chamado reticulado produto de L e K.
Também podemos ordenar $L \times K$ com a ordem lexicográfica:

$$(l_1, k_1) \leq (l_2, k_2) \text{ se } l_1 < l_2 \text{ ou } (l_1 = l_2 \text{ e } k_1 \leq k_2).$$

É possível mostrar que o reticulado obtido ordenando-se $L \times K$ como acima é isomorfo ao que se obtém quando definimos $\vee$ e $\wedge$ coordenada a coordenada. Produtos iterados e potências são definidas de maneira imediata.

Reticulados especialmente interessantes são aqueles em que ínfimos e supremos gozam de distributividade entre si. Quando isto ocorrer, diremos que o reticulado é distributivo. Mais precisamente, um reticulado L é dito distributivo se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

$$[\vee, \wedge]\text{: para todos } a, b, c \in L,\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$[\wedge, \vee]\text{: para todos } a, b, c \in L,\ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

2.2 Morfismos

Sabendo o que são *posets*, podemos considerar funções entre estas estruturas. Para isto, consideremos $(P, \leq)$ e $(Q, \preceq)$ *posets* e $x, y \in P$. Um mapa $\varphi : P \to Q$ é dito ser

i) um morfismo (de ordem) (ou função monótona) se $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y)$.
ii) um mergulho (de ordem) se $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \preceq (y)$.
iii) um isomorfismo (de ordem) se é um mergulho sobrejetivo de P em Q.

Podemos também considerar morfismos de reticulados. Como é de se esperar, estes morfismos devem preservar a estrutura de reticulado. Consideremos então dois reticulados L e K e um mapa $f : L \to K$.

i) f é dito um homomorfismo (de reticulados) se, para todos $a, b \in L$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ e $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$
ii) f é dito um isomorfismo se for um homomorfismo bijetivo.
iii) Se f for um homomorfismo injetivo, então o subreticulado $f(L)$ de K é isomorfo a L, e f será dito um mergulho (de L em K).

Relembrando os dois modos de ver um mesmo reticulado L, percebemos que um mapa $f : L \to K$ (onde K é também um reticulado) é um isomorfismo de ordem se, e somente se, for um mergulho de ordem, se, e somente se, for um isomorfismo de reticulados. Pode-se também mostrar que f preserva ordem se, e só se, para todos $a, b \in L$, $f(a \vee b) \geq f(a) \vee f(b)$, se, e só se, para todos $a, b \in L$, $f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$.

2.3 Álgebras de Boole

Seja L um reticulado distributivo com $\top$ e $\perp$. Um elemento $b \in L$ será dito *complementado* (ou *clopen*) se, e só se, o sistema

$$\begin{cases} x \wedge b = \perp \\ \\ x \vee b = \top \end{cases}$$

possuir uma solução em L. Quando isto ocorrer, esta solução será única, e será denotada por $\neg b$.

Uma *álgebra de Boole* (que abreviaremos aB) é um reticulado distributivo com $\top$ e $\perp$ no qual todo elemento é complementado. Denotaremos por $B(L)$ o conjunto dos elementos complementados de L. Um subconjunto S de uma aB B é uma sub-álgebra de Boole de B se, e só se, $\top$, $\perp \in S$ e S for fechado por ínfimos, supremos e complementações.

Podemos definir equacionalmente a classe das aB adicionando uma nova operação unária $\neg$ às operações de reticulado e adicionando os seguintes axiomas àqueles que definem um reticulado distributivo com $\top$ e $\perp$:
(i) $\forall x(x \vee \neg x = \top\ e\ x \wedge \neg x = \perp$
(ii) $\neg\perp = \top\ e\ \neg\top = \perp$.

Para um exemplo de aB, considere, em um espaço topológico $(T, \Omega(T))$, o reticulado $C(T)$ dos *clopens* de T. Mostra-se que $C(T) = B(\Omega(T))$, sendo portanto uma aB. Pode-se mostrar que toda aB é isomorfa a $C(X)$ para algum espaço topológico X. O reticulado dos abertos regulares de T é também uma aB.

Numa aB B, definimos, para $a, b \in B$, a *implicacão* $a \to b$ por

$$a \to b = \neg a \vee b.$$

Valem as seguintes propriedades (com $x, y, z \in B$):
(i) $\neg\neg x = x$ (lei da dupla negação)

(ii) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$; $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ (leis de De Morgan)
(iii) $x \leq (y \to z)$ se, e só se, $x \wedge y \leq z$
(iv) $x \to y = max\{a \in B : x \wedge a \leq y\}$
(v) $x \leq y$ se, e só se, $x \to y = \top$
(vi) $x \wedge (x \to y) \leq y$ (modus ponens)
(vii) $(x \to y) = (\neg y \to \neg x)$ (contrapositiva)

Morfismos de álgebras de Boole são simplesmente morfismos de reticulados distributivos. Se $f : L \to K$ é um morfismo de reticulados distributivos, então
(i) se $x \in B(L)$, então $f(x) \in B(K)$ e $f(\neg x) = \neg f(x)$;
(ii) se L é uma aB, então f preserva complementações e implicações.

2.4 Álgebras de Heyting

Uma *álgebra de Heyting* (brevemente aH) é um reticulado distributivo H com $\top$ e $\bot$ tal que, para todos $x, y \in H$,

$$max\{z \in H \mid z \wedge x \leq y\} \text{ existe em } H.$$

Este elemento é denotado por

$$x \to y \text{ (“x implica y”)}.$$

Assim, para todo $x, y, z \in H$,

$$x \wedge z \leq y \text{ se, e só se, } z \leq (x \to y).$$

Se H e L são álgebras de Heyting, um mapa $f : H \to L$ é um morfismo de aH se, e só se, f é um morfismo de reticulados tal que para todos $x, y \in H$, $f(x \to y) = f(x) \to f(y)$.

Um exemplo fundamental de uma aH é a topologia $\Omega(X)$ de um espaço topológico X. A implicação $\to$ é dada por

$$U \to V = int((X - U) \cup V).$$

onde $int(A)$ denota o interior do conjunto $A \subseteq X$.

Claramente cadeias com primeiro e último elementos são álgebras de Heyting.

Toda aB B é uma aH, pois quaisquer que sejam $x, y \in B$, $(\neg x \vee y)$ é o maior $z \in B$ tal que $z \wedge x \leq y$.

Podemos definir por meio de equações a classe das álgebras de Heyting. Para isto, basta adicionar às relações definidoras de reticulados distributivos as três identidades seguintes:
(1) $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$
(2) $x \wedge (y \to z) = x \wedge ((x \wedge y) \to (x \wedge z))$
(3) $x \wedge ((x \wedge y) \to x) = x$

Algumas das propriedades básicas das álgebras de Heyting estão listadas abaixo.

Para x, y, z em uma aH H, temos
(a) $x \leq y$ se, e só se, $x \to y = \top$

(b) (Modus Ponens) $x \wedge (x \rightarrow y) \leq y$
(c) $y \leq z$ implica $(x \rightarrow y) \leq (x \rightarrow z)$ e $(z \rightarrow x) \leq (y \rightarrow x)$
(d) $x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$
(e) $(y \vee z) \rightarrow x = (y \rightarrow x) \wedge (z \rightarrow x)$
(f) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$
(g) $(x \rightarrow t) \vee (y \rightarrow z) \leq (x \wedge y) \rightarrow (t \vee z)$
(h) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow z$

Definimos o *pseudo−complemento* de $x \in H$ por $\neg x \overset{\text{def}}{=} (\text{x} \rightarrow \perp)$. Com relação a esta operação, temos as seguintes propriedades:
(a) $x \leq \neg\neg x$
(b) $\neg x = 1$ implica $x = 0$
(c) $x \leq y$ implica $\neg y \leq \neg x$
(d) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
(e) $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y)$
(f) $\neg\neg\neg x = \neg x$

No caso de H ser um espaço topológico X, o pseudo-complemento de $U \in \Omega(X)$ é dado por $\neg U = int(X - U)$.

Se $h : H \rightarrow K$ é um morfismo de aH, então h preserva pseudo-complementos, isto é, $h(\neg x) = \neg h(x)$, para todo $x \in H$.

Uma *álgebra de Heyting completa* (brevemente *aHc*) é uma aH H na qual H é um reticulado completo. Se H e H' são *aHc*'s, um morfismo $f : H \rightarrow H'$ é um morfismo de *aHc*'s se, e só se, preserva ínfimos finitos e supremos arbitrários entre reticulados completos.

Se H é uma *aHc*, um subconjunto L de H é uma $sub - aHc$ de H se a inclusão canônica de L em H for um morfismo de aHc's. Vê-se assim que se X é um conjunto não vazio, então as sub-aHc's de 2^X são as topologias em X.

Em uma aHc H, ínfimos finitos distribuem sobre supremos arbitrários, isto é,

$$x \wedge (\bigvee B) = \bigvee_{y \in B} (x \wedge y)$$

onde $x \in H$ e $B \subseteq H$. Comumente esta propriedade é usada para caracterizar as aHc's.

Encerramos esta seção esclarecendo que a semelhança de algumas propriedades de álgebras de Heyting com leis da lógica não são casuais: de certo modo, a teoria de aH pode ser vista como uma teoria algébrica da implicação.

Capítulo 3

Noções básicas de Teoria de Categorias

Abordamos agora tópicos básicos da Teoria de Categorias (TC). A atenção especial que dispensaremos à categoria **Set** é facilmente explicada: no próximo capítulo apresentaremos o conceito de *topos*, que generaliza, num sentido a ser precisado mais tarde, a noção de conjunto. As referências para este capítulo são [4] e [5].

3.1 Definição e exemplos

Um dos padrões recorrentes na Matemática é a introdução de uma classe de objetos e a seguir o estudo das funções entre objetos da classe introduzida. Exemplos não faltam: espaços vetorias e transformações lineares; grupos e homomorfismos de grupos; anéis e homomorfismos de anéis; reticulados e mapas entre reticulados; espaços topológicos e funções contínuas; variedades diferenciáveis e funções diferenciáveis. A Teoria de Categorias captura a essência dos exemplos acima, e permite tratar de maneira generalizada uma grande gama de conceitos matemáticos que recaem no padrão mencionado. Abaixo apresentamos a definição de categoria.

Definição 3.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é composta pelo seguinte:*

1) uma coleção $\mid \mathcal{C} \mid$, cujos elementos são chamados objetos de $\mathcal{C}$;

2) uma coleção de morfismos satisfazendo:

i) para cada par de objetos $A, B \in \mid \mathcal{C} \mid$, existe uma coleção de morfismos de A em B (denotada por $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, ou simplesmente $Hom(A,B)$, quando a categoria estiver subentendida), munida das operações dom e cod, que a cada morfismo em $\mathcal{C}$ associam, respectivamente, seu domínio e seu contra-domínio. Se $f \in Hom(A, B)$, escreveremos $f\colon A \to B$.

ii) existe uma operação parcial de composição entre morfismos: se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são morfismos, então existe em $\mathcal{C}$ o morfismo $g \circ f\colon A \to C$.

iii) a composição definida em ii) é associativa.

iv) para cada objeto A, existe o morfismo $id_A\colon A \to A$ (identidade em A) tal que se $f\colon A \to B$ e $g\colon C \to A$ são morfismos, então $f \circ id_A = f$ e $id_A \circ g = g$.

Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é pequena se $\mid \mathcal{C} \mid$ e a coleção de morfismos forem conjuntos. $\mathcal{C}$ é localmente pequena se, para quaisquer objetos A, B de $\mathcal{C}$, $Hom(A, B)$ é um conjunto.

Um recurso gráfico de grande utilidade no estudo da Teoria de Categorias são os diagramas. Abaixo seguem alguns exemplos de diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] & A \\
& C \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "g"]
\end{tikzcd}
$$

Formalmente, um diagrama em $\mathcal{C}$ é um par $\mathbf{D} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ tal que $\mathcal{O} = \{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de objetos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i,j \in I} Hom(A_i, A_j)$ é uma coleção de morfismos entre objetos de $\mathcal{O}$. Um diagrama é dito finito quando contém finitos objetos e morfismos. Os diagramas acima representam as condições ii) e iv) do item 2 da Definição 3.1.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de categorias.

• A categoria **SET** é categoria cujos objetos são conjuntos e cujos morfismos são funções entre conjuntos.

• **Top** é a categoria dos espaços topológicos e funções contínuas.

• Na categoria **Man**, os objetos são variedades diferenciáveis, e os morfismos são funções diferenciáveis.

• As categorias **Grp**, **Rng** e **Mon** têm por objetos, respectivamente, grupos, anéis e monóides. Em cada uma delas, os morfismos são os homomorfismos da estrutura considerada.

• Fixado um corpo $\mathbb{K}$, podemos contruir a categoria $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$, na qual os objetos são os espaços vetorias sobre $\mathbb{K}$ e os morfismos são as transformações lineares entre estes espaços.

• Dado um *poset* P, podemos vê-lo como uma categoria $\mathbf{C_P}$, onde $\mid \mathbf{C_P} \mid = P$ e, para todos $x, y \in P$,

$$
Hom(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\} & \text{se } x \leq y \\ \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

Como caso particular desta construção, ressaltamos que uma topologia $\Omega(X)$ pode ser vista como uma categoria, dado que $(\Omega(X), \subseteq)$ é um *poset*.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, podemos, a partir desta, formar novas categorias. Veremos agora alguns métodos de fazê-lo.

Categoria $\mathcal{C}^{\rightarrow}$: os objetos são as flechas de $\mathcal{C}$. Dados $f, g \in \mid \mathcal{C}^{\rightarrow} \mid$, uma flecha de f em g é um par $h = (h_1, h_2)$, onde $h_1 : dom(f) \rightarrow dom(g)$ e $h_2 : cod(f) \rightarrow cod(g)$ são flechas em $\mathcal{C}$ tais que o diagrama abaixo comuta.

$$
\begin{tikzcd}
dom(f) \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f"] & dom(g) \arrow[d, "g"] \\
cod(f) \arrow[r, "h_2"'] & cod(g)
\end{tikzcd}
$$

Identidade e composição de morfismos são definidos coordenada a coordenada.

Categorias slice (ou comma): Dada uma categoria $\mathcal{C}$, fixa-se um objeto A e constrói-se a categoria slice $\mathcal{C} \downarrow A$ que tem como objetos os morfismos de $\mathcal{C}$ com contra-domínio A, isto é, $\mid \mathcal{C} \downarrow A \mid = \bigcup_{X \in C} Hom(X, A)$. Um morfismo $\bar{k}$: $f \to g$ em $\mathcal{C} \downarrow A$ é um morfismo k: $dom(f) \to dom(g)$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} dom(f) \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & dom(g) \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Dado um objeto f: $B \to A$ de $\mathcal{C} \downarrow A$, tem-se $id_f = \imath \mathrm{d}_B$.

Dadas agora duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, podemos fazer seu produto, obtendo assim uma terceira categoria. A coleção de objetos e os morfismos são come descritos a seguir.

Categoria produto: A categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é tal que $\mid \mathcal{C} \times \mathcal{D} \mid = \mid \mathcal{C} \mid \times \mid \mathcal{D} \mid$. Dados os objetos (A, B) e (C, D) de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, um morfismo entre eles é um par $h = (f, g)$ de morfismos $f : A \to C$ e $g : B \to D$ em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. Composição e identidade são calculados coordenada a coordenada.

Categoria dual (ou oposta) A categoria dual (ou oposta) a $\mathcal{C}$, que denotamos $\mathcal{C}^{op}$, é definida por

i) $\mid \mathcal{C}^{op} \mid = \mid \mathcal{C} \mid$.

ii)$Hom_{\mathcal{C}^{op}}$(A,B)= $Hom_{\mathcal{C}}$(A,B).

Para obter a categoria dual, devemos inverter o sentido dos morfismos e da ordem das composições. Por exemplo, $f \circ g$ torna-se $g \circ f$.

3.2 Morfismos

Vamos agora observar o comportamento dos morfismos em uma categoria. Nossa motivação é encontrar generalizações de propriedades das funções (morfismos em **SET**), como injetividade e sobrejetividade.

Uma função $f : A \to$ B é dita injetiva se $f(a) = f(b)$ implica $a = b$. É fácil ver que $f : A \to B$ é injetiva se, e só se, para todo par de funções $f, g : X \to A$ tais que $f(g(x)) = f(h(x))$, para todo $x \in X$, tem-se g(x)= h(x). Ou seja, na igualdade $f \circ g = f \circ h$, podemos cancelar f em ambos os lados e concluir $g = h$.

Motivados pela observação precedente, dizemos que um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um monomorfismo se, para todo par de morfismos $g, h : X \to A$ tal que $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$.

Notemos agora que uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva se, para todo $y \in B$, existir $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como no caso de funções injetivas, é rotineiro verificar-se que $f : A \to B$ é sobrejetiva se, e somente se, para todo par de funções $g, h : B \to X$ tais que $g(f(a)) = h(f(a))$ para todo $a \in A$, então $g(b) = h(b)$ para todo $b \in B$. Ou seja, na igualdade $g \circ f = h \circ f$, podemos cancelar f e obter $g = h$.

A fim de generalizar a noção de função sobrejetiva, dizemos que um morfismo $f : A \to B$ é um epimorfismo se, para todo par de morfismos $g, h : B \to X$ tal que $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$. Observe que os conceitos de monomorfismo e epimorfismo são duais.

Em **SET**, uma função é dita bijetiva quando existe uma função $g : B \to A$ tal que $g(f(a)) = a$ e $f(g(b)) = b$, para todo $a \in A$ e $b \in B$. Dizemos que g é a inversa de f, e a denotamos por f^{-1}.

A generalização de função bijetiva é feita do seguinte modo: um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é dito um isomorfismo se existe um morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$. Quando existe o morfismo g, denotamo-lo por f^{-1}, e neste caso dizemos que A e B são ismorfos (escrevemos $A \simeq B$).

É importante observar que em **SET**, isomorfismo significa (simultaneamente) monomorfismo e epimorfismo. Isto já não vale para outras categorias. Por exemplo, em **Mon** existem monomorfismos que são epimorfismos mas não possuem inversa, não sendo, portanto, isomorfismos.

3.3 Construções universais básicas

Apresentamos agora definições que generalizam construções existentes em **SET**. Fixamos uma categoria $\mathcal{C}$ arbitrária.

O produto cartesiano dos objetos A,B $\in\mid \mathcal{C} \mid$ é um par $(A \times B, \{\pi_1, \pi_2\})$ (onde $A \times B \in\mid \mathcal{C} \mid$ e π_1: $A \times B \to A$ e π_2: $A \times B \to B$ são morfismos) satisfazendo a seguinte propriedade universal: se $(C, \{f_1, f_2\})$ é um par formado por um objeto de $\mathcal{C}$ e dois morfismos f_1: $C \to A$ e f_2: $C \to B$, então existe um único morfismo $\langle f_1, f_2 \rangle$:$C \to A \times B$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, "<f_1,f_2>"'] &
\end{tikzcd}
$$

É importante fazer as seguintes observações:

i) O produto é único a menos de isomorfismo (ou seja, se existem dois pares satisfazendo a definição de produto, então estes dois pares são isomorfos).

ii) $A \times B \simeq B \times A$.

iii) π_1 e π_2 são epimorfismos.

Também existe uma definição de produto para morfismos: se $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$, então o morfismo $f \times g$: $A \times B \to A' \times B'$ é o único morfismo tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[ddl, "f\circ\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[ddr, "g\circ\pi_2"'] \arrow[ddd, "f\times g"] & \\
A \arrow[d, "f"'] & & B \arrow[d, "g"] \\
A' & & B' \\
& A' \times B' \arrow[ul, "\pi'_1"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] &
\end{tikzcd}$$

A noção de produto cartesiano genereliza justamente a noção de produto cartesiano de conjuntos. Tomando o conceito dual, que chamamos coproduto, obtemos a generalização da noção de união disjunta. Mais especificamente, o coproduto de $A, B \in \mathcal{C}$ é o dual do produto destes mesmos objetos, e o denotamos por $A \coprod B$. O morfismo que realiza a universalidade do diagrama associado à definição é denotado por $[f_1, f_2]$.

A versão categorial de maior subconjunto do domínio em que duas funções de mesmos domínio e contra-domínio coincidem é chamada equalisador. Dados morfismos $f, g : A \to B$, o equalisador de f e g é um par (E, i) (com $E \in\mid \mathcal{C} \mid$ e $i : E \to A$ satisfaz $f \circ i = g \circ i$), tal que se (C, h) é tal que $h : C \to A$ satisfaz $f \circ h = g \circ h$ então existe um único morfismo $k : C \to E$ tal que

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
& C \arrow[ul, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta. Note que $i : E \to A$ é sempre um monomorfismo, e se i é também epimorfismo, então resulta ser isomorfismo.

Dualizando a noção de equalisador, obtemos o conceito de co-equalizador. Em **SET**, os co-equalisadores surgem da noção de relação de equivalência.

Alguns objetos exercem papel relevante na estrutura da categoria em questão. Eles são divididos em dois tipos: objetos iniciais e objetos finais. Um objeto $\mathbf{0}$ de $\mathcal{C}$ é dito inicial se, para todo $A \in\mid \mathcal{C} \mid$, existe um único morfismo $! : \mathbf{0} \to A$ em $\mathcal{C}$. Claramente um objeto inicial é único a menos de isomorfismo.

Vê-se imediatamente que em **SET**, o objeto inicial é $\emptyset$. Logo, é de fato único (e não a menos de isomorfismo, dado que, pelo Axioma da Extensionalidade (Zermelo-Fraenkel), o único conjunto vazio é único.). Se P é uma ordem parcial, então o objeto inicial em $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ é $\perp$, quando ele existir.

A título de ilustração, veja-se que o produto tensorial de dois módulos é obtido como objeto inicial da seguinte forma: seja A um anel comutativo com unidade 1, e sejam E, F dois A-módulos. Associemos a eles a categoria $\mathcal{B}$ cujos objetos são as aplicações bilineares $f : E \times F \to X$, (onde X é um A-módulo qualquer) e cujos morfismos são as aplicações $f \mapsto g \circ f$ (onde $g : X \to Y$ é uma aplicação linear), isto é, dados $f : E \times F \to X$ e $h : E \times F \to Y$, então $g : f \to h$ é uma aplicação linear $g : X \to Y$ tal que

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

comuta. Seja L o conjunto das combinações lineares formais de elementos de $E \times F$, com sua estrutura de A-módulo natural. Seja R o A-submódulo de L gerado pelos elementos da forma

$$\begin{array}{ll} \text{(x+x', y) - (x, y) - (x', y),} & (\lambda\text{x, y) - }\lambda\text{(x, y)} \\ \text{(x, y+y') - (x, y) - (x, y'),} & \text{(x, }\mu\text{y) - }\mu\text{(x, y)} \end{array}$$

O módulo quociente L/R é um objeto inicial na categoria $\mathcal{B}$, conhecido como produto tensorial de E e F, denotado por $E \otimes F$.

O outro tipo de objeto especial são os objetos finais, que obtidos pela dualização da noção de objeto inicial. Explicitamente, um objeto $\mathbf{1}$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é dito um objeto terminal se para todo objeto A de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $! : A \to \mathbf{1}$. O objeto terminal é único a menos de isomorfismo.

Apresentamos o conceito de *pullback*. Dada a grande importância desta contrução, destacamo-la na forma da definição seguinte.

Definição 3.2 *Dados dois morfismos $f : A \to C$ e $g : B \to C$, seu pullback (ou produto fibrado) é um par $(D, \{p_1, p_2\})$ tal que $p_1 : D \to A$, $p_2 : D \to B$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

comuta, e este par satisfaz a seguinte propriedade universal: se $(E, \{q_1, q_2\})$ é um par tal que q_1: $E \to A$, q_2: $E \to B$ são tais que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

comuta, então existe um único $k : E \to D$ tal que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q_2"] \arrow[ddr, "q_1"'] & & \\ & D \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

comuta.

O *pullback* é único a menos de isomorfismo. O seu dual é chamado *pushout*. Para dar uma idéia da grande importância do conceito que acabamos de definir, mostramos como algumas construções importantes em matemática são obtidas via *pullbacks*.

• Em **SET**, dada uma função $f : A \to B$ e $C \subseteq B$, então f^{-1}(C)= $\{a \in A \mid f(a) \in C\}$ (a imagem inversa de C por f) surge do *pullback*

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(C) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f*"'] & A \arrow[d, "f"] \\
C \arrow[r, hook, "j"'] & B
\end{tikzcd}$$

onde j e i são inclusões e $f*$ é a restrição de f a $f^{-1}(C)$.

• Em C_P, um diagrama

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r] \arrow[d] & y \arrow[d] \\
x \arrow[r] & z
\end{tikzcd}$$

é um *pullback* se, e só se, s é o ínfimo de x e y.

• Se $\mathcal{C}$ tem objeto terminal $\mathbf{1}$, então o produto cartesiano de $A, B \in \mid \mathcal{C} \mid$ é obtido do seguinte *pullback*:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "!"] \\
A \arrow[r, "!"'] & \mathbf{1}
\end{tikzcd}$$

O resultado a seguir é de grande utilidade para demonstrar que certos diagramas são *pullbacks*.

Teorema 3.3 [Lema do *pullback*] *Considere um diagrama da seguinte forma:*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

i) Se os quadrados menores são pullbacks, então o retângulo externo é pullback.

ii) Se o retângulo externo e o quadrado direito são pullbacks e o quadrado esquerdo comuta, então o quadrado esquerdo é pullback.

A noção de limite, que apresentamos a seguir, permite generalizar todas as contruções feitas até aqui. Antes, precisamos dizer que, dado um diagrama $\mathbf{D} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ em $\mathcal{C}$, um cone para $\mathbf{D}$ é um par $(C, \{f_i\}_{i \in I})$ tal que, para todo $i \in I$, f_i: $C \to A_i$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "f"] & & A_j \\
& C \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta para todo $f \in \mathcal{M}$. Um co-cone é definido por dualidade.

Agora estamos em condição de definir limite:

Definição 3.4 *Um limite para diagrama* $\mathbf{D}$ *é um cone* $(C, \{f_i\}_{i\in I})$ *para* $\mathbf{D}$ *tal que, para todo outro cone* $(E, \{g_i\}_{i\in I})$ *para* $\mathbf{D}$*, existe um único morfismo g:* $E \to C$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} & A_i & \\ E \arrow[ur, "g_i"] \arrow[rr, "g"'] & & C \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

comuta para todo $i \in I$*. Um co-limite é definido por dualidade.*

Limites e co-limites são únicos a menos de isomorfismo. Mostramos agora como as contruções anteriores são obtidas como limites:

• O diagrama $\mathbf{D}$= $(\{A, B\}, \emptyset)$ tem como limite o produto cartesiano $(A \times B, \{\pi_1, \pi_2\})$.

• O diagrama $\mathbf{D}$= $(\{A, B\}, \{f : A \to B, g : A \to B\})$ tem como limite seu equalisador $(E, \{i\})$.

• O diagrama vazio $\mathbf{D}$= $(\emptyset, \emptyset)$ tem como limite o objeto terminal $\mathbf{1}$.

• O diagrama $\mathbf{D}$= $(\{A, B, C\}, \{f : A \to C, g : B \to C\})$ tem como limite seu *pullback*.

Dada a importância dos limites, classificamos as categorias de acordo com a existência de certos limites. Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é (finitamente) completa se todo diagrama (finito) possui um limite. $\mathcal{C}$ é (finitamente) co-completa se todo diagrama (finito) possui um co-limite. $\mathcal{C}$ é (finitamente) bi-completa se é (finitamente) completa e (finitamente) co-completa.

Mostra-se que uma condição necessária e suficiente para que uma categoria seja finitamente completa é que ela possua objeto terminal e *pullbacks*.

Para finalizar, apresentamos a generalização da noção de espaço de funções de A em B. Dado um par de objetos (A,B) numa categoria $\mathcal{C}$ com produtos finitos, a exponencial B elevado a A é o par (B^A, ev) tal que $B^A \in\mid \mathcal{C} \mid$ e $ev : B^A \times A \to B$ é um morfismo com a seguinte propriedade universal: dado outro par (E, h) com h: $E \times A \to B$, existe um único morfismo $\hat{h} : E \to B^A$ tal que

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[dr, "ev"] & \\ & B \\ E \times A \arrow[uu, "\hat{h}\times id_A"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Logo, $Hom(C \times A, B) \simeq Hom(C, B^A)$. Uma categoria finitamente completa com exponenciação é chamada cartesiana fechada.

Notemos que se H é uma álgebra de Heyting, então a exponencial y^x é dada pela implicação $x \to y$. Notemos ainda que se $\mathcal{C}$ é uma categoria cartesiana fechada com objeto inicial $\mathbf{0}$, então:

a) $\mathbf{0}) \simeq \mathbf{0} \times \mathbf{A}$, para todo $A \in \mid \mathcal{C} \mid$.
b) Se existe f: $A \to \mathbf{0}$, então $A \simeq \mathbf{0}$.
c) Se $\mathbf{0} \simeq \mathbf{1}$ então $\mathcal{C}$ é degenerada, isto é, todos os seus objetos são isomorfos.
d) Todo morfismo f: $\mathbf{0} \to A$ é monomorfismo.
e) $A^{\mathbf{1}} \simeq A$, $A^{\mathbf{0}} \simeq \mathbf{1}$ e $\mathbf{1}^A \simeq \mathbf{1}$.

3.4 Funtores

O que acontece se considerarmos uma categorias cujos objetos são algumas categorias? Ao tentar responder a esta questão, percebemos que precisamos da noção de "morfismo de categorias". Assim chegamos naturalmente à idéia de funtor.

Definição 3.5 *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor (covariante) F é uma aplicação $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que, a cada $A \in \mid \mathcal{C} \mid$, associa um objeto $F(A) \in \mid \mathcal{D} \mid$, e a cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ associa um morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$, satisfazendo as seguintes condições:*
(i) $F(id_A) = id_{F(A)}$
(ii) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.
Um funtor contravariante $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor covariante $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$. Sua ação inverte a direção dos morfismos: se $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, então $G(f) : G(B) \to G(A)$, e $G(f \circ g) = G(g) \circ G(f)$.

Assim como fazemos com morfismos, também podemos compor funtores. Para isto, sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ são dois funtores, então definimos, para cada objeto $A \in \mid \mathcal{C} \mid$ e morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, o funtor composto $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ da seguinte forma:
$(G \circ F)(A) = G(F(A))$;
$(G \circ F)(f) = G(F(f))$;
Apresentamos agora alguns exemplos de funtores:

• O funtor identidade $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ leva cada objeto e morfismo em si mesmo.

• Funtor de esquecimento: Se $\mathcal{C}$ é uma categoria cujos objetos são conjuntos com estrutura adicional, o funtor de esquecimento F: $\mathcal{C} \to$ **SET** é definido nos objetos como sendo o conjunto subjacente (o funtor esquece a estrutura adicional), e se f: $A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, então F(f) é a aplicação de conjuntos f. Se $\mathcal{C} =$ **Top** e $(X, \Omega(X)) \in \mid$ **Top** $\mid$, então $\mathrm{F}((X, \Omega(X))) = X$, e se f: $(X, \Omega(X)) \to (Y, \Omega(Y))$ é uma função contínua, então F(f)=f: $X \to Y$.

• Funtor Hom(A,-): Se $\mathcal{C}$ é uma categoria localmente pequena, fixamos um objeto A de $\mathcal{C}$ e definimos o funtor Hom(A,-): $\mathcal{C} \to$ **SET** da seguinte forma: num objeto B de $\mathcal{C}$, Hom(A,-)(B)=Hom(A,B), e em f: C $\to D$, definimos Hom(A,-)(f): Hom(A,C)$\to$ Hom(A,D) como sendo o morfismo que, a cada $g \in Hom(A, C)$, associa o morfismo $f \circ g \in Hom(A, D)$.

• Hom(-,A): $\mathcal{C} \to$ **SET**, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria localmente pequena e A é um objeto de $\mathcal{C}$, é um funtor contravariante definido por: se $B \in \mid \mathcal{C} \mid$, Hom(-,A)(B)=Hom(B,A), e se f: $C \to D$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, Hom(-,A)(f): Hom(D,A)$\to$ $Hom(C, A)$ é o morfismo que a cada $g \in Hom(D, A)$ associa o morfismo $g \circ f \in Hom(C, A)$.

Podemos considerar a categoria **Cat** cujos objetos são categorias pequenas e cujos morfismos são funtores. A composição de morfismos e os morfismos identidade são dados como definidos acima. Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, podemos considerar a categoria $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ cujos objetos são funtores de $\mathcal{D}$ para $\mathcal{C}$. Para isto, precisamos definir a noção de morfismo de funtores, que é o que faremos a seguir.

Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois funtores. Uma transformação natural $\eta : F \to G$ é uma família de aplicações $\{\eta_A\}_{A \in \mathcal{C}}$ indexadas em $A \in \mathcal{C}$, onde $\eta_A : F(A) \to G(A)$ é um morfismo em $\mathcal{D}$. A transformação é natural no seguinte sentido: se $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, então o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Um isomorfismo natural, nação presente em muitos contextos, nada mais é que uma transformação natural $\eta : F \to G$ tal que para cada objeto A de $\mathcal{C}$, η_A é um isomorfismo.

Podemos usar funtores para dizer quando duas categorias são parecidas. Para isto, temos os conceitos de isomorfismo, equivalência e dualidade. Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor, F é dito um isomorfismo de categorias se existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$. F será dito uma equivalência de categorias se existir um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que existem transformações naturais $\eta : id_C \to G \circ F$ e $\theta : id_D \to F \circ G$. Neste caso, as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ serão ditas equivalentes. Se for o caso de $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{D}$ serem equivalentes, então $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ serão ditas duais.

Para um exemplo de equivalência de categorias, seja $\mathcal{H}$ a categoria das aHc's e morfismos que preservam ínfimos finitos e supremos arbitrários, e seja $\mathbf{Loc} = \mathcal{H}^{op}$ a categoria de *locales*. Um ponto de um *locale* H é um morfismo $p : H \to \mathbf{2}$ em $\mathcal{H}$ (onde $\mathbf{2}= \{0, 1\}$ com sua estrutura de aHc). Um *locale* H é espacial se, para todo $a, b \in H$ com $a \neq b$, existe um ponto p tal que $p(a) \neq p(b)$. Os *locales* espaciais com morfismos de *locales* formam a categoria **SLoc**.

Seja **Sob** a categoria dos espaços topológicos sóbrios e funções contínuas. O funtor Ω: $\mathbf{Sob} \to \mathbf{SLoc}$ definido por $X \mapsto \Omega(X)$ e $(f : X \to Y) \mapsto (\mathrm{f}^{-1}: \Omega(Y) \to \Omega(X))$ é uma equivalência de categorias.

Como exemplo de dualidade, temos o Teorema de Representação de Stone para álgebras de Boole, que estabelece uma dualidade entre a categoria das álgebras de Boole e seus homomorfismos e a categoria dos espaços topológicos Hausdorff compactos totalmente desconexos e funções contínuas.

Capítulo 4

Topos

Apresentamos neste capítulo o importante conceito de topos, que generaliza, num certo sentido, a noção de conjunto. Relacionamos o tema desenvolvido neste capítulo com as álgebras de Heyting. A relação entre estes dois tópicos se mostrará fundamental no próximo capítulo. As referências para este capítulo são [5], [4] e [7]

4.1 Motivação

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pequena, e fixe $A \in \mid \mathcal{C} \mid$. Definimos no conjunto dos monomorfismos com contra-domínio A a seguinte relação de equivalência: $m \sim n$ se, e somente se, existe exatamente um isomorfismo $f : dom(m) \to dom(n)$ tal que $m = n \circ f$. Seja $Sub(A)$ o conjunto das classes de equivalência $[m]$ de monomorfismos $m : dom(m) \hookrightarrow A$. Para efeitos notacionais, identificaremos os monomorfismos e suas respectivas classes de equivalência.

Dados $[m_1]$,$[m_2]$$\in Sub(A)$, dizemos que $[m_1]$$\leq [m_2]$ se, e só se, existe exatamente um morfismo $f : dom(m_1) \to dom(m_2)$ tal que $m_1 = m_2 \circ f$. O par $(Sub(A), \leq)$ é um *poset* (mais tarde mostraremos que $(Sub(A), \leq)$ é uma álgebra de Heyting).

Em teoria de conjuntos, os símbolos $\wp(A)$ e $\mathbf{2}^A$ são usados para denotar o conjunto das partes de A. O motivo para tal notação é a bijeção existente entre os subconjuntos de A e suas funções características χ_B:$A \to \mathbf{2} = \{0, 1\}$, definidas por

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Dada $g : A \to \mathbf{2}$, seja B_g=$\{x \in A \mid g(x) = 1\}$. Claramente χ_{Bg}= g. Como B_g=$g^{-1}(\{1\})$, o diagrama a seguir é um *pullback*:

$$\begin{tikzcd} B_g \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "!"'] & A \arrow[d, "g"] \\ \{1\} \arrow[r, hook, "true"'] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

onde i é a função de inclusão e $true(1) = 1$.

Vê-se assim que o conjunto **2** e a função χ_- são especiais em **SET**: juntos, eles nos dizem se um conjunto é ou não subconjunto de um outro. Notemos que não é essencial tomarmos o conjunto **2** no que fizemos acima: poderíamos tê-lo substituído por qualquer outro conjunto com dois elementos, ou seja, por qualquer conjunto isomorfo a ele. Assim, o par $(\mathbf{2}, \chi_-)$ é um "classificador de subconjuntos", assim como também o é qualquer par da forma (A, χ_-), onde $A \simeq \mathbf{2}$. Vamos agora generalizar esta construção para uma categoria arbitrária.

4.2 Definição e propriedades elementares

Definição 4.1 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto terminal* $\mathbf{1}$. *Um classificador de subobjetos para $\mathcal{C}$ é um par $(\Omega, true)$ tal que $\Omega \in\mid \mathcal{C} \mid$ e $true : \mathbf{1} \to \Omega$ é um morfismo de $\mathcal{C}$ satisfazendo: para cada monomorfismo $f : B \hookrightarrow A$, existe um único morfismo $\chi_f : A \to \Omega$ tal que o diagrama abaixo é um pullback:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "!"'] & A \arrow[d, "\chi_f"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, hook, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

O classificador de subobjetos é único a menos de isomorfismo. A proposição a seguir, que indica que estamos no caminho certo para generalizar a idéia de conjunto, é a versão geral de $\wp(A) \simeq \mathbf{2}^A$:

Proposição 4.2 *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria possuindo classificador de subobjetos e pullbacks, então vale $Sub(A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{A},\Omega)$.*

A seguir, a definição de topos:

Definição 4.3 *Um topos (elementar) é uma categoria $\mathcal{C}$ tal que*
(1) $\mathcal{C}$ é finitamente completa.
(2) $\mathcal{C}$ é finitamente co-completa.
(3) $\mathcal{C}$ tem classificador de subobjetos.
(4) $\mathcal{C}$ tem exponenciação.

É possível mostrar que (1),(3) e (4) implicam (2). Logo, $\mathcal{C}$ é um topos se, e só se, é cartesiana fechada e tem classificador de subobjetos. Como já apontamos antes, (1) é equivalente a $\mathcal{C}$ possuir *pullbacks* e objeto terminal.

Decorre trivialmente da definição e da proposição acima que em todo topos vale $Sub(A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{A},\Omega)$. Outra propriedade conjuntista que se mantém em todo topos é o fato de que um morfismo é isomorfismo se, e somente se, for monomorfismo e epimorfismo.

A seguir, alguns exemplos de topos:
• **SET** é um topos.
• **SET** $\times$ **SET** é um topos.
• Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são topos, então $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um topos.
•Fixe $I \in\mid$ **SET** $\mid$. **SET** $\downarrow I$ (também denotada por $\mathbf{Bn}(I)$, de "bundles"(fibrado)) é um topos.

O exemplo anterior é um caso particular do seguinte resultado:

Teorema 4.4 [**Teorema Fundamental dos Topos**] *Se $\mathcal{C}$ é um topos e A é um objeto de $\mathcal{C}$, então $C \downarrow A$ é um topos.*

4.3 Álgebra de subobjetos

Vamos agora mostrar que $Sub(A)$ é uma álgebra de Heyting. Para isso, precisaremos do seguinte axioma.

Axioma 4.5 [**Axioma Ω**] *Para cada monomorfismo $f : a \hookrightarrow d$ existe exatamente um morfismo χ_f: $d \to \Omega$ tal que*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ \{1\} \arrow[r, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

é um pullback.

O morfismo χ_f do Axioma Ω é dito morfismo característico do morfismo f. Abaixo, damos nomes a alguns morfismos característicos de que precisaremos:

(i) O morfismo $\mathit{false} : \mathbf{1} \to \Omega$ é definido como sendo o morfismo característico de $! : \mathbf{0} \to \mathbf{1}$.

(ii) O morfismo $\neg : \Omega \to \Omega$ é definido como sendo o morfismo característico de $\mathit{false} : \mathbf{1} \to \Omega$.

(iii) O morfismo $\cap : \Omega \times \Omega \to \Omega$ é definido como sendo o morfismo característico de $\langle true, true\rangle : \mathbf{1} \to \Omega \times \Omega$.

(iv) Para todo $A \in \mid \mathcal{C} \mid$, $true_A$:$A \to \Omega$ denota o morfismo característico de id_A.

(v) O morfismo $\cup : \Omega \times \Omega \to \Omega$ é definido como sendo o morfismo característico da imagem de $[\langle true_\Omega, id_\Omega\rangle, \langle id_\Omega, true_\Omega\rangle]$: $\Omega \coprod \Omega \to \Omega \times \Omega$.

(vi) Seja $e :\preceq\hookrightarrow \Omega \times \Omega$ o equalisador de

$$\begin{tikzcd} \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "\pi_1"'] & A \end{tikzcd}$$

onde π_1 é a primeira projeção. Definimos $\Rightarrow$: $\Omega \times \Omega \to \Omega$ como sendo o morfismo característico do monomorfismo e.

Notemos que em **SET**, com as notações introduzidas acima, temos $\mathit{false}(*) = 0$, $\neg(0) = 1$, $\neg(1) = 0$, e as flechas definidas são as funções de verdade clássicas.

Definindo em $Sub(A)$ as operações a seguir (onde $[f], [g] \in Sub(A)$),

i) -f é o monomorfismo associado com $\neg \circ \chi_f : A \to \Omega$.

ii) $f \sqcap g$ é o monomorfismo associado com $\cap \circ < \chi_f, \chi_g >: A \to \Omega$.

iii) $f \sqcup g$ é o monomorfismo associado com $\cup \circ < \chi_f, \chi_g >: A \to \Omega$.

iv) $f \Rightarrow g$ é o monomorfismo associado com $\Rightarrow \circ < \chi_f, \chi_g >: A \to \Omega$.

v) Seja $0_A : \mathbf{0} \hookrightarrow A$ o único monomorfismo de $\mathbf{0}$ em A. Definimos $0 = [0_A]$, $1 = [id_A]$, $-[f] = [-f]$ e $[f] \bowtie [g] = [f \bowtie g]$ para $\bowtie$ sendo um dos símbolos $\sqcap, \sqcup, \Rightarrow$, mostra-se que a estrutura $(Sub(A), -, \sqcap, \sqcup, \Rightarrow, 0, 1)$ é uma álgebra de Heyting tal que

$$[f] \leq [g] \text{ se, e só se, } [f] = [f] \sqcap [g], \text{ se, e só se, } [f] = [f] \sqcup [g].$$

Observe que $Sub(A)$ é uma álgebra de Heyting externa, por ser a representação externa da generalização de $\wp(A)$. De modo geral, um objeto L de um topos $\mathcal{C}$ é uma álgebra de Heyting interna se existem morfismos $\vee : L \times L \to L$, $\wedge : L \times L \to L$, $\Rightarrow: L \times L \to L$, $\perp : 1 \to L$ e $\top : 1 \to L$ satisfazendo as equações correspondentes. Por exemplo, $x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge x = x$ são dados pela comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} L \times L \arrow[r, "\vee"] \arrow[d, "<\pi_2,\pi_1>"'] & L \\ L \times L \arrow[ur, "\vee"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "<id_L, id_L>"] \arrow[d, "id_L"'] & L \times L \arrow[dl, "\wedge"] \\ L & \end{tikzcd}$$

Desta forma, a representação interna de $Sub(A)$ é Ω^A. Em particular, $\Omega \simeq \Omega^1$ é uma álgebra de Heyting interna.

Fazemos agora uma observação de grande relevância para o aspecto lógico do que estamos fazendo: como Ω representa a álgebra dos valores de verdade do topos $\mathcal{C}$, temos que a lógica interna dos topos não é clássica, mas sim intuicionista.

Para finalizar, mostramos como as construções acima podem ser internalizadas com o uso do Lema de Yoneda (Ver Apêndice II).

Vimos que $Sub(A)$ é uma aH $(Sub(A), \sqcap_A, \sqcup_A, \Rightarrow_A, \neg_A, \top, \perp)$. Dado que as operações acima são naturais, então, pelo Lema de Yoneda, podemos definir morfismos em $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \wedge_A &: \Omega^A \times \Omega^A \to \Omega^A \\ \vee_A &: \Omega^A \times \Omega^A \to \Omega^A \\ \Rightarrow_A &: \Omega^A \times \Omega^A \to \Omega^A \\ \neg_A &: \Omega^A \to \Omega^A \end{aligned}$$

tais que, junto com os morfismos $\top_A$, $\perp_A : 1 \to \Omega^A$, definem uma álgebra de Heyting interna $(\Omega^A, \wedge_A, \vee_A, \Rightarrow_A, \neg_A, \top_A, \perp_A)$.

A título de ilustração, vejamos o caso do ínfimo. Fixe $A \in| \mathcal{C} |$.Para cada objeto B de $\mathcal{C}$, a operação

$$\sqcap_{A \times B} : Sub(A \times B) \times Sub(A \times B) \to Sub(A \times B)$$

é natural em B. Usando as bijeções naturais

$$Sub(A \times B) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A)$$

$$Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A \times \Omega^A) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A)$$

obtemos uma família de funções $\cap_B^A : Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A \times \Omega^A) \to Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A)$ indexada pelos objetos B de $\mathcal{C}$. Ou seja, a família $\cap^A = \{\cap_B^A\}_{B \in |\mathcal{C}|}$ é uma transformação natural $\cap^A : y(\Omega^A \times \Omega^A) \to y(\Omega^A)$. Usando o Lema de Yoneda (com $F = y(\Omega^A)$), vemos que $\cap^A$ (a construção externa de $\sqcap_{A \times B}$, para todo objeto C de $\mathcal{C}$) pode ser internalizada na seção $\wedge_A \stackrel{\text{def}}{=} y(\cap^A)$. É importante observar que $\wedge_A \in y(\Omega^A)(\Omega^A \times \Omega^A)$, isto é, $\cap^A$ é internalizada através de um morfismo $\wedge_A : \Omega^A \times \Omega^A \to \Omega^A$.

Em particular, tomando-se A=1, a construção de $\sqcap_B$ em Sub(B) resulta ser natural em B, sendo então internalizada por um morfismo $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$.

Capítulo 5

Pré-feixes, Ω-sets e feixes

Neste capítulo apresentamos as ferramentas necessárias para se estudar a teoria de conjuntos *fuzzy* de uma outra perspectiva, conforme anunciamos na introdução do capítulo anterior. Estudamos primeiramente pré-feixes e feixes de um ponto de vista"topológico", e depois vamos olhar estes mesmos objetos de maneira algébrica. Para diferenciar as abordagens, usaremos notações diferentes para os mesmos conceitos, sendo que cada notação refere-se a um ponto de vista. As referências para este capítulo são [7], [1] e [6].

5.1 Pré-feixes sobre espaços topológicos

Seja $(X, \Omega(X))$ um espaço topológico. Um pré-feixe (de conjuntos) sobre X é um funtor contravariante $P : \Omega(X) \to \mathbf{SET}$. Logo, para $v \subseteq u$ em $\Omega(X)$, existe a função de restrição P_{uv}, dada por $P_{uv}= P(v,u)$, de acordo com a figura a seguir:

$$\begin{array}{ccc} v & & P(v) \\ {\scriptstyle (v,u)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle P_{uv}} \\ u & & P(u) \end{array}$$

Os elementos $s \in P(u)$ são chamados seções de P sobre u, e o domínio de P é definido como sendo o conjunto $\mid P \mid = \bigcup_{u\in\Omega(X)} P(u)$.

Num pré-feixe P sobre X, definimos a função de igualdade (em P) por

$$[\mathrm{s{=}t}] \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\{w \in \Omega(u \cap v) \mid P_{uw}(\mathrm{s}){=}P_{vw}(\mathrm{t})\}$$

para todos $s, t \in\mid P \mid$, com $s \in$ P(u) e $t \in P(v)$.

A extensão de uma seção s é definida por $E(s) \stackrel{\text{def}}{=}$ [s=s]. Quando não houver risco de confusão, escreveremos apenas Es para a extensão de s.

É claro que $s \in P(u)$ se, e só se, $Es = u$. Para $s, t, z \in\mid P \mid$, as seguintes propriedades são facilmente verificadas:

(a) [s=s]= Es (reflexividade)

(b) [s=t] $\subseteq$E(s)$\cap$E(t)
(c) [s=t]=[t=s] (simetria)
(d) [s=t] $\cap$ [t=z] $\subseteq$ [s=z] (transitividade)

Dizemos que um pré-feixe P é extensional (ou separado) se satisfaz

$$\text{para todos } s, t \in\mid P \mid, \ Es = Et = [\text{s=t}] \text{ implica } s = t.$$

Para um pré-feixe P, definimos uma função restrição $\mid : \ \mid P \mid \times \Omega(X) \to \mid P \mid$ da seguinte forma:

$$(s, u) \longmapsto \mathrm{P}_{E(s), u\cap E(s)}(\mathrm{s}).$$

Sejam P um pré-feixe extensional, $u, v \in \Omega(X)$ e $s, t \in\mid P \mid$. Então valem as seguintes propriedades:

(a) $s\mid_{Es} = s$.
(b) $(s|_u)|_v$=s$|_{u\cap v}$.
(c) [s$|_u$=t$|_v$]=[s=t]$\cap$v$\cap u$.
(d) $s\mid_{[s=t]}$=t$|_{[s=t]}$.
(e) existe únco $* \in\mid P \mid$ tal que $E* = \emptyset$ e $s\mid_{\emptyset} = *$.
(f) $E(t|_u)$=E(t)$\cap u$.
(g) $t\mid_u = s$ se, e só se, $Es = Et\cap u =$ [s=t]

O conceito de feixe, que iremos formular em breve, pede que as seções de um pré-feixe possam ser combinadas, num sentido que tornamos preciso a seguir. Dizemos que um subconjunto $S \subseteq\mid P \mid$ é compatível se, para todos $s, t \in S$, s$|_{Et}$= t$|_{Es}$ (ou, equivalentemente, [s=t]= $Es\cap Et$).

Agora possuímos os conceitos necessários para formular precisamente o conceito de feixe de conjuntos sobre um espaço topológico.

Definição 5.1 *Um pré-feixe P é um feixe (de conjuntos) se satisfaz:*

se $S \subseteq\mid P \mid$ é compatível, existe uma seção $t \in\mid P \mid$, chamada de colagem, tal que $Et = \bigcup_{s\in S} Es$ e, para todo $s \in S$, $t|_{Es} = s$.

5.2 Pré-feixes: caracterização algébrica

Iniciamos esta seção lembrando que uma álgebra de Heyting completa Ω é um reticulado completo tal que ínfimos finitos distribuem sobre supremos arbitrários, e que este objeto pode ser visto como uma categoria. Podemos também considerar a categoria oposta Ω^{op}, cujos objetos são os elementos de Ω e para $\alpha, \beta \in \Omega$, definimos

$$Hom(\alpha, \beta) = \begin{cases} \{\cdot\} & \text{se } \beta \leq \alpha \\ \\ \emptyset & \text{se } \beta \not\leq \alpha \end{cases}$$

onde $\{\cdot\}$ é um *singleton* (isto é, um conjunto unitário).

Um pré-feixe de conjuntos sobre Ω é um funtor $\mathcal{F} : \Omega^{op} \to \mathbf{SET}$ tal que $\mathcal{F}(\bot) \neq \emptyset$. Para $\beta \leq \alpha$, o morfismo $\mathcal{F}(\cdot) : \mathcal{F}(\alpha) \to \mathcal{F}(\beta)$ é chamado *restrição* de

$\mathcal{F}(\alpha)$ a $\mathcal{F}(\beta)$, e é denotado por ϱ^{α}_{β}. As restrições sempre satisfazem $\varrho^{\alpha}_{\alpha} = id_{\mathcal{F}(\alpha)}$, $\varrho^{\beta}_{\gamma} \circ \varrho^{\alpha}_{\beta} = \varrho^{\alpha}_{\gamma}$, sempre que $\gamma \leq \beta \leq \alpha$.

Todo conjunto não vazio X pode ser visto como um pré-feixe $\mathcal{F}_X$ sobre Ω definindo-se $\mathcal{F}_X(\alpha) = X$, $\varrho^{\alpha}_{\beta} = id_X$ para $\alpha, \beta \in \Omega \backslash \{\bot\}$, $\mathcal{F}_X(\bot) = \{\cdot\}$, $\varrho^{\alpha}_{\bot} = !_X$ onde $!_X$ é a única função de X para o *singleton* $\{\cdot\}$.

O exemplo a seguir será de grande relevância na próxima seção.

Exemplo 5.2 *Seja* $(A_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ *uma família de conjuntos indexada em* $[0,1]$ *com as seguintes propriedades:* $A_0 = \{\cdot\}$*,* $A_\alpha \subseteq A_\beta$ *sempre que* $0 < \beta \leq \alpha$*. Tomando como restrições as inclusões, a situação acima dá origem a um pré-feixe* $\mathcal{F}$ *sobre* $[0,1]$*.*

Apresentamos agora um outro ponto de vista sobre os pré-feixes sobre uma aHc. Dizemos que uma tripla $(A, \upharpoonright, \mathbb{E})$ é um pré-feixe no sentido de Fourman e Scott se A é um conjunto não vazio, e $\upharpoonright : A \times \Omega \to A$ (chamada restrição), $\mathbb{E} : A \to \Omega$ (chamada extensão) são morfismos satisfazendo :

(i) $a \upharpoonright \mathbb{E}(a) = a$.
(ii) $(a \upharpoonright \alpha) \upharpoonright \beta = a \upharpoonright (\alpha \wedge \beta)$.
(iii) $\mathbb{E}(a \upharpoonright \alpha) = \mathbb{E}(a) \wedge \alpha$.

Neste novo contexto, morfismos de pré-feixes são mapas que preservam restrições e extensões, isto é, $\varphi : (A, \upharpoonright, \mathbb{E}) \to (B, \upharpoonright, \mathbb{E})$ é um morfismo de pré-feixes se, e somente se,

$$\varphi(a \upharpoonright \lambda) = \varphi(a) \upharpoonright \lambda, \quad \mathbb{E}(\varphi(a)) = \mathbb{E}(a), \quad \lambda \in \Omega,\ a \in A$$

Cada pré-feixe sobre Ω carrega uma noção local de igualdade. É isto o que nos diz a definição a seguir.

Definição 5.3 *Sejam A um conjunto e E:* $A \times A \to \Omega$ *um mapa. E é chamado igualdade* Ω*-valorada em A se, e somente se, E satisfaz*
i) E(a,b) = E(b,a).
ii) $E(a,b) \wedge E(b,c) \leq E(a,c)$*.*
O par (A,E) é chamado Ω*-set. (A,E) será chamado* Ω*-set separado se adicionalmente E satisfizer* $E(a,b) = E(a,a) = E(b,b) \Rightarrow a = b$*.*

Um importante exemplo de igualdade Ω-valorada é a igualdade E_c definida por

$$E_c(x,y) = \begin{cases} \top & \text{se } x = y \\ \\ \bot & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Um mapa $\varphi : (A, E) \to (B, F)$ é um mapa de Ω-sets se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$E(a,a) = F(\varphi(a), \varphi(a)).$$

$$E(a_1, a_2) \leq F(\varphi(a_1), \varphi(a_2))$$

Ω-sets e morfismos entre eles formam uma categoria, que denotaremos por Ω-**SET**.

É possível mostrar que, em cada pré-feixe $(A, \upharpoonright, \mathbb{E})$ existe uma única igualdade Ω-valorada E_A determinada por

$$E_A(a,b) = \bigvee\{\lambda \in \Omega \mid \lambda \leq \mathbb{E}(a) \wedge \mathbb{E}(b), a\upharpoonright\lambda = b\upharpoonright\lambda\}$$

Dado um Ω-set (A, E), dizemos que um mapa $s : A \to \Omega$ satisfazendo

$$s(a) \wedge E(a,b) \leq s(b)$$

$$s(a) \wedge s(b) \leq E(a,b)$$

é um *singleton* de (A, E). Como igualdades Ω-valoradas são simétricas e transitivas, todo elemento $a \in A$ induz um *singleton* $\tilde{a}$ definido por $\tilde{a}(b) = E(a,b)$, para todo $b \in A$. Um Ω-set no qual para cada *singleton* s existe um único elemento a tal que $s = \tilde{a}$ é dito um Ω-set completo.

Exemplos importantes de *singletons* são os mapas da forma $\alpha.1_a$ definidos por

$$\alpha.1_a(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x = a \\ \\ \perp & \text{se } x \neq a \end{cases}$$

onde $a, x \in X$. Estes *singletons* de (X, E_c) não são induzidos por nenhum elemento de X. Quando $\Omega = [0,1]$, tais *singletons* são chamados pontos *fuzzy.*

Um dos fatos que justificam a introdução do conceito de *singleton* é que dando condições sobre eles, podemos transformar o pré-feixe em um feixe. De fato, um pré-feixe $(A, \upharpoonright, \mathbb{E})$ é um feixe de conjuntos sobre Ω se, e somente se, para cada *singleton* s de (A, E_A), existir um único elemento $a \in A$ tal que $s = \tilde{a}$. Este é justamente o resultado mais importante desta seção, e o destacamos na forma do seguinte teorema.

Teorema 5.4 *Seja* $\mathbf{C\Omega - SET}$ *a subcategoria de* Ω-**SET** *constituída por* Ω-*sets completos e morfismos entre eles. Então* $\mathbf{C\Omega - SET}$ *é isomorfa a* $sh(\Omega)$.

A construção a seguir mostra como feixificar um Ω-set. Para isto, sejam (A, E) um Ω-set e $S(A, E)$ o conjunto de todos os *singletons* de (A, E). Definimos a extensão de existência de um *singleton* $s \in S(A, E)$ por

$$\mathbb{E}(s) = \bigvee_{a \in A} s(a)$$

Então existe uma única igualdade Ω-valorada $\tilde{E}$ em $S(A, E)$ satisfazendo

$$\tilde{E}(s,s) = \mathbb{E}(s), \qquad \tilde{E}(s,\tilde{a}) = s(a)$$

É fácil ver que $\tilde{E}$ é dado por

$$\tilde{E}(s_1, s_2) = \bigvee_{a \in A} s_1(a) \wedge s_2(a).$$

Seja $\Sigma(A, E) = (S(A, E), \tilde{E})$. $\Sigma(A, E)$ é um Ω-set completo, e o mapa $a \mapsto \tilde{a}$ é um Ω-**SET**-morfismo de (A, E) em $\Sigma(A, E)$. Desta forma, todo Ω-set gera um feixe sobre Ω. Chamamos $\Sigma(A, E)$ o espaço de *singletons* de (A, E).

Capítulo 6

Teoria de conjuntos *fuzzy*

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos da teoria de conjuntos *fuzzy*. Estes conceitos serão retomados, de uma outra perpectiva, no quarto capítulo deste trabalho. As referências são [9], [12], [13] e [11].

6.1 Definições básicas

Um conjunto *fuzzy* A é caracterizado por uma função característica generalizada μ_A: $\mathcal{X} \to [0,1]$ chamada função de pertinência de A e definida sobre um universo de discurso $\mathcal{X}$. Claramente os conjuntos clássicos são tipos especiais de conjuntos *fuzzy*.

Denotaremos por $\mathbb{F}(\mathcal{X})$ a classe dos conjuntos *fuzzy* definidos sobre o universo de discurso $\mathcal{X}$.

Sejam A,$B \in \mathbb{F}(\mathcal{X})$. Dizemos que A e B são iguais se, para todos os $x \in \mathcal{X}$, temos $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Definimos o conjunto vazio $\emptyset$ com a seguinte função de pertinência: para todo $x \in \mathcal{X}$, $\mu_\emptyset(x) = 0$.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos *fuzzy*. Um exemplo trivial é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Podemos dar exemplo mais interessantes. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \approx 10\}$ ('ser aproximandamente igual a 10'). Uma possível função de pertinência para tal conjunto é $\mu_A(x) = max\{0, \ 1 - \frac{(10-x)^2}{2}\}$. Obviamente esta escolha não é única. Poderíamos ter escolhido a função $\mu_A^{'}$ definida por

$$\mu_A^{'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 8 \text{ ou } x \geq 12 \\ \frac{x-8}{2} & \text{se } 8 \leq x \leq 10 \\ \frac{12-x}{2} & \text{se } 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

Uma terceira função para este exemplo poderia ser $\mu_A^{''}(x) = e^{\frac{-2(x-10)^2}{\pi}}$. Denotaremos os conjuntos caracterizados por estas funções respectivamente por A, A' e A''. É interessante notar que $A \neq A'$: de fato, $\mu_A(9,8) = 0,98$, enquanto $\mu_{A'}(9,8) = \mu_A^{'}(9,8) = 0,9$. Note-se que $\mu_A(10) = \mu_A^{'}(10) = \mu_A^{''}(10) = 1$. Já $\mu_A(0) = \mu_A^{'}(0) = 0$, enquanto $\mu_A^{''}(0) = 2,24.10^{-28}$. Por outro lado, $\mu_A(11) =$

$\mu_A(9) = \mu_A^{'}(11) = \mu_A^{'}(9) = 0,5$; $\mu_A^{''}(11) = \mu_A^{''}(9) = 0,2079$. Para $x = 20$ temos $\mu_A(20) = \mu_A^{'}(20) = 0$, e $\mu_A^{''}(20) = \mu_A^{''}(0) = 2,24.10^{-28}$.

Um outro exemplo ainda tendo $\mathbb{R}$ como universo de discurso pode ser o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \gg 5\}$ ('ser um número real muito maior do que 5'). Uma possível escolha de função de pertinência para tal conjunto é

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 15 \\ \\ 1 - e^{\frac{-x^2}{500}} & \text{se } x > 15 \end{cases}$$

Neste exemplo, temos $\mu_B(5) = 0$, $\mu_B(20) = 0,55$ e $\mu_B(70) = 0,99$. Esta seria uma boa escolha para uma situação em que se avalia, por exemplo, a variação de preços de um produto cujo menor valor encontrado foi igual a 5 (neste caso, $\mu_B(x)$ próximo de 1 significa que a amostra x é muito mais cara que a mais barata encontrada).

Certamente existem muitos conjuntos *fuzzy* cujos universos de discurso não são conjuntos de números. Podemos dar como exemplos os seguintes: o conjunto das pessoas de meia idade; o conjunto dos carros de potência média; o conjunto das pessoas com alto grau de escolaridade.

No que se segue, consideraremos sempre $A \in \mathbb{F}(\mathcal{X})$.

O suporte de A é o conjunto $supp(A) = \{x \in \mathcal{X} \mid \mu_A(x) > 0\}$. Se A tem suporte finito, definimos a cardinalidade de A como sendo o número $\mid A \mid = \sum_{x \in supp(A)} \mu_A(x)$. Se o universo de discurso $\mathcal{X}$ for um conjunto mensurável com medida *P(x)*, definimos $\mid A \mid = \int_{\mathcal{X}} \mu_A(x) dP$. É importante ressaltar que se o conjunto A em questão for um conjunto clássico, então esta definição passa a ser a definição clássica de cardinalidade.

Dentre os conjuntos clássicos que associamos a um conjunto *fuzzy*, merecem destaque os α-cortes de A, que denotamos por A_α e definimos como $A_\alpha = \{x \in \mathcal{X} \mid \mu_A(x) > \alpha\}$, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se o α-corte forte de A por $A_{\bar{\alpha}} = \{x \in \mathcal{X} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$. Cada conjunto *fuzzy* determina todos os seus α-cortes e α-cortes fortes. Reciprocamente, os α-cortes, bem como os α-cortes fortes, determinam unicamente um conjunto *fuzzy* pois, como é fácil verificar, para cada $x \in \mathcal{X}$, vale

$$\mu_A(x) = sup\{\alpha.\mu_{A_{\bar{\alpha}}}(x) \mid \alpha \in (0,1]\} = sup\{\alpha.\mu_{A_\alpha}(x) \mid \alpha \in [0,1)\}.$$

Para poder contar com uma teoria operacional de conjuntos *fuzzy*, é necessário poder definir ao menos as operações e relações básicas dos conjuntos clássicos. Nos seguintes parágrafos abordamos essa questão.

Sejam $A,B \in \mathbb{F}(\mathcal{X})$. Dizemos que A está contido em B (e escrevemos $A \subseteq B$) se, para todo $x \in \mathcal{X}$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$. Claramente, $\emptyset \subseteq A \subseteq X$ e $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$, sendo X o conjunto caracterizado por $\mu_X(x) = 1$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

Definimos a união e a interseção de A e B como sendo os conjuntos *fuzzy* respectivamente caracterizados por

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

para cada $x \in \mathcal{X}$.

Estas fórmulas incluem os casos clássicos de união e interseção, e os generalizam. Esta generalização não é única, mas *max* e *min* são os únicos operadores

f e g que satisfazem o seguinte conjunto de condições (desejáveis para as generelizações a que se propõem):

(i) O valor de pertinência de x em um conjunto *fuzzy* composto depende apenas do valor de pertinência de x em cada um dos conjunto básicos.

(ii) f e g são comutativas, associativas e idempotentes.

(iii) f e g são contínuas e não decrescentes.

(iv) f e g podem ser recursivamente estendidas para $m \geq 3$ argumentos.

(v) para todo $x \in \mathcal{X}$, $f(1, \mu_A(x)) = 1$ e $g(0, \mu_A(x)) = 0$.

É interessante ressaltar que a condição (iii) nos diz que um pequeno crescimento de $\mu_A(x)$ ou $\mu_B(x)$ não pode provocar um forte crescimento em $\mu_{A \cup B}(x)$ ou $\mu_{A \cap B}(x)$.

Para definirmos o complemento $\bar{A}$ de $A \in \mathbb{F}(\mathcal{X})$, exigimos qe $\mu_{\bar{A}}(x)$ satisfaça as seguintes condições:

(i) $\mu_{\bar{A}}(x)$ depende apenas de $\mu_A(x)$, isto é, $\mu_{\bar{A}}(x) = h(\mu_A(x))$.

(ii) $h(0) = 1$ e $h(1) = 0$.

(iii) h é contínua e estritamente decrescente.

(iv) h é involutiva: $h(h(\mu_{\bar{A}}(x))) = \mu_A(x)$.

(v) para todos $x, y \in \mathcal{X}$, $\mu_A(x) - \mu_A(y) = \mu_{\bar{A}}(y) - \mu_{\bar{A}}(x)$, ou seja, uma mudança no valor de pertinência de x em A tem o mesmo efeito na pertinência de $\bar{A}$.

Com estas condições, a única escolha possível é $h(u) = 1 - u$. Assim, o complemento $\bar{A}$ de A é definido pela função de pertinência $\mu_{\bar{A}} : \mathcal{X} \to [0, 1]$ definida por $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Retomando o exemplo anterior do conjunto A'' ('ser aproximadamente 10'), obtemos $\mu_{\bar{A}''}(x) = 1 - e^{\frac{-2(x-10)^2}{\pi}}$. Tem-se $\mu_{\bar{A}''}(10) = 0$, $\mu_{\bar{A}''}(0) = 1 - 2,24.10^{-28}$, e $\mu_{\bar{A}''}(30) \approx 1 - e^{-250} \approx 1$.

Um importante comentário que deve ser feito é que no âmbito de conjuntos *fuzzy*, deixam de ser válidos dois princípios importantes da lógica clássica: o princípio da não contradição e o princípio do terceiro excluído, pois $A \cup \bar{A} \neq X$ e $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Certamente isto já era de se esperar, pois estamos trabalhando com conjuntos cujos contornos são difusos, e portanto é perfeitamente aceitável que um elemento possua e não possua uma mesma propriedade, ou que um elemento possa nem ter nem não ter uma propriedade específica.

Consideremos agora $A \in \mathbb{F}(\mathcal{X})$, $B \in \mathbb{F}(\mathcal{Y})$. Definimos o produto cartesiano $A \times B \in \mathbb{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ com a seguinte função de pertinência: para $a \in \mathcal{X}$, $b \in \mathcal{Y}$, $\mu_{A \times B}((a, b)) = min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}$. É fácil ver que o produto cartesiano é associativo, distributivo com relação a uniões e interseções, monótono e que valem $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ e $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

6.2 t-normas e t-conormas

Podem ser definidas, no contexto da teoria de conjuntos *fuzzy*, diferentes noções de 'conjunção' e 'disjunção', denominadas de *t-norma* e *t-conorma*, respectivamente. Cada noção de conjunção (disjunção) vai originar uma noção diferente de interseção (união), como veremos a seguir.

Definição 6.1 *Uma t-norma é uma aplicação* $\mathbf{T}$:$[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ *satisfazendo, para todos* x, y, z, u, $v \in [0, 1]$

(i) $x\mathbf{T}y = y\mathbf{T}x$.

(ii) $x\mathbf{T}(y\mathbf{T}z) = (x\mathbf{T}y)\mathbf{T}z$.
(iii) Se $x \leq u$ *e* $y \leq v$, *então* $x\mathbf{T}y \leq u\mathbf{T}v$.
(iv) $x\mathbf{T}1 = x$ *e* $x\mathbf{T}0 = 0$.

Os exemplos mais comuns de t-normas são:

$$u\mathbf{T}_0 v = min\{u, v\}$$

$$u\mathbf{T}_1 v = u.v$$

$$u\mathbf{T}_2 v = max\{0, \;\; u + v - 1\}$$

$$u\mathbf{T}_3 v = \begin{cases} min\{u, v\} & \text{se } u = 1 \text{ ou } v = 1 \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dada uma t-norma $\mathbf{T}$, podemos considerar a operação de intersecção $\cap_{\mathbf{T}}$ baseada em $\mathbf{T}$, definida da seguinte forma: para $A, B \in \mathbb{F}(\mathcal{X}), A\cap_{\mathbf{T}}B$ é caracterizada pela função $\mu_{A\cap_{\mathbf{T}}B}(x) = \mu_A(x)\mathbf{T}\mu_B(x)$, para todo $x \in X$. Para recuperar a intersecção definida anteriormente, basta tomar $u\mathbf{T}v = min\{u, v\}, u, v \in [0, 1]$.

Para uma t-norma $\mathbf{T}$ qualquer e $A, B, C \in \mathbb{F}(\mathcal{X})$, a intersecção $\cap_{\mathbf{T}}$ satisfaz $A\cap_{\mathbf{T}}B = B\cap_{\mathbf{T}}A$, $A\cap_{\mathbf{T}}(B\cap_{\mathbf{T}}C) = (A\cap_{\mathbf{T}}B)\cap_{\mathbf{T}}C$, $A\cap_{\mathbf{T}}\emptyset = \emptyset$ e $A\cap_{\mathbf{T}}X = A$.

6.1(*iii*) e 6.1(*iv*) implicam $u\mathbf{T}v \leq u\mathbf{T}1 = u$ e $u\mathbf{T}v \leq v$. Desta forma, $u\mathbf{T}v \leq min\{u, v\}$, de modo que $A\cap_{\mathbf{T}}B \subseteq A \cap B$. Tomando-se $B = A$, obtemos $A\cap_{\mathbf{T}}A \subseteq A$. Para uma t-norma $\hat{\mathbf{T}}$ arbitrária, exigir $u\hat{\mathbf{T}}u = u$ para todo $u \in [0, 1]$ implica, para cada $u, v \in [0, 1]$ com $u \leq v$, $u = u\hat{\mathbf{T}}u \leq u\hat{\mathbf{T}}v \leq u\hat{\mathbf{T}}1 = u = min\{u, v\}$. Logo, $\hat{\mathbf{T}} = min$, e isto mostra que $A\cap_{\mathbf{T}}A \subseteq A$ reduz-se à igualdade apenas quando tomamos $\mathbf{T} = min$.

Podemos considerar a união $\cup_{\mathbf{T}}$ baseada na t-norma $\mathbf{T}$, e para isto definimos $A\cup_{\mathbf{T}}B = (A^c\cap_{\mathbf{T}}B^c)^c$.

Definindo a t-conorma $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}$ por $u\mathbf{S}_{\mathbf{T}}v = 1-(1-u)\mathbf{T}(1-v), u, v \in [0, 1]$, obtemos que a função de pertinência de $A\cup_{\mathbf{T}}B$ é $\mu_{A\cup_{\mathbf{T}}B}(x) = \mu_A(x)\mathbf{S}_{\mathbf{T}}\mu_B(x), x \in X$.

Com relação às t-normas $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$ apresentadas acima, as t-conormas $\mathbf{S}_{\mathbf{T}0}, \mathbf{S}_{\mathbf{T}1}, \mathbf{S}_{\mathbf{T}2}, \mathbf{S}_{\mathbf{T}3}$ são dadas por

$$u\mathbf{S}_{\mathbf{T}0}v = max\{u, v\}$$

$$u\mathbf{S}_{\mathbf{T}1}v = u + v - u.v$$

$$u\mathbf{S}_{\mathbf{T}2}v = min\{1, \;\; u + v\}$$

$$u\mathbf{S}_{\mathbf{T}3}v = \begin{cases} max\{u, v\} & \text{se } u = 0 \text{ ou } v = 0 \\ \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}$ são construções duais. Portanto, as considerações feitas a respeito de $\cap_{\mathbf{T}}$ podem ser facilmente reformuladas para $\cup_{\mathbf{T}}$. Em particular, concluímos que $A\cup_{\mathbf{T}}A = A \Leftrightarrow \mathbf{T} = min \Leftrightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{T}} = max$.

Para uma t-norma $\mathbf{T}$ arbitrária, ainda valem as leis de de Morgan:

$$(A\cap_{\mathbf{T}}B)^c = A^c\cup_{\mathbf{T}}B^c \text{ e } (A\cup_{\mathbf{T}}B)^c = A^c\cap_{\mathbf{T}}B^c.$$

Já a distributividade deixa de valer, se tomarmos $\mathbf{T} \neq min$. No caso geral, tem-se uma subdistributividade:

$$(A \cap B) \cup_{\mathbf{T}} (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup_{\mathbf{T}} C)$$

$$(A \cup B) \cap_{\mathbf{T}} (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap_{\mathbf{T}} C)$$

Pode-se de maneira natural definir o produto cartesiano $\times_{\mathbf{T}}$ baseado em uma t-norma qualquer. Tal produto é associativo, monótono e $A \times_{\mathbf{T}} \emptyset = \emptyset \times_{\mathbf{T}} A = \emptyset$, mas pode ocorrer $A \times_{\mathbf{T}} B = \emptyset$ com $A \neq \emptyset \neq B$. A distributividade com relação a $\cap_{\mathbf{T}}$ e $\cup_{\mathbf{T}}$ vale se, e somente se, $\mathbf{T} = min$.

6.3 Relações *fuzzy*

Partimos agora para o estudo das relações *fuzzy*. Seja $\mathcal{Y}$ um universo de discurso cujos elementos são pares ordenados. Por simplicidade assumiremos que $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, onde $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ são universos de discurso. Uma relação binária *fuzzy* $\mathbf{R}$ em $\mathcal{Y}$ é um subconjunto *fuzzy* de $\mathcal{Y}$, ou seja, $\mathbf{R} \in \mathbb{F}(\mathcal{Y})$. Claramente todo produto cartesiano dá origem a uma relação *fuzzy*, mas nem toda relação *fuzzy* é um produto cartesiano. No caso geral, tem-se apenas que $\mathbf{R}$ é um subconjunto de um produto cartesiano. Obviamente, todos os resultados válidos para conjuntos *fuzzy* transferem-se imediatamente para relações *fuzzy*. O mesmo não pode ser dito a respeito das operações: há certas operações (como projeção; ver [9]) cujos resultados não são relações *fuzzy*.

Como exemplo de relação binária *fuzzy*, considere uma relação $\mathbf{R}$ definida no produto cartesiano $\mathcal{D} \times \mathcal{P}$, onde $\mathcal{D}$ é um conjunto de documentos (textos) e $\mathcal{P}$ é um conjunto de palavras-chave. Para cada documento d em $\mathcal{D}$ e palavra-chave p em $\mathcal{P}$, $\mathbf{R}(d, p)$ pode ser interpretado como o grau de relevância da palavra-chave p no documento d.

Há operações que estão definidas exclusivamente para relações *fuzzy*, sendo as mais importantes:

(1) inversão de uma relação: Seja $\mathbf{R} \in \mathbb{F}(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2)$. Define-se a inversa de uma relação $\mathbf{R}$, denotada por $\mathbf{R}^{-1}$, como a relação caracterizada pela função de pertinência $\mu_{\mathbf{R}^{-1}}(x_2, x_1) = \mu_{\mathbf{R}}(x_1, x_2)$, para todo par $(x_2, x_1) \in \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_1$.

(2) composição de relações: Sejam $\mathbf{R} \in \mathbb{F}(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2)$ e $\mathbf{S} \in \mathbb{F}(\mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3)$. Define-se a composição ou (produto relacional) $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ pela função de pertinência $\mu_{\mathbf{R} \circ \mathbf{S}}(x, y) = sup\{min\{\mu_{\mathbf{R}}(x, z), \mu_{\mathbf{S}}(z, y)\} : z \in \mathcal{X}_2\}$, para $(x, y) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3$.

As seguintes propriedades clássicas valem para a composição e inversão:

$(\mathbf{R} \circ \mathbf{S})_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \circ \mathbf{S}_\alpha$ e $(\mathbf{R} \circ \mathbf{S})_{\bar{\alpha}} = \mathbf{R}_{\bar{\alpha}} \circ \mathbf{S}_{\bar{\alpha}}$
$(\mathbf{R} \circ \mathbf{S}) \circ \mathbf{T} = \mathbf{R} \circ (\mathbf{S} \circ \mathbf{T})$
$\mathbf{R} \circ (\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = (\mathbf{R} \circ \mathbf{S}) \cup (\mathbf{R} \circ \mathbf{T})$
$(\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{R}^{-1}$
$(\mathbf{R} \cup \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \cup \mathbf{S}^{-1}$ e $(\mathbf{R} \cap \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \cap \mathbf{S}^{-1}$
$(\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}$ e $(\mathbf{R}^c)^{-1} = (\mathbf{R}^{-1})^c$
$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R} \circ \mathbf{T} \subseteq \mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ e $\mathbf{T} \circ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{T} \circ \mathbf{S}$.

Não vale a distributividade de $\circ$ com relação a $\cap$. Tem-se apenas a subdistributividade $\mathbf{R} \circ (\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) \subseteq (\mathbf{R} \circ \mathbf{S}) \cap (\mathbf{R} \circ \mathbf{T})$.

Podemos definir um produto relacional baseado em uma t-norma $\mathbf{T}$ (que usualmente exigimos contínua) da seguinte forma: $\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{S}$ é definida pela função de pertinência $\mu_{\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{S}}(x, y) = sup\{\mu_{\mathbf{R}}(x, z) \mathbf{T} \mu_{\mathbf{S}}(z, y) : z \in \mathcal{X}_2\}$, para todos $(x, y) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3$. Para $\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{S}$ valem as seguintes propriedades clássicas:

$(\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{R}^{-1}$
$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{T} \subseteq \mathbf{S} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{T}$ e $\mathbf{T} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{R} \subseteq \mathbf{T} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{S}$
$(\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{S}) \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{T} = \mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} (\mathbf{S} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{T})$
$\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} (\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = (\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{S}) \cup (\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{T})$ (*)
$\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} (\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) \subseteq (\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{S}) \cap (\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{T})$ (**)

O único caso em que podemos trocar em (*) e (**) $\cup$ e $\cap$, por, respectivamente, $\cup_{\mathbf{T}}$ e $\cap_{\mathbf{T}}$ é para o caso $\mathbf{T} = min$.

Podemos classificar uma relação *fuzzy* $\mathbf{R} \in \mathbb{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ como se segue:
(1) reflexiva: $\mu_{\mathbf{R}}(x, x) = 1$, para todo $x \in \mathcal{X}$.
(2) simétrica: $\mu_{\mathbf{R}}(x, y) = \mu_{\mathbf{R}}(y, x) \Leftrightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}$.
(3) fracamente reflexiva: $\mu_{\mathbf{R}}(x, x) > 0$, para todo $x \in \mathcal{X}$.
(4) relação de proximidade, se é reflexiva e simétrica.
(5) transitiva: se, para todos $x, y \in \mathcal{X}$, a seguinte condição for satisfeita: $sup\{min\{\mu_{\mathbf{R}}(x, z), \mu_{\mathbf{R}}(z, y)\} : z \in \mathcal{X}\} \leq \mu_{\mathbf{R}}(x, y) \Leftrightarrow \mathbf{R} \circ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}$.

É válido ressaltar que a definição acima para a transitividade não é única. Como já se pode suspeitar (motivados pelos casos anteriores), em (5), o operador min pode ser substituído por uma t-norma $\mathbf{T}$ qualquer. Assim, uma relação *fuzzy* $\mathbf{R}$ para a qual $\mathbf{R} \circ_{\mathbf{T}} \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}$ é chamada $\mathbf{T}$-transitiva.

Uma relação de equivalência *fuzzy* é uma relação *fuzzy* reflexiva, simétrica e transitiva (com qualquer versão de transitividade). Para cada $a \in \mathcal{X}$, a classe de equivalência *fuzzy* de a, denotada por $\langle a \rangle_{\mathbf{R}}$, é caracterizada pela função de pertinência $\mu_{\langle a \rangle_{\mathbf{R}}}(x) = \mu_{\mathbf{R}}(a, x)$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

Diferentemente do que ocorre no caso clássico, classes de equivalência *fuzzy* distintas não precisam ser disjuntas.

Um α-corte de uma relação *fuzzy* simétrica ou reflexiva é ainda uma relação *fuzzy* simétrica ou reflexiva. O mesmo não é válido para relações transitivas, e portanto não é válido para relações de quivalência. Tais considerações continuam verdadeiras de tomarmos α-cortes fortes no lugar de α-cortes.

Uma relação *fuzzy* reflexiva e transitiva é dita uma quase-ordem *fuzzy*, ou uma relação de preferência *fuzzy*. Definimos anti-simetria para relações *fuzzy* pela condição $\mu_{\mathbf{R}}(x, y) \mathbf{T} \mu_{\mathbf{R}}(x, y) \leq (x \doteq y)$, para todos $x, y \in \mathcal{X}$, onde $\mathbf{T}$ é uma t-norma arbitrária e $\doteq$ é definido por

$$(a \doteq b) = \begin{cases} 1 & \text{se a = b} \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma ordem parcial *fuzzy* em $\mathcal{X}$ é uma relação $\mathbf{R} \in \mathbb{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ reflexiva, transitiva (em qualquer sentido) e anti-simétrica.

6.4 Subgrupos *fuzzy*

Encerramos este capítulo apresentando o conceito de subgrupo *fuzzy*. Seja $\mathcal{S}$ um grupóide (isto é, um conjunto fechado sob uma relação binária definida em $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$). Um subconjunto *fuzzy* S de $\mathcal{S}$ cuja função de pertinência satisfaz, para todos $x, y \in \mathcal{S}, \mu_S(xy) \geq min\{\mu_S(x), \mu_S(y)\}$ é dito um subgrupóide *fuzzy*. Se $\mathcal{S}$ for um grupo, um subgrupóide S de $\mathcal{S}$ será dito um subgrupo *fuzzy* de $\mathcal{S}$ se sua função de pertinência satisfizer, $\mu_S(e) = 1$ e, para todo $x \in \mathcal{S}, \mu_S(x^{-1}) = \mu_S(x)$.

Se adicionalmente μ_S satisfizer $\mu_S(x) \leq \mu_S(y.x.y^{-1})$, S será dito um subgrupo normal. Dentre as operações definíveis entre subgrupos *fuzzy* encontram-se, obviamente, aquelas já definidas para conjuntos *fuzzy*. Em particular, podemos definir uniões e intersecções baseadas em t-normas. Na última seção do presente trabalho olharemos a teoria de conjuntos *fuzzy* de uma outra maneira, que nos permitirá escapar à arbitrariedade das t-normas de maneira natural, e reobter, de modo conceitualmente mais claro, resultados aqui apresentados a respeito de conjuntos *fuzzy* e subgrupos *fuzzy*.

Capítulo 7

Conjuntos *fuzzy* e feixes

Neste capítulo finalmente apresentamos um novo olhar sobre a teoria de conjuntos *fuzzy*. As idéias aqui expostas, originalmente publicadas em [8], estabelecem uma profunda relação entre a teoria de conjuntos *fuzzy* e a teoria de feixes.

Em muitos textos de teoria de conjuntos *fuzzy* identificam-se tais conjuntos com suas respectivas funções características. Esta não era, entretanto, a intenção primária de Zadeh, conforme mostra a citação abaixo

> *A fuzzy set (or class) in X is characterized by a membership (characteristic) function $f_A(x)$ wich associates with each point in X a real number in the interval $[0,1]$, with the value of $f_A(x)$ at x representing the "grade of membership" of x in A.*

Para se descrever adequadamente os conjuntos *fuzzy*, precisamos de uma linguagem que nos permita falar de objetos que são caracterizados por funções características generelizadas. Esta linguagem é a teoria de categorias, e para a formalização a que nos propomos, é necessário encontrar uma categoria tal que, dada uma aHc Ω, mapas Ω-valorados possam ser internalizados como $\mathcal{C}$-morfismos, e em que exista uma bijeção universal entre mapas Ω-valorados e $\mathcal{C}$-subobjetos. É sabido que a escolha $\mathcal{C} = sh(\Omega)$ é uma escolha adequada, e satisfaz todas as exigências acima. Tendo em vista o isomorfismo existente entre $\mathbf{C\Omega} - \mathbf{SET}$ e $sh(\Omega)$, faremos a seguir algumas construções categoriais e indicaremos que $\mathbf{C\Omega} - \mathbf{SET}$ tem *pullbacks* e classificador de subobjetos.

7.1 Conjuntos *fuzzy* como feixes

Se na observação acima do Exemplo 5.2 tomarmos $X = \{\cdot\}$, obteremos o objeto terminal $\mathbf{1}$ da categoria $sh(\Omega)$, cujo Ω-set completo correspondente é $(\Omega, \wedge)$. $\mathbf{1}$ é também objeto terminal de $\mathbf{C\Omega} - \mathbf{SET}$. Seja $\rightarrow$ a implicação em Ω, dada por

$$\alpha \rightarrow \beta = \bigvee \{\lambda \in \Omega \mid \alpha \wedge \lambda \leq \beta\}, \qquad \alpha, \beta \in \Omega$$

O Ω-set completo $\mathbb{S}$ correspondente ao feixe $\mathcal{F}_\Omega$ (lembre da definição prévia ao Exemplo 5.2) é dado por $\mathbb{S} = (R_\Omega, E_\Omega)$, onde

$$R_\Omega = \{(\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega \mid \beta \leq \alpha\},$$

$$E_\Omega((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)) = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \wedge (\beta_2 \rightarrow \beta_1).$$

Sejam (A, E) e (B, F) Ω-sets completos. Pode-se mostrar que um morfismo $\varphi : (A, E) \rightarrow (B, F)$ de $\mathbf{C\Omega - SET}$ é um monomorfismo se, e somente se, φ satisfaz

$$F(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \leq E(a_1, a_2), \qquad a_1, a_2 \in A$$

É fácil ver que o morfismo $t : \Omega \rightarrow R_\Omega$ definido por $t(\alpha) = (\alpha, \alpha)$ é um monomorfismo de $\mathbf{1}$ em $\mathbb{S}$. Este morfismo é chamado morfismo verdade.

Considere agora um Ω-set (não necessariamente completo) (A, E) e um mapa $f : A \rightarrow \Omega$. f é dito E-extensional se tivermos $f(a_1) \wedge E(a_1, a_2) \leq f(a_2)$, para cada a_1, $a_2 \in A$, e f é dito E-estrito se satisfizer $f(a) \leq E(a, a)$, para todo $a \in A$. Segue diretamente das definições que todo *singleton* é um mapa E-estrito e E-extensional.

Apresentamos agora duas proposições que ajudam a entender porque na introdução deste capítulo foi sugerida a categoria $sh(\Omega)$ como satisfazendo as exigências feitas.

Proposição 7.1 *Seja (A,E) um Ω-set (não necessariamente completo). Para cada Ω-$\mathbf{SET}$-morfismo $\chi : (A, E) \rightarrow \mathbb{S}$, existe um único mapa Ω-valorado, E-estrito e E-extensional $\mu : A \rightarrow \Omega$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $a \in A$, $\chi(a) = (E(a, a), \mu(a))$. Além disto, para todo mapa $\mu : A \rightarrow \Omega$ E-estrito e E-extensional, existe um único Ω-$\mathbf{SET}$-morfismo $\chi : (A, E) \rightarrow \mathbb{S}$ tal que a condição acima é verificada.*

Proposição 7.2 *Sejam (A,E) um Ω-set, $f : A \rightarrow \Omega$ um mapa E-estrito e E-extensional e $\Sigma(A, E)$ o espaço de singletons de (A,E). Então existe um único mapa $\tilde{f} : S(A, E) \rightarrow \Omega$ $\tilde{E}$-estrito e $\tilde{E}$-extensional tal que, para cada $a \in A$, $\tilde{f}(\tilde{a}) = f(a)$, onde $\tilde{a}$ é o singleton induzido por a.*

É importante notar que usando as duas proposições acima concluímos que todo mapa Ω-valorado $f : X \rightarrow \Omega$ pode ser identificado com um $\mathbf{C\Omega - SET}$-morfismo de $\Sigma(X, E_c)$ em $\mathbb{S}$. Em particular, toda função de pertinência pode ser internalizada como um $\mathbf{C\Omega - SET}$-morfismo.

Os próximos dois teoremas são essenciais no que se segue, pois dão embasamento teórico às considerações feitas até o final deste trabalho. O primeiro mostra que $\mathbf{C\Omega - SET}$ possui *pullbacks*, e o segundo diz que esta categoria possui classificador de subobjetos.

Teorema 7.3 (*pullbacks* **em $\mathbf{C\Omega - SET}$**) *Sejam (A,E), (B,F) e (C,G) Ω-sets completos. Além disto, sejam $\varphi : (A, E) \rightarrow (C, G)$ e $\psi : (B, F) \rightarrow (C, G)$ $\mathbf{C\Omega - SET}$-morfismos. Então existem um Ω-set completo (D,H) e $\mathbf{C\Omega - SET}$-morfismos $\xi : (D, H) \rightarrow (A, E)$ e $\zeta : (D, H) \rightarrow (B, F)$ tais que o diagrama a seguir é um pullback:*

$$\begin{tikzcd}
(D,H) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\xi"'] & (B,F) \arrow[d, "\psi"] \\
(A,E) \arrow[r, "\varphi"'] & (C,G)
\end{tikzcd}$$

Teorema 7.4 (Classificador de subobjetos) *Seja* $\xi : (U, F) \to (A, E)$ *um monomorfismo em* $\mathbf{C\Omega - SET}$*. Então existe um único* $\mathbf{C\Omega - SET}$*-morfismo* $\chi_\xi : (A, E) \to \mathbb{S}$ *tal que o diagrama abaixo é um pullback:*

$$\begin{tikzcd} (U,F) \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail, "\xi"'] & \mathbf{1} \arrow[d, tail, "t"] \\ (A,E) \arrow[r, dashed, "\chi_\xi"'] & \mathbb{S} \end{tikzcd}$$

O morfismo χ_ξ do **Teorema 7.4** acima é chamado morfismo característico do monomorfismo ξ, e μ_ξ é chamado função característica Ω-valorada do subobjeto (U, F). O par $(t, \mathbb{S})$ é chamado classificador de subobjetos.

Se tomarmos o caso especial $\Omega = [0, 1]$, conclui-se que um conjunto *fuzzy* A (em um dado universo de discurso X) caracterizado por $\mu_A : X \to [0, 1]$ é nada mais que o subobjeto $(S(\mu_A), F) \hookrightarrow \Sigma(X, E_c)$ correspondente ao morfismo característico $\chi_{\tilde{\mu_a}}$. Em particular, $\hookrightarrow$ é a inclusão e $(S(\mu_A), F)$ é determinado por

$$S(\mu_A) = \{\alpha.1_x \mid \alpha \leq \mu_A(x)\}$$

$$F(\alpha.1_x, \beta.1_y) = \begin{cases} \alpha \wedge \beta & \text{se } x = y \\ \\ \perp & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Como podemos identificar $[0, 1]$-sets completos com feixes sobre $[0, 1]$, vemos que o seguinte feixe corresponde a $(S(\mu_A), F)$:

$$\mathcal{F}(\alpha) = \{\beta.1_x \in S(\mu_A) \mid \beta = \alpha\},\ \varrho^\alpha_\beta(\alpha.1_x) = \beta.1_x, \text{ onde } \beta \leq \alpha$$

Identificando $\mathcal{F}(\alpha)$ com o conjunto $A_\alpha = \{x \in X \mid \alpha \leq \mu_A(x)\}$, as restrições ϱ^α_β tornam-se as inclusões de A_α em A_β. Assim, o feixe sobre [0,1] correspondendo a $(S(\mu_A), F)$ não é nada mais que o feixe de cortes de nível com relação a μ_A. Em geral, isto nos diz que conjuntos *fuzzy* são exatamente feixes de cortes de nível, isto é, famílias $(A_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ indexadas em $[0, 1]$ satisfazendo

$$A_0 = \{\cdot\},\ A_\alpha \subseteq A_\beta,\ \varrho^\alpha_\beta = \text{inclusão, para } 0 < \beta \leq \alpha,$$

$$\bigcap_{\beta \in (0,\alpha)} A_\beta = A_\alpha.$$

7.2 Operações entre conjuntos *fuzzy* revisitadas

Veremos agora como fazer a intersecção e união de subobjetos de $\mathbf{C\Omega - SET}$. Como $\mathbf{C\Omega - SET}$ tem *pullbacks*, é natural que a intersecção de dois subobjetos $\varphi : (U, F) \rightarrowtail (A, E)$ e $\psi : (V, G) \rightarrowtail (A, E)$ seja dada pelo seguinte *pullback*:

$$\begin{tikzcd} (D,H) \arrow[r, tail, "\zeta"] \arrow[d, tail, "\xi"'] \arrow[dr, dashed, "l"] & (V,G) \arrow[d, tail, "\psi"] \\ (U,F) \arrow[r, tail, "\varphi"'] & (A,E) \end{tikzcd}$$

O subobjeto $l : (D, H) \rightarrowtail (A, E)$ é chamado intersecção de $\varphi : (U, F) \rightarrowtail (A, E)$ e $\psi : (V, G) \rightarrowtail (A, E)$. Sendo μ_φ, μ_ψ e μ_l as funções características Ω-valoradas, mostra-se que

$$\mu_l(a) = \mu_\varphi(a) \wedge \mu_\psi(a)$$

Isto nos diz que a função de pertinência da intersecção de dois conjuntos *fuzzy* $(U, F) \hookrightarrow \Sigma(X, E_c)$ e $(V, G) \hookrightarrow \Sigma(X, E_c)$ coincide com o mínimo das respectivas funções de pertinência. É neste sentido que afirmamos no final do primeiro capítulo que esta nova abordagem para a teoria de conjuntos *fuzzy* elimina a arbitrariedade das t-normas.

Apenas como ilustração, calculamos a intersecção dos conjuntos *fuzzy* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \gg 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \gg 0,4\}$. Escolhamos $\mu_A(x) = H(x - 15)(1 - e^{-x})$ e $\mu_B(x) = H(x - 10)(1 - e^{-x^2})$, onde $H(x - a)$ é a "função" de Heavside (na verdade, uma distribuição) definida por

$$H(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{se } x - a \leq 0 \\ \\ 1 & \text{se } x - a > 0 \end{cases}$$

Formemos então os conjuntos $S_A = S(\mu_A) = \{\alpha.1_x \mid \alpha \leq \mu_A(x)\}$ e $S_B = S(\mu_B) = \{\alpha.1_x \mid \alpha \leq \mu_B(x)\}$. Em cada um destes conjuntos, definamos as seguintes igualdades $[0, 1]$-valoradas:

$$F_A(\alpha.1_x, \beta.1_y) = \begin{cases} \alpha \wedge \beta & \text{se } x = y \\ \\ \perp & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

$$F_B(\alpha.1_x, \beta.1_y) = \begin{cases} \alpha \wedge \beta & \text{se } x = y \\ \\ \perp & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Sabemos que $(S_A, F_A) \hookrightarrow \Sigma(X, E_c)$ e $(S_B, F_B) \hookrightarrow \Sigma(X, E_c)$ são $[0, 1]$-sets completos. As inclusões são as inclusões canônicas, e as designaremos por ι_A e ι_B. Façamos agora o *pullback*

$$\begin{tikzcd}
(D,H) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dr, tail, dashed, "\iota_{A \cap B}"] & (S_B, F_B) \arrow[d, tail, dashed, "\iota_B"] \\
(S_A, F_A) \arrow[r, tail, dashed, "\iota_A"'] & \Sigma(X, E_c)
\end{tikzcd}$$

Tome $D = \{(a, b) \in S_A \times S_B \mid \iota_A(a) = \iota_B(b)\} = S_A \cap S_B$. Como ι_A e ι_B são $[0, 1]$-**SET**-morfismos (ainda mais: são $\mathbf{C\Omega} - \mathbf{SET}$-morfismos!), temos $E_c(\iota_A(a), \iota_A(a)) = F_A(a, a)$ e $E_c(\iota_B(b), \iota_B(b)) = F_B(b, b)$. Como $\iota_A(a) = \iota_B(b)$, temos $F_B(b, b) = F_A(a, a)$, ou seja, para todo par $(a, b) \in D$, F_A e F_B coincidem. Definamos agora, em D, a igualdade H dada por

$$H((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = F_A(a_1, a_2) \wedge F_B(b_1, b_2)$$

Como F_A e F_B são deparadas, H também é separada. Para mostrar que (D, H) é completo, basta verificar que todo *singleton* σ de (D, H) é induzido por um elemento $(a_0, b_0) \in D$. (De fato, isto é suficiente, pois se $\sigma = \widetilde{(a, b)} =$

$\widetilde{(c,d)}$, então $\sigma(a_1,b_1) = \widetilde{(a,b)}(a_1,b_1) = H((a,b),(a_1,b_1)) = \widetilde{(c,d)}(a_1,b_1) = H((c,d),(a_1,b_1))$. Assim, $\sigma(a,b) = H((a,b),(a,b)) = H((c,d),(a,b))$ e $\sigma(c,d) = H((a,b),(c,d)) = H((c,d),(c,d))$. Pela simetria de H, temos $\sigma(a,b) = \sigma(c,d)$. Por fim, obtemos $H((a,b),(c,d)) = H((a,b),(a,b)) = H((c,d),(c,d))$, e como H é separada, concluímos $(a,b) = (c,d)$. Portanto, o elemento que induz σ é único). Para a existência deste elemento, definamos

$$A^* = \{a^* \in S_A \mid \exists b \in B : (a^*,b) \in D\}$$

$$B^* = \{b^* \in S_B \mid \exists a \in A : (a,b^*) \in D\}$$

$$f(a^*) = \bigvee\{\sigma(a^*,b) \mid b \in B : (a^*,b) \in D\}$$

$$g(b^*) = \bigvee\{\sigma(a,b^*) \mid a \in A : (a,b^*) \in D\}$$

$$s_1(a) = \bigvee_{a^* \in A^*} F_A(a,a^*) \wedge f(a^*), \quad a \in A$$

$$s_1(b) = \bigvee_{b^* \in B^*} F_B(b,b^*) \wedge g(b^*), \quad b \in B$$

s_1 e s_2 são *singletons* tais que $\mathbb{E}(s_1) = \mathbb{E}(s_2) = \mathbb{E}(\sigma)$. Como (S_A, F_A) e (S_B, F_B) são completos, existem $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$ tais que $s_1 = \tilde{a_0}$ e $s_2 = \tilde{b_0}$. Para mostrar que $(a_0,b_0) \in D$, fazemos as seguintes estimativas:

$$E_c(\iota_A(a_0), \iota_B(b_0)) \geq$$

$$\geq \bigvee\{E_c(\iota_A(a_0),c) \wedge E_c(c,\iota_B(b_0)) \mid \exists (a,b) \in D : \iota_A(a) = c = \iota_B(b)\}$$

$$\geq \bigvee_{(a,b)\in D} F_A(a_0,a) \wedge F_B(b_0,b) = \bigvee_{(a,b)\in D} s_1(a) \wedge s_2(b)$$

$$= \bigvee_{(a,b)\in D} f(a) \wedge g(b) \geq \bigvee_{(a,b)\in D} \sigma(a,b) = \mathbb{E}(\sigma).$$

Como as extensões de existência de s_1, s_2 e σ são iguais e pela definição de mapa de Ω-sets, temos

$$E_c(\iota_A(a_0), \iota_B(b_0)) = E_c(\iota_A(a_0), \iota_A(a_0)) = E_c(\iota_B(b_0), \iota_B(b_0))$$

Como E_c é separada, $\iota_A(a_0) = \iota_B(b_0)$, ou seja, $(a_0,b_0) \in D$. Assim, $(D,H) \hookrightarrow \Sigma(X,E_c)$ é a intersecção de (S_A,F_A) e (S_B,F_B). Podemos então obter o feixe sobre $[0,1]$ correspondente a este $[0,1]$-set completo e por fim obter a relação

$$\mu_{\iota_{A\cap B}}(x) = \mu_{\iota_A}(x) \wedge \mu_{\iota_B}(x).$$

ou seja,

$$\mu_{A\cap B}(x) = min\{H(x-15)(1-e^{-x}), \;\; H(x-10)(1-e^{-x^2})\}$$

Como é de se esperar, a união de dois conjuntos *fuzzy* vem da noção de coproduto em $\mathbf{C\Omega - SET}$. Dados dois Ω-sets completos (A,E) e (B,F), formemos (em **SET**) a união disjunta de A e B, denotada por $A+B$. Definamos neste conjunto a seguinte igualdade Ω-valorada:

$$
(E+F)(c,d) = \begin{cases} E(c,d) & \text{se } (c,d) \in A \times A \\ F(c,d) & \text{se } (c,d) \in B \times B \\ \perp & \text{nos demais casos} \end{cases}
$$

Denotando as inclusões de A e de B em $A+B$ respectivamente por i_A e i_B, o coproduto de (A,E) e (B,F) é o espaço de *singletons* $\Sigma(A+B, E+F)$, juntamente com as inclusões $j_{(A,E)}$ e $j_{(B,F)}$ definidas por

$$
j_{(A,E)}(a) = \widetilde{i_A(a)},\ j_{(B,F)}(b) = \widetilde{i_B(b)},\ a \in A,\ b \in B
$$

A união $(C,H) \hookrightarrow (A,E)$ dos subobjetos $\xi : (U,F) \rightarrowtail (A,E)$ e $\zeta : (V,G) \rightarrowtail (A,E)$ é determinada pela fatoração epi-mono de $\xi + \zeta$:

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma(U+V, F+G) \arrow[rr, "\xi+\zeta"] \arrow[dr, two heads, "\eta"'] & & (A,E) \\
& (C,H) \arrow[ur, hook, "\iota"'] &
\end{tikzcd}
$$

onde $\xi + \zeta$ é o morfismo universal determinado pelo diagrama do coproduto de (U,F) e (V,G):

$$
\begin{tikzcd}
(U,F) \arrow[r, tail, "j_{(U,F)}"] \arrow[dr, "\xi"'] & \Sigma(U+V, F+G) \arrow[d, dashed, "\xi+\zeta"] & (V,G) \arrow[l, tail, "j_{(V,G)}"'] \arrow[dl, "\zeta"] \\
& (A,E) &
\end{tikzcd}
$$

Analogamente ao que ocorre com a intersecção, é possível mostrar que para a união tem-se

$$
\mu_\iota(a) = \mu_\xi(a) \vee \mu_\zeta(a),\ a \in A
$$

o que mostra mais uma vez que os operadores *min* e *max* não são escolhas arbitrárias, mas estão essencialmente relacionados à formação de produtos e coprodutos em $\mathbf{C\Omega} - \mathbf{SET}$.

Como $\mathbf{C\Omega} - \mathbf{SET}$ tem *pullbacks* e objeto terminal, podemos formar o produto de dois Ω-sets completos (A,E) e (B,F), que será determinado pelo seguinte *pullback*:

$$
\begin{tikzcd}
(C,G) \arrow[r, dashed, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "\pi_A"'] & (B,F) \arrow[d, "!"] \\
(A,E) \arrow[r, "!"'] & \mathbf{1}
\end{tikzcd}
$$

onde π_A e π_B são projeções, $C = \{(a,b) \in A \times B \mid E(a,a) = F(b,b)\}$ e a igualdade Ω-valorada G é definida por

$$
G((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = E(a_1,a_2) \wedge F(b_1,b_2)
$$

O Ω-set completo (C,G) será denotado por $(A,E) \times (B,F)$.

7.3 Relações *fuzzy* revisitadas

Retomamos neste instante o assunto de relações *fuzzy*, mas agora olhamos relações em $\mathbf{C\Omega - SET}$. Sejam (A, E) e (B, F) Ω-sets completos. Uma relação entre (A, E) e (B, F) é um subobjeto $\xi : (D, H) \rightarrowtail (A, E) \times (B, F)$. Como podemos identificar ξ com $\langle \pi_A \circ \xi, \pi_B \circ \xi \rangle$, um par de morfismos $\varphi : (D, H) \to (A, E)$ e $\psi : (D, H) \to (B, F)$ é uma relação se o morfismo universal $\langle \varphi, \psi \rangle$ for monomorfismo. Usando o fato de que $\mathbf{C\Omega - SET}$ tem fatoração epi-mono, pode-se redefinir a composição de relações da seguinte forma: sejam $\langle \varphi, \psi \rangle$ e $\langle \zeta, \vartheta \rangle$ relações tais que φ e ψ têm o mesmo contra-domínio (B, F). Fazendo o *pullback* de $(\psi, \zeta, (B, F))$, obtemos

$$\begin{tikzcd}
 & & (M,N) \arrow[dl, dashed, "\delta"'] \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] & & \\
 & (D,H) \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & & (K,L) \arrow[dl, "\zeta"'] \arrow[dr, "\vartheta"] & \\
(A,E) & & (B,F) & & (C,G)
\end{tikzcd}$$

Por fatoração epi-mono, chegamos a

$$\begin{tikzcd}
(M,N) \arrow[rr, "\langle \varphi\circ\delta, \vartheta\circ\varepsilon \rangle"] \arrow[dr, two heads, "\eta"'] & & (A,E) \times (C,G) \\
 & (T,S) \arrow[ur, hook, dashed, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

$(T, S) \hookrightarrow (A, E) \times (C, G)$ é chamado composição de $\langle \varphi, \psi \rangle$ e $\langle \zeta, \vartheta \rangle$.

Fixando $\Omega = [0, 1]$, esta nova abordagem para relações *fuzzy* permite mostrar que toda relação binária *fuzzy* μ entre X e Y é um relação entre os espaços de *singletons* $\Sigma(X, E_c)$ e $\Sigma(Y, E_c)$, e que o suporte do subobjeto $(S(\mu), F) \hookrightarrow \Sigma(X, E_c) \times \Sigma(Y, E_c)$ correspondente a μ é dado por

$$S(\mu) = \{(\alpha.1_x, \alpha.1_y) \in S(X, E_c) \times S(Y, E_c) \mid \alpha \leq \mu(x, y)\}$$

Seja $\langle \varphi, \psi \rangle$ uma relação binária em uma Ω-set completo (A, E) (isto é, φ e ψ são morfismos paralelos tais que $\langle \varphi, \psi \rangle$ é um monomorfismo. $\langle \varphi, \psi \rangle$ é dita reflexiva se, e somente se, a diagonal Δ de (A, E) (definida por $\Delta = \langle id_{(A,E)}, id_{(A,E)} \rangle$) fatora por $\langle \varphi, \psi \rangle$, ou seja, se, e somente se, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[rr, tail, "\langle id_{(A,E)}, id_{(A,E)} \rangle"] \arrow[dr, two heads] & & (A,E) \times (A,E) \\
 & (R,Q) \arrow[ur, tail, "\langle \varphi, \psi \rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

A relação $\langle \varphi, \psi \rangle$ é simétrica se, e só se, existir um morfismo $\iota : (R, Q) \to (R, Q)$ tal que $\psi = \varphi \circ \iota$.

$\langle \varphi, \psi \rangle$ é antisimétrica se, e só se, a intersecção dos subobjetos $\langle \varphi, \psi \rangle : (R, Q) \rightarrowtail (A, E) \times (A, E)$ e $\langle \psi, \varphi \rangle : (R, Q) \rightarrowtail (A, E) \times (A, E)$ for a diagonal de (A, E), ou seja, se, e só se, existir um morfismo $\sigma : (A, E) \to (R, Q)$ tal que $\varphi \circ \sigma = \psi \circ \sigma = id_{(A,E)}$ e o seguinte diagrama for um *pullback*:

$$\begin{tikzcd}
(A,E) \arrow[r, dashed, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "\sigma"'] & (R,Q) \arrow[d, tail, "\langle\psi,\varphi\rangle"] \\
(R,Q) \arrow[r, tail, "\langle\varphi,\psi\rangle"'] & (A,E)\times(A,E)
\end{tikzcd}$$

$\langle\varphi,\psi\rangle$ é transitiva se, e somente se, $\langle\varphi,\psi\rangle\circ\langle\varphi,\psi\rangle$ fatora por $\langle\varphi,\psi\rangle$, isto é, se $(M,N) \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\rightrightarrows}} (R,Q)$ são determinados pelo seguinte *pullback*

$$\begin{tikzcd}
(M,N) \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\delta"'] & (R,Q) \arrow[d, "\varphi"] \\
(R,Q) \arrow[r, "\psi"'] & (A,E)
\end{tikzcd}$$

então existe um morfismo $(M,N)\to(R,Q)$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
(M,N) \arrow[rr, "\langle\varphi\circ\delta,\psi\circ\varepsilon\rangle"] \arrow[dr, dashed] & & (A,E)\times(A,E) \\
& (R,Q) \arrow[ur, tail, "\langle\varphi,\psi\rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

Uma pré-ordem em um Ω-set completo (A,E) é determinada por um mapa $p : A\times A\to\Omega$ satisfazendo

(p0) $p(a,b)\leq E(a,a)\wedge E(b,b)$
(p1) $E(a,b)\leq p(a,b)$
(p2) $p(a,b)\wedge p(b,c)\leq p(a,c)$

e uma ordem parcial é determinada por uma pré-ordem que adicionalmente satisfaz

(p3) $p(x,y)\wedge p(y,x)\leq E(x,y)$

Uma relação de equivalência em (A,E) é determinada por um mapa $q : A\times A\to\Omega$ tal que as condições abaixo são verificadas:

(q0) $q(a,b)\leq E(a,a)\wedge E(b,b)$
(q1) $E(a,b)\leq q(a,b)$
(q2) $q(a,b)\wedge q(b,c)\leq q(a,c)$
(q3) $q(a,b)=q(b,a)$

Por (q2) e (q3), (A,q) é um Ω-set, e (q0) e (q1) implicam que o mapa $\pi : A\to S(A,q)$ definido por

$$[\pi(a)](b)=q(a,b),\quad b\in A$$

é um $\mathbf{C\Omega-SET}$-morfismo. O par $(\pi,\Sigma(A,q))$ é o quociente de (A,E) pela relação de equivalência determinada por q. Desta forma, *singletons* com relação a q são classes de equivalência vagas.

Seja (X, E_c) um $[0,1]$-set completo. Uma relação de similaridade μ em X é uma relação binária *fuzzy* satisfazendo

(s1) $\mu(x,x) = 1$
(s2) $\mu(x,y) = \mu(y,x)$
(s3) $min\{\mu(x,y), \mu(y,z)\} \leq \mu(x,z)$

No caso $E = E_c$, (s1)-(s3) são equivalentes a (q0)-(q3). Assim, relações de similaridade são relações de equivalência no espaço de *singletons* $\Sigma(X, E_c)$. O suporte $S(\mu)$ da relação de equivalência $(S(\mu), F) \hookrightarrow \Sigma(X, E_c) \times \Sigma(X, E_c)$ é dado por

$$S(\mu) = \{(\alpha.1_x, \alpha.1_y) \mid \alpha \leq \mu(x,y)\}$$

Para $\alpha \in [0,1]$,

$$\mu_\alpha = \{(x,y) \in X \times X \mid (\alpha.1_x, \alpha.1_y) \in S(\mu)\}$$

é uma relação de equivalência no sentido usual. Pode-se mostrar que uma relação binária *fuzzy* μ é uma relação de similaridade em X se, e só se, todos os μ_α forem relações d equivalência em X. Desta forma, concluímos que relações de equivalência em $\Sigma(X, E_c)$ são feixes de conjuntos de nível de relações de equivalência no sentido usual.

7.4 Subgrupos *fuzzy* revisitados

Falaremos brevemente de subgrupos *fuzzy*. Para isto, antes apresentaremos o conceito de objeto grupo em uma categoria $\mathcal{C}$ com produtos finitos e objeto terminal. Uma quádrupla (A, m, e, l) é dita um objeto grupo se, e somente se, A é um $\mathcal{C}$-objeto, $m : A \times A \to A$, $e : \mathbf{1} \rightarrowtail A$, $l : A \to A$ são $\mathcal{C}$-morfismos tais que os seguintes diagramas comutam:

Associatividade:

$$\begin{tikzcd}
A \times A \times A \arrow[r, "m \times id_A"] \arrow[d, "id_A \times m"'] & A \times A \arrow[d, "m"] \\
A \times A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}$$

Existência do elemento neutro:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\langle id_A, !_A \rangle"] \arrow[d, "\langle !_A, id_A \rangle"'] \arrow[ddrr, "id_A"] & A \times \mathbf{1} \arrow[r, "id_A \times e"] & A \times A \arrow[dd, "m"] \\
\mathbf{1} \times A \arrow[d, "e \times id_A"'] & & \\
A \times A \arrow[rr, "m"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Existência do inverso:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\langle id_A, l\rangle"] \arrow[dr, "!_A"] \arrow[dd, "\langle l, id_A\rangle"'] & & A\times A \arrow[dd, "m"] \\
& \mathbf{1} \arrow[dr, "e"] & \\
A\times A \arrow[rr, "m"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Um objeto grupo em $\mathbf{C\Omega-SET}$ é uma quádrupla $((A,E),m,e,l)$, onde (A,E) é um Ω-set completo, e é elemento do conjunto A e $m : A\times A\to A$, $l : A\to A$ são mapas satisfazendo

(g0) $E(m(a,b),m(a,b)) = E(a,a)\wedge E(b,b)$
(g1) $E(a_1,a_2)\wedge E(b_1,b_2)\leq E(m(a_1,b_1),m(a_2,b_2))$
(g2) (A,m,e) é um monóide no sentido usual.
(g3) $E(e,e)=\top$
(g4) l é um $\mathbf{C\Omega-SET}$-endomorfismo de (A,E)
(g5) $E(a,a) = E(e,m(a,l(a)) = E(e,m(l(a),a))$

Se Ω for um *locale* espacial, grupos em $\mathbf{C\Omega-SET}$ serão feixes de grupos em Ω.

Dados um objeto grupo $((A,E),m,e,l)$ em $\mathbf{C\Omega-SET}$ e um $\mathbf{C\Omega-SET}$-morfismo $\varphi : (U,H)\rightarrowtail (A,E)$, $((U,H),\varphi)$ é dito um objeto subgrupo se os seguintes diagramas forem comutativos

(sg1) $m\circ(\varphi\times\varphi)$ fatora por φ:

$$\begin{tikzcd}
(U,H)\times(U,H) \arrow[r, tail, "\varphi\times\varphi"] \arrow[d, dashed, "\psi"'] & (A,E)\times(A,E) \arrow[d, "m"] \\
(U,H) \arrow[r, tail, "\varphi"'] & (A,E)
\end{tikzcd}$$

(sg2) e fatora por φ:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rr, tail, "e"] \arrow[dr, dashed, "e'"'] & & (A,E) \\
& (U,H) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

(sg3) l fatora por φ:

$$\begin{tikzcd}
(U,H) \arrow[r, tail, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\vartheta"'] & (A,E) \arrow[d, "l"] \\
(U,H) \arrow[r, tail, "\varphi"'] & (A,E)
\end{tikzcd}$$

Um objeto subgrupo $((U,H),\varphi)$ do objeto grupo $((A,E),m,e,l)$ é dito normal (ou invariante) se, para todo subobjeto $\underline{\alpha}\rightarrowtail\mathbf{1}$ e para cada par de morfismos $q_{\underline{\alpha}} : \underline{\alpha}\rightarrowtail(U,H)$, $p_{\underline{\alpha}} : \underline{\alpha}\rightarrowtail(A,E)$, o morfismo $m\circ\langle m\circ\langle p_{\underline{\alpha}}, q_{\underline{\alpha}}\rangle, l\circ p_{\underline{\alpha}}\rangle$ fatora por φ.

Se consideramos a definição de subgrupo *fuzzy* dada no Capítulo 6, vemos que uma função de pertinência μ caracteriza um grupo se, e só se, todos os conjuntos de nível $\mu_\alpha = \{x \mid \alpha \leq \mu(x)\}$ forem grupos (no sentido usual), ou seja, subgrupos *fuzzy* são feixes de conjuntos de nível de subgrupos.

Considere agora um subgrupo *fuzzy* normal μ de um grupo $(G, \cdot, e, l)$ (no sentido usual, ou seja, um grupo em **SET**; l representa a inversão de um elemento). μ pode ser identificado com um objeto subgrupo normal de $(\Sigma(G, E_c), \tilde{\cdot}, \tilde{e}, \tilde{l})$, e a função de pertinência $\tilde{\mu}$ será dada por

$$\tilde{\mu} = sup_{a \in G}\{min\{s(a), \mu(a)\}\}, \quad s \in S(G, E_c)$$

Assim, o quociente de $(\Sigma(G, E_c), \tilde{\cdot}, \tilde{e}, \tilde{l})$ com relação ao objeto subgrupo determinado por $\tilde{\mu}$ é o quociente de $(G, \cdot, e, l)$ com relação ao subgrupo *fuzzy* normal μ.

Capítulo 8

Considerações finais

Neste capítulo final fazemos algumas observações a respeito da importância do trabalho de Ulrich Höhle. Destacamos as principais conseqüncias que este traz ao futuro da teoria de conjuntos *fuzzy* e suas aplicações.

Atualmente um grande número de pessoas (sobretudo em departamentos de Matemática Aplicada ou Engenharia) utilizam com sucesso ferramentas da teoria de conjuntos *fuzzy* para resolver problemas concretos. Esta teoria, mesmo sendo recente, já se mostrou capaz de facilitar a resolução de alguns problemas. Não afirmamos que estes problemas não seriam resolvidos de outra maneira. O fato é que, usando-se técnicas *fuzzy*, chega-se efetivamente à solução de muitos problemas. No entanto, apesar do sucesso nas aplicações, os fundamentos da teoria não estavam muito bem estabelecidos, e muitos conceitos de grande relevância não estavam claros ou não eram usados da melhor maneira possível, enquanto outros conceitos eram desnecessariamente introduzidos. Um exemplo claro deste fato é a introdução das t-normas. Tais funções permitem uma grande arbitrariedade em operações básicas entre conjuntos *fuzzy*, obscurecendo o significado da teoria e até mesmo atrapalhando a obtenção de soluções para alguns problemas. Vimos que as t-normas são dispensáveis: intersecção e união de conjuntos *fuzzy* se fazem com os operadores *min* e *max*, e não com uma t-norma arbitrariamente escolhida! Vemos assim que *é essencial trabalhar-se no ambiente matemático correto, e no caso de conjuntos fuzzy este ambiente é a categoria de feixes sobre a álgebra de Heyting* $[0,1]$. Havendo clareza conceitual, não apenas evitam-se construções desnecessárias mas também aproveitam-se de maneira mais eficaz os conceitos já conhecidos.

Ressaltamos que o principal resultado de Höhle é o fato de que *conjuntos fuzzy são feixes*. Com isto, muitos problemas não resolvidos satisfatoriamente na teoria de conjuntos *fuzzy* podem ser resolvidos de maneira conceitualmente clara usando toda a matemática já desenvolvida na teoria de feixes. Este é o caso do problema do quociente de um grupo *fuzzy* por um subgrupo normal.

Como conjuntos *fuzzy* são feixes, as construções envolvendo tais conjuntos são na verdade construções com feixes. De fato, vimos, por exemplo, que relações de similaridade são feixes de relações de equivalência comuns, subgrupos *fuzzy* são feixes de conjuntos de nível de subgrupos, etc.

Vale ressaltar que as conclusões a que se chegam tratando conjuntos *fuzzy* como feixes coincidem com as definições originais de Zadeh. Vejam-se, por exemplo, as definições orginais de união e intersecção, que foram originalmente em termos de min e max, respectivamente. Em [12], Zadeh já havia ressaltado que não era essencial tomar-se o intervalo $[0, 1]$ na definição de conjunto *fuzzy*: este intervalo poderia ser substituído por certos reticulados. Em [10], Goguen constrói os "L-*fuzzy* sets", que são conjuntos *fuzzy* cujas funções características têm por contradomínio uma álgebra de Heyting completa (que em [10] são chamadas "closg": *"complete lattice ordered semigroup"*). Embora generalize de maneira correta a definição de conjunto *fuzzy*, Goguen não chega a ver que eles são feixes (veja-se que nesta época a teoria de feixes era uma teoria nascente; a definição utilizada hoje de feixe foi dada por Leray entre os anos de 1948 e 1951).

Esperamos que as idéias presentes em [8] sejam divulgadas e absorvidas entre as pessoas que trabalham com conjuntos *fuzzy* e assuntos correlatos. Se devidamente compreendido e empregado, o trabalho de Höhle pode abrir novos horizontes para a teoria de conjuntos *fuzzy*, levando a um saudável diálogo entre duas áreas aparentemente tão distantes como a teoria de conjuntos *fuzzy* e a teoria de feixes.

Capítulo 9

Apêndices

9.1 Apêndice I - Topologia

Apresentamos definições básicas de Topologia que poderão auxiliar o leitor na leitura do texto.

Definição AI.1 *Seja X um conjunto. Uma topologia em X, para a qual usaremos o símbolo* $\Omega(X)$*, é um subconjunto de* $\wp(X)$ *que satisfaz:*

(i) $\emptyset$, $X \in \Omega(X)$.

(ii) se $\{A_i\}_{i=1}^n$ *é uma família finita de elementos de* $\Omega(X)$*, então* $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \Omega(X)$.

(iii) se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é uma família arbitrária de elementos de* $\Omega(X)$*, então* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \Omega(X)$.

Os elementos de $\Omega(X)$ *são chamados abertos.*

Definição AI.2 *Um conjunto é dito fechado numa topologia se seu complementar (nesta mesma topologia) é aberto. Um conjunto é dito clopen se for simultaneamente fechado e aberto. Um conjunto fechado Y é dito um fechado irredutível se não existem fechados A, B tais que* $A \neq Y \neq B$ *e* $A \cup B = Y$.

Definição AI.3 *Um espaço topológico é um par* $(X, \Omega(X))$*, onde X é um conjunto e* $\Omega(X)$ *é uma topologia em X. Quando a topologia estiver subentendida, diremos apenas "X é um espaço topológico".*

Definição AI.4 *Seja* $Y \in \wp(X)$*. O subespaço topológico gerado por Y em X é o par* $(Y, \Omega(Y))$*, em que* $\Omega(Y) = \{u \cap Y \mid u \in \Omega(X)\}$.
Claramente todo subespaço topológico é um espaço topológico, e $\Omega(Y) \subseteq \Omega(X)$.

Definição AI.5 *O interior de* $Y \in \wp(X)$ *é* $int(Y) \overset{def}{=} \bigcup\{u \in \Omega(X) \mid u \subseteq Y\}$.
Um aberto é dito regular se for o interior de um conjunto fechado.

Definição AI.6 *O fecho de* $Y \in \Omega(X)$ *é o conjunto* $\bar{Y} = \{x \in X \mid$ *para todo* $u \in \Omega(X)$*, se* $x \in u$*, então* $u \cap Y \neq \emptyset\}$.

Definição AI.7 *Um espaço topológico X é sóbrio se todo fechado irredutível* *é o fecho de um único ponto de* X*, isto é, se* Y *é um fechado irredutível, então existe um único* $x \in X$ *tal que* $Y = \overline{\{x\}}$.

9.2 Apêndice II - O Lema de Yoneda

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena e $\hat{\mathcal{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{SET}^{\mathcal{C}^{op}}$ a categoria de pré-feixes sobre $\mathcal{C}$. Para cada objeto A de $\mathcal{C}$, associamos o objeto $y(A) = Hom(-, A)$ de $\hat{\mathcal{C}}$. Se $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, então existe uma transformação natural $y(f) : y(A) \to y(B)$ dada por $y(f) = \{y(f)_D\}_{D \in |\mathcal{C}|}$, onde

$$y(f)_D : Hom_C(D, A) \to Hom_C(D, B)$$

é dado por $y(f)_D(h) = f \circ h$, para todo morfismo $h : D \to A$ em $\mathcal{C}$.

Teorema AII.1 (Imersão de Yoneda): *A aplicação y:* $\mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ *definida por* $A \mapsto y(A)$ *e* $f \mapsto y(f)$ *é um funtor.*

Teorema AII.2 (Lema de Yoneda):*Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria localmente pequena. Se* F *é um pré-feixe sobre* $\mathcal{C}$ *e* $A \in | \mathcal{C} |$ *, então existe uma bijeção*

$$\Upsilon\text{: } Hom_{\hat{\mathcal{C}}}(y(A),F) \longrightarrow F(A)$$

que associa a cada transformação natural η*:* $y(A) \to F$ *o elemento* $\eta_A(id_A)$ *de* $F(A)$*.*

Pelo Lema de Yoneda, uma transformação natural $\eta : y(A) \to F$ é codificada pela seção $\eta_A(id_A)$ de $F(A)$, ou seja, toda a informação sobre η está contida na seção $\eta_A(id_A)$.

Referências Bibliográficas

[1] F. Miraglia, *Introduction to partially ordered structures and sheaves.* A ser publicado pelo CLE, UNICAMP

[2] B. A. Davey and H.A. Priestley., *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[3] P.R. Halmos, *Lectures on Boolean Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[4] M. E. Coniglio, *Minicurso de introdução à teoria de categorias com aplicações à Lógica*, apostila para curso ministrado no CLE, UNICAMP.

[5] R. Goldblatt, *Topoi: The categorial Analysis of Logic.* North-Holland, 2nd edition, 1984.

[6] L.A. Sbardellini, *Semântica categorial generalizada*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2001.

[7] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[8] U. Höhle, *Fuzzy sets and sheaves.* Preprint D-42097 da Universidade de Wuppertal, Alemanha, 2004.

[9] H. Bandemer and S. Gottwald, *Fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy methods with applications.* John Wyley & Sons, 1995.

[10] J.A. Goguen, *L-fuzzy sets*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **18** (1967), 145-174

[11] A. Rosenfeld, *Fuzzy groups*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **35** (1971), 512-517

[12] L. Zadeh, *Fuzzy sets*, Informations and Control, **8** (1965), 338-353

[13] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, volume 144 of *Mathematics in science and engineering*, Academic Press, 1980.