Paradoxos Modais e Lógicas da Inconsistência Formal

Newton Marques Peron

Monografia final

19 de janeiro de 2007

O trabalho a seguir é fruto de uma pesquisa de um ano na área de lógica formal, mais especificamente em lógica modal e lógica paraconsistente. O texto inicia com uma introdução à Logica Proposicional Clássica, primeiro sistema formal criado e que serve de fundamento a todos os demais sistemas. Há inúmeras obras a respeito do tema (vide [Church, 1956] e [Carnielli and Coniglio, 2006]), entretanto, pelo caráter propedêutico que essa seção ocupa, deu-se preferência à exposição sintetizada de [Creswell and Hughes, 1996].

Apresenta-se, em seguida, uma importante família de sistemas lógicos baseados em Lógica Proposicional Clássica, a saber, a lógicas modais padrão. Trataremos, aqui, dos principais sistemas conhecidos: **K**, **S4**, **S5**, **KT** e **D**, dando ênfase aos dois últimos, uma vez que neles são contextualizados os paradoxos aqui apresentado, objeto principal de nossa pesquisa.

A terceira seção é um estudo introdutório às **L**ógicas da **I**nconsistência **F**ormal, as **LFI**'s, abordagem metalógica no estudo de lógicas paraconsistentes. Esse tipo de abordagem permite construir sistemas não-consistentes com certa facilidade, como lógicas modais paraconsistentes, tais como exposto em [Carnielli et al., 2005a] e sugerido em [Coniglio, 2006]. Esses sistemas parecem solucionar grande parte dos paradoxos aqui apresentados e, na seção seguinte, há sugestões de como essa solução seria possível.

A última seção apresenta uma série de paradoxos modais e suas possíveis soluções, utilizando as mais diversas lógicas: contextuais, temporais, não-monotônicas e paraconsistentes. Dá-se ênfase ao Paradoxo de Chisholm e ao Paradoxo da Cognocisbilidade, temas em que focalizamos nosso estudo. Para essa seção foram consultadadas inúmeras obras, cabe aqui citar [Prakken and Sergot, 1994] e [Prakken and Sergot, 1997], cujos autores criaram a lógica contextual com o intuito de resolver paradoxos modais, além de [Carnielli et al., 2005a], para a solução paraconsistente.

Há, na conclusão, uma discussão filosófica sobre o uso de lógica formal no tratamento da linguagem natural. A partir de uma análise crítica das soluções propostas na literatura aos paradoxos modais, mostra-se que a maior parte desses paradoxos existem somente em linguagem formal, o que indicaria justamente os limites da lógica formal aplicada à algumas estruturas da línguagem natural.

Sumário

1 A Lógica Proposicional Clássica

Essa seção é uma breve introdução à Lógica Proposicional Clássica. A Lógica Clássica é de crucial importância para qualquer estudo de demais sistemas lógicos, pois esses ora a extende com novos símbolos (como as lógicas modais), ora nega um de seus princípios (como as lógicas paraconsistentes). Nessa seção também definiremos alguns termos que usaremos ao longo do texto, como teorema, proposição, operadores, etc.

A Lógica Proposicional Clássica, ou Cálculo Proposicional, foi o primeiro sistema lógico criado, a partir das obras de George Boole (1815 - 1864) e Gottlob Frege (1848-1925). Preocupado em caracterizar a demonstração matemática, Frege formalizou essas regras de demonstração a partir de regras elementares, "matematizando" a lógica tradicional Aristotélica, daí o nome de Cálculo Proposicional. Boole, por sua vez, preocupava-se também em matematizar a lógica tradicional, embora ambos tivessem motivações diferentes.

O Cálculo Proposicional - **CP** - contém como símbolos primitivos (isto é, indefiníveis):

- um conjunto infinito de letras: $p_1, p_2, \ldots p_n \quad (n \in \mathbb{N})$
- os quatros símbolos: $\neg$, $\rightarrow$, (e).

Qualquer símbolo ou conjunto de símbolos dessa lista é chamado de *expressão*. Uma expressão é uma fórmula bem formada - fbf - se, e somente se, segue as seguintes Regras de Formação - **RF** -:

RF$_1$: Uma letra qualquer é uma fbf.
RF$_2$: Se α é uma fbf, então $\neg\alpha$ também é uma fbf.
RF$_3$: Se α é uma fbf e β é uma fbf, então $(\alpha \rightarrow \beta)$ também é uma fbf.

Aqui, os simbolos α e β são usados no lugar de qualquer expressão. Assim, em **RF**$_2$ temos que, adicionando-se o símbolo $\neg$ a qualquer fbf, continuaríamos com uma fbf.

São exemplos de fbf: p_1, $\neg\neg p_1$, $\neg(p_1 \rightarrow \neg p_2)$, $(p_1 \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow p_2))$, ... Para facilitar, entretanto, eliminaremos os últimos parênteses de uma expressão. Em vez de $(p_1 \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow p_2))$, escreveremos simplesmente $p_1 \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow p_2)$.

Aa letras são interpretadas como variáveis cujos valores são *proposições*. Toda proposição é ou verdadeira ou falsa, e nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Verdade e falsidade são os valores-verdades de uma proposição.

É possível, ainda, formar proposições mais complexas. Tomemos, por exemplo, a proposição: "Brutus matou César". Daí, podemos formar a proposição: "não é o caso que Brutus matou César". Ora, sabemos que se "Brutus matou César" for verdadeiro, "não é o caso que Brutus matou César" será falso, e vice-versa. Assim, acrescentando-se a expressão "não é o caso que", em geral, trocamos o valor-verdade de uma proposição verdadeiro por falso, ou falso por verdadeiro.

De modo semelhante, de duas proposições como “Brutus matou César” e “Brutus será o imperador de Roma”, podemos formar uma terceira: “se Brutus matou César, então Brutus será imperador de Roma”. Essa proposição, por sua vez, será verdadeira se, e somente se, a primeira for falsa ou a segunda for verdadeira; e será falsa se, e somente se, a primeira for verdadeira e a segunda for falsa.

As expressões “não é o caso que ...” e “se... então...” são denominadas *operadores proposionais.* A proposição que o operador opera é denominada argumento. Se um operador requer apenas um argumento, é um operador *monádico* (no caso, “não é o caso que ..."); caso o operador requeira dos argumentos, temos um operador *diádico* (como em “se..., então...”).

Note-se, ainda, que os operadores acima citados fornecem o valor-verdade de uma proposição utilizando-se somente o valor-verdade do argumento. Por exemplo, caso se saiba o valor-verdade de “Brutus matou César”, o operador “não é o caso que ...” fornece o valor-verdade de “não é o caso que Brutus matou César”. Tal característica deve-se ao fato de que “não é o caso que ...” é um operador *vero-funcional.* Nem todo operador, entretanto, é vero-funcional. Tomemos a proposição “Cássio sabe que Brutus matou César”. Mesmo se for dado o valor-verdade da proposição “Brutus matou César”, nunca tomaremos conhecimento se “Cássio sabe que Brutus matou César” é verdadeiro ou falso.

Os símbolos $\neg$ e $\rightarrow$ são interpretados, respectivamente, por “não é o caso que...” e “se..., então...”. Em geral, nós referiremos a esses operadores como “não” e “implica”. Enquanto $\neg$ é tido como *sinal de negação*, $\neg p_1$ é a *negação* de p_1. Ao se tomar 1 e 0 como os valores-verdades verdadeiro e falso, respectivamente, podemos contruir uma matriz binária do operador de negação:

	$\neg$
1	0
0	1

Na coluna da esquerda, temos os valores-verdades possíveis de uma proposição, enquanto a coluna da direita fornece os valores-verdades de negação de uma proposiçao. Já o operador $\rightarrow$, é chamado de *sinal de implicação (material)* e pode ser lido como *implica (materialmente)* ou simplesmente “se..., então...”. Apesar dessa interpretação dar conta de uma série de usos dessa expressão, nem todo o uso de “se..., então...” é material. Não será abordada, entretanto, essa questão mais precisamente, uma vez que o objetivo dessa subseção é meramente uma introdução ao Cálculo Proposicional. A matriz binária dos valores-verdades desse operador é:

$\rightarrow$	0	1
0	1	0
1	1	1

Os valores-verdade possíveis da primeira proposição de uma implicação é dado pela primeira coluna da matriz; já os da segunda proposição é dado pela primeira linha. Os valores-verdade das implicações é dado lendo-se a matriz de cima para baixo e da direita para esquerda.

Como já foi dito, os operadores $\neg$ e $\rightarrow$ acima descritos são primitivos, pois os demais operadores podem ser definidos a partir deles. No **CP**, há outros três operadores: $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$, definidos como:

Def$_\vee$: $(\alpha \vee \beta) \equiv_{df} \neg\alpha \rightarrow \beta$.
Def$_\wedge$: $(\alpha \wedge \beta) \equiv_{df} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$
Def$_\leftrightarrow$: $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv_{df} \neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha))$ [1]

Nessas definições, α e β são quaisquer fbf do **CP**. O sinal $\equiv_{df}$ significa "é definido por". Essas definições nos permitem escrever quaisquer fbf's com símbolos primitivos (ou seja, $\neg$ e $\rightarrow$).

Assim como foi feito para os operadores primários, por meio da intepretação de $\vee$, tem-se os valores-verdades de $p_1 \vee p_2$. Pode-se, ainda, calcular o valor-verdade da expressão equivalente, $\neg p_1 \rightarrow p_2$. Tanto com $p_1 \vee p_2$ ou $\neg p_1 \rightarrow p_2$, observar-se-á que p_1 e p_2 serão verdadeiras somente se ao menos uma das duas forem verdadeiras. A matriz binária do operador é:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

De acordo com essa interpretação, o sinal $\vee$ é interpretado por *sinal de disjunção*, que pode ser lido por "...ou...". Já a matriz binária do operador $\wedge$ segue-se a seguir:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

O sinal $\wedge$ é interpretado por *sinal de conjunção*, ou ainda, "...e...". Além disso, $p_1 \wedge p_2$ é tido por *conjunção* de p_1 e p_2. A seguir, temos a matriz binária do operador $\leftrightarrow$:

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Podemos verificar que uma proposição com o símbolo $\leftrightarrow$ é verdadeira quando os argumentos possuem o mesmo valor-verdade e é falsa quando possuem valor-verdade diferente. O nome do sinal $\leftrightarrow$ é *sinal de equivalência (material)* e pode ser interpretado por "...é materialmente equivalente a..." ou "...se e somente

[1] O uso dos operadores $\rightarrow$ e $\neg$ como primários nessa introdução foi meramente arbitrário, uma vez que é possível expor com $\vee$ e $\neg$ como em [Creswell and Hughes, 1996] ou [Carnielli and Coniglio, 2006]. Os operadores aqui tidos como primários são usados, em geral, para apresentar os três axiomas básicos do **CP**, como veremos adiante.

se ...". Assim como os primeiros operadores, esses três novos operadores também são vero-funcionais.

Se tomarmos as variáveis $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$ como variáveis cujos valores são proposicões, podemos dizer que uma fbf do **CP** se torna uma proposição quando todas as variáveis são substituidas por proposições. Uma proposição é *válida* se e somente se o resultado de toda substituição é uma proposição verdadeira. Se, entretanto, considerarmos 1 e 0 como valores-verdades de uma variável, podemos dizer que uma fbf é válida quando sempre possui o valor 1, independente dos valores-verdades de suas variáveis. As fbf's válidas no **CP** também são denominadas *tautologias* ou ainda ***CP**-tautologias.* Exemplos de fbf válidas ou tautologias são: $p_1 \vee \neg p_1$, $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_1$, etc.

Uma fbf é *insatisfatível* se, e somente se, - sse - possui sempre o valor 0, independentemente dos valores-verdades de suas variáveis. Outra denominação para essas fórmulas é *contradição.* Um exemplo simples de uma fbf insatisfatível é $p_1 \wedge \neg p_1$.[2] A maior parte das fbf's não são nem válidas nem insatisfatíveis e são, em geral, denominadas *contingentes.*

Todo sistema lógico é formado por axiomas e regras de inferência. Um exemplo de sistema lógico é o próprio Cálculo Proposicional Clássico, cujas interpretação e regras de inferência já foram aqui apresentadas.

Ainda que não formulada, usou-se, até aqui, uma regra de inferência do **CP**. No momento em que foi dito que α e β são meta-variáveis que podem ser substituídas por variáveis, aplicou-se a *Regra de Substituição Uniforme* (**(US)**). Sua formulação é a seguinte:

(US) (*Regra de Substituição Uniforme*): se substituirmos uniformemente qualquer variável ou variáveis $p_1 \dots p_n$ num teorema por qualquer fbf $\beta_1 \dots \beta_n$, ainda teremos um teorema.

Outra regra de inferência do **CP** é *Regra de Modus Ponens* (**(MP)**). Essa regra pode ser formulada da seguinte maneira:

(MP) (*Regra de Modus Ponens*): Se α é teorema e $\alpha \rightarrow \beta$ é teorema, então β também é teorema.

Essas duas regras, entretanto, podem ser escritas em linguagem formal. Usando-se o símbolo $\vdash$ para implicação sintática, temos:

(US): $\alpha \vdash \alpha[\beta_1/p_1 \dots \beta_n/p_n]$
(MP): $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$

Um axioma é uma fbf válida. Além disso, os axiomas são formulas pelas quais são derivadas todos as outras fbf válidas. Os três axiomas do **CP** são:

(Ax$_1$): $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

[2]No Cálculo Proposional e nas lógicas baseadas na lógica clássica, toda fbf insatisfatível é contraditória. Isso porque **CP** é uma lógica consistente Na seção 3, veremos que nas **LFI**s fórmulas inconsistente não são nessessariamente falsas

(Ax$_2$): $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
(Ax$_3$): $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$ [3]

O primeiro axioma **(Ax$_1$)** é , no Cálculo Proposional, denominado de *Lei de Afirmação do Consequente*. O segundo axioma, por sua vez, denomina-se *lei de distribuição da implicação (material)*. E o terceiro axima é denominado *Lei da Dupla Negação*.

Segue-se, abaixo, uma lista de fbf válidas no CP que serão usadas nesse trabalho. A refêrencia a essas fbf's valídas será feita ora pelo seu número, ora pelo seu nome, completo ou abreviado.

PC$_1$ $p_1 \leftrightarrow \neg\neg p_1$ [Lei da Equivalência da Dupla Negação - DN]
PC$_2$ $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$ [Lei de Tansposição - Transp.]
PC$_3$ $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$ [Lei de Silogismo - Sil.]
PC$_4$ $(p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1))$
PC$_5$ $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow \neg(p_1 \wedge \neg p_2)$
PC$_6$ $((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3)) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$

Esta subseção é um exemplo simples de como deve ser construído qualquer sistema lógico, com suas regras de formação (no caso **RF$_1$** - **RF$_3$**), definições (Def$_\vee$, Def$_\wedge$ e Def$_\leftrightarrow$), regras de inferência (**(US)** e **(MP)**) e axiomas (**(Ax$_1$)** - **(Ax$_3$)**). Mostramos também como as variáveis e símbolos são interpretados, que equivale à parte semântica de uma sistema lógico.

Como já dissemos anteriormente, as lógicas modais aqui trabalhadas (lógicas modais proposicionais) são extensões do **CP**. Por isso, usaremos grande parte das regras de inferências, axiomas e fbf's válidas para demonstrar teoremas modais ou mesmo contruir os paradoxos. A próxima subseção tratará justamente das Lógica Modais Proposicionais.

[3] Assim como os símbolos primitivos, a axiomática aqui apresentada também é arbitrária. Uma das axiomáticas possíveis é a apresentada em [Carnielli and Coniglio, 2006], em que, além de **(US)**, apresenta-se um único axioma e quatro regras de inferência.

2 Lógicas Modais

A noção de modalidade tem presença ubíqua em Filosofia. Por exemplo, o conceito de necessidade muitas vezes esteve estritamente ligado a idéia de que independente das diposições das coisas no mundo, algo será necessariamente desse modo e não de outro. O primeiro a formular essa idéia em termos lógicos foi o fílosofo alemão Gottgried W. Leibniz (1646-1716). Para Leibniz, algo é necessário quando é verdadeiro em todos os mundos possíveis, enquanto algo é possível quando é verdadeiro em ao menos um do mundos possíveis.

Da idéia de Leibniz, o lógico C. I. Lewis formulou o primeiro sistema lógico formal, denominado **S5**. Em **S5**, temos que uma proposição p é necessária, se e somente se, em todo os mundos possíveis, p é verdadeiro. Do mesmo modo p é possível, se e somente se, em algum dos mundos possíveis, p é verdadeiro. Ora, essa formulação era extremamente exigente e, quando esses conceitos eram usados em sentido mais amplo, deduzia inferências indesejáveis. Assim, o lógico Saul Kripke adicionou em **S5** a cláusura "desde que os mundos estejam relacionados", referindo-se aos operadores modais de necessidade e possibilidade. Essa pequena alteração modificou drasticamente a semântica exigida na formulação da maioria dos sistemas modais. (Cf. [Chellas, 1980])

Nessa subseção, trataremos primeiramente da semântica de Kripke, que não só é um acréscimo à semântica de **S5**, como serve de fundamento a maioria dos sistemas modais, inclusive **S5**. Trataremos, a seguir, de alguns sistemas conhecidos, como **K**, **KT**, **D**, **S4** e **S5**. Os textos aqui utilizados são [Chellas, 1980], [Creswell and Hughes, 1996], [Garson, 2004] e [(vários), 2005].

Podemos, então, construir precisamente a linguagem que utilizaremos para todos as lógicas modais proposicionais aqui tratadas. Os símbolos, regras de formação e definições são as seguintes:

Símbolos Primitivos

- um conjunto infinito de letras: $p_1, p_2, \dots p_n \quad (n \in \mathbb{N})$
- os operadores monádicos: $\neg$, $\Box$
- o operador diádico: $\rightarrow$
- as constantes: $\bot$ (falsidade) e $\top$ (verdade)
- os parênteses: (e).

Regras de Formação

RF$_1$: Uma letra sozinha é uma fbf.
RF$_2$': Se α é uma fbf, então $\neg\alpha$ e $\Box\alpha$ também são fbf's.
RF$_3$': Se α é uma fbf e β é uma fbf, então $(\alpha \rightarrow \beta)$ também é uma fbf.

Definições

Def$_\vee$: $(\alpha \vee \beta) \equiv_{df} \neg\alpha \rightarrow \beta$.
Def$_\wedge$: $(\alpha \wedge \beta) \equiv_{df} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$
Def$_\leftrightarrow$: $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv_{df} \neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha))$
Def$_\Diamond$: $\Diamond\alpha \equiv_{df} \neg\Box\neg\alpha$

Uma formulação possível da semântica de Kripke é imaginar um modelo $\mathcal{M}$ em que há, primeiramente, um conjunto infinito W de mundos possíveis:

$$\omega', \omega'', \omega''', \ldots$$

Uma sequência infinita de conjunto de mundos possíveis, na forma:

$$\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \ldots$$

A idéia do modelo é que, para cada número natural n, o conjunto $\mathbb{P}_n$ delimita justamente os mundos possíveis em que a proposição p_n é verdadeira. Assim, uma proposição p_1 é verdadeira num mundo ω^n se e somente se $\omega^n \in \mathbb{P}_1$.

Acrescentemos, em seguida, a relação binária R em W, do seguinte modo:

$$\omega' R \omega'', \omega'' R \omega''', \ldots$$

A expressão $\omega' R \omega''$ significa que o mundo ω' está relacionado com o mundo ω'', ou ainda ω' é acessível a ω'' A partir desses elementos, podemos chegar a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1 Um modelo de Kripke é uma estrutura da forma $\mathcal{M} = \langle W, R, \mathbb{P} \rangle$, em que:

1. W é um conjunto
2. R é uma relação binária em R (i.e. R $\subseteq W \times W$)
3. $\mathbb{P}$ é um indicador dos números naturais aos subconjuntos de W (i. e., $\mathbb{P}_n \subseteq W$, para cada número natural n)

Para dizermos que, no modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, \mathbb{P} \rangle$, a proposição p_1 é válida semanticamente no mundo ω', usaremos a seguinte formulação:

$$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} p_1$$

As condições de verdade da Semântica de Kripke são as enumeradas abaixo:[4]

[4] Os símbolos $\forall$ e $\exists$ são correntes em linguagem formal ou mesmo na matemática e significam, respectivamente, "para todo" e "existe". Além disso, são operadores nas lógicas de primeira ordem. Uma vez que essas lógicas não são objetos de nossa pesquisa, esses operadores não serão aqui definidos, mas tratados apenas informalmente. As partículas $\top$ e $\bot$ (top e bottom) serão definidas na seção 3

(i)	$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} p_n$ sse $\omega' \in \mathbb{P}_n$ para $(n \in \mathbb{N})$
(ii)	$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \top$.
(iii)	Não $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \bot$.
(iv)	$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \neg\alpha$ sse não $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha$.
(v)	$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha \wedge \beta$ sse $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha$ e $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \beta$.
(vi)	$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha \vee \beta$ sse $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha$ ou $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \beta$.
(vii)	$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha \rightarrow \beta$ sse se $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha$, então $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \beta$.
(viii)	$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha \leftrightarrow \beta$ sse $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha$ se e somente se $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \beta$.
(ix)	$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box\alpha$ sse $\forall\omega''(\omega' R \omega''$ implica $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \alpha)$.
(x)	$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Diamond\alpha$ sse $\exists\omega''(\omega' R \omega''$ e $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \alpha)$.

A fórmula (i) reflete as considerações anteriores sobre o conjunto $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3 \ldots$ num modelo: uma proposição p_n é verdadeira no mundo ω' sse ω' é um elemento do conjunto $\mathbb{P}_n$. As cláusulas (ii) - (viii) referem a semântica do Cálculo Proposional, conforme descrita na subseção anterior. Já a cláusula (ix) diz que num mundo ω' a fbf α é verdadeira sse para todo ω'', se ω' está relacionado a ω'', então α é verdadeiro em ω''. De maneira semelhante, a cláusula (x) diz que num mundo ω' a fbf α é verdadeira sse existe um mundo ω'' em que ω' está relacionado a ω'' e α é verdadeiro em ω''.

2.1 Os sistemas K e KT

Uma vez conhecida a Semântica de Kripke, podemos expor alguns sistemas modais proposicionais. O mais simples deles é o Sistema **K**.[5] Nele, temos as duas Regras de Inferência **(US)** e **(MP)P)**, mais uma terceira regra que pode ser descrita como:

N *(Regra de Necessitação)*: se α é teorema, então $\Box\alpha$ também é um teorema.

A Regra de Inferência **N** diz que, caso α seja um teorema, ou seja, caso α seja sempre verdadeiro, α será necessariamente sempre verdadeiro. Assim, as Regras de Inferências do Sistema K são:

(US): $\alpha \vdash \alpha[\beta_1/p_1 \ldots \beta_n/p_n]$
(MP): $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$
N: $\alpha \vdash \Box\alpha$

Como já dissemos anteriormente, as lógicas modais clássicas são extensão do Cálculo Proposicional. Isso significa que todas as fbf válidas no **CP** são axiomas ou teoremas em qualquer lógica modal clássica, em particular no Sistema **K**. A formulação dessa Regra é a expressa abaixo:

(TAUT): se α é uma fbf válida no **CP**, então α é um axioma.

[5] Em homenagem ao lógico americano Saul Kripke (1940 -)

O Sistema **K** também possui um único axioma acrescido em CP, a saber, o axioma **(K)**. Esse axioma diz respeito a propriedade distributiva do operador de necessidade e é o axioma mínimo que se exige em qualquer sistema modal baseado na Semântica de Kripke. Sua formulação é a seguinte:

(K): $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

Do axioma acima, podemos afirmar:

TEOREMA 1 O axioma **(K)** é válido em qualquer modelo $\mathcal{M}$ da Semântica de Kripke

Prova. Suponhamos que para um modelo $\mathcal{M}$ qualquer, $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1 \to p_2$ para todo ω'', desde que $\omega' R \omega''$, ou seja, pela condição (ix), $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box(p_1 \to p_2)$. Suponhamos ainda que $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$ para todo ω'', que, novamente pela condição (ix), nos garante $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$. Ora, como temos $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$ e $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1 \to p_2$, concluímos, por *Modus Ponens*, $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_2$, lembramos que tomamos para todo ω'', desde que $\omega' R \omega''$, que, por (ix), nos força $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \Box p_2$. Assim, se temos $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box(p_1 \to p_2)$ e se temos também $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$, então forçosamente temos $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_2$. Em termos formais, pela condição (vii), podemos afirmar que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box(p_1 \to p_2) \to (\Box p_1 \to \Box p_2)$ para qualquer modelo $\mathcal{M}$.

Antes de estudarmos os demais sistemas modais, devemos nos atentar a um teorema importante em **K**, que usaremos nas demais provas dessa seção. Para tanto, vamos usar o método de prova sintática: a partir dos axiomas e Regras de Inferência de **K**, deduziremos o teorema **($\mathbf{K}_1$)**. Isso é possível porque o Sistema **K** é um sistema correto e completo, ou seja, qualquer fórmula é teorema em **K** se e somente se for válida semanticamente. [6]

Usaremos freqüentemente nas demonstrações uma regra crucial em **CP**, que denominaremos *Substituição de Equivalentes*, ou simplesmente *Eq.* A regra é simples: se, em algum passo da demonstração, tivermos $\alpha \leftrightarrow \beta$, podemos substituir α por β a qualquer momento, pois α e β são logicamente equivalentes.

Na prova sintática a seguir, os números entre colchetes são as etapas da prova, enquanto as informações entre parênteses mostram quais foras as etapas, axiomas ou regras usados para chegar ao teorema. A prova é a seguinte:

[1]	$p_1 \leftrightarrow \neg\neg p_1$	(DN)
[2]	$\Box p_1 \leftrightarrow \neg\neg\Box p_1$	([1] [$\Box p_1/p_1$])
[3]	$\Box\neg p_1 \leftrightarrow \neg\neg\Box\neg p_1$	([2] [$\neg p_1/p_1$])
[4]	$\Box\neg p_1 \leftrightarrow \neg\Diamond p_1$	([3], Def$_\Diamond$, Eq.)

Assim, vale o seguinte teorema em **K**:

[6]Existe inúmeras demonstrações da corretude e completude de **K** (vide [Creswell and Hughes, 1996]). Uma vez, entretanto, que o objetivo desse texto é uma introdução às lógicas modais, não nos extenderemos demonstrando a completude de todos os sistemas aqui apresentados, para alcançarmos mais rapidamente o cerne de nossa questão, a saber, os paradoxos modais.

($\mathbf{K}_1$): $\Box\neg p_1 \leftrightarrow \neg\Diamond p_1$

É digno de nota que nesse sistema se p_1 for necessário, não implica que p_1 será verdadeiro, ou seja: $\nvdash_{\mathbf{K}} \Box p_1 \rightarrow p_1$. A expressão, entretanto, parece razoável se tomarmos a idéia de necessidade epistemológica, como afirmar que todo corpo terrestre cai, necessariamente, a uma aceleração constante, que é a gravitacional. Podemos provar que no Sistema **K**, $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box p_1 \rightarrow p_1$ (lembrando que, como **K** é correto e completo, ou seja, $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ sse $\vDash_{\mathbf{K}} \alpha$). Para tanto, é necessário mostrarmos um modelo que, por (vii), $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$ mas $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} p_1$. Tomemos, por exemplo, o seguinte modelo:

$\mathcal{M} = \langle W, R, \mathbb{P} \rangle$
$W = \{\omega', \omega''\}$
$R = \{(\omega', \omega'')\}$
$\mathbb{P}_1 = \{\omega''\}$

Temos, em $\mathcal{M}$ que $\omega' \notin \mathbb{P}_1$. Aplicando (i), temos $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} p_1$. Já por (ix), temos que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$ se e somente se $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$ para todo ω'', desde que $\omega' R \omega''$. Mas em $\mathcal{M}$ é o caso que $\omega' R \omega''$, uma vez que $(\omega', \omega'') \in R$. Além disso, como $\omega'' \in \mathbb{P}_1$ temos, por (i), que $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$. Isso significa que em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$. Ora, como havíamos mostrado que $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} p_1$, aplicando (vii), temos que $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box p_1 \rightarrow p_1$, no modelo $\mathcal{M}$ acima determinado. Isso significa que $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box p_1 \rightarrow p_1$ não é um teorema no Sistema **K**. Caso o queiramos como teorema, devemos acrescentá-lo em **K** como axioma. Esse axioma é, em geral, denominado axioma **(T)** (alguns denominam axioma **(M)**):

(T): $\Box\alpha \rightarrow \alpha$

Acrescentando-se **(T)** no Sistema **K**, temos, por fim, o Sistema **KT** (para alguns, simplesmente Sistema **T**). Uma caracteristíca importante do Sistema **KT** é que R é uma relação reflexiva para todo $\mathcal{M}$. Tomemos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2 Num modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, P \rangle$, a relação R é reflexiva sse para todo ω' em $\mathcal{M}$, $\omega' R \omega'$.

A definição acima e o axioma **(T)** nos força concluir o seguinte teorema:

TEOREMA 2 Todo modelo $\mathcal{M}$ pertencente a **KT**, R é uma relação reflexiva

Prova. Suponhamos um modelo $\mathcal{M}$ em que R é reflexivo e que $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$ para todo $\omega' R \omega''$, que, por (ix), nos garante $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$. Mas como R é reflexiva, sabemos que $\omega' R \omega'$ e, em particular, $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} p_1$. Assim, temos que se $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$, então $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} p_1$ que, pela condição (vii), é o mesmo que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1 \rightarrow p_1$.

Vimos que o axioma **(T)** não é válido no Sistema **K**, embora **(K)** seja axioma em **KT**, o que nos faz inferir que **KT** é uma *extensão própria*[7] de **K**. Veremos,

[7]Conferir a seção das **LFI**'s, em que as noções de *extensão*, *extensão própria* e demais noções metalógicas serão abordadas.

na subseção a seguir, dois importantes sistemas, **S4** e **S5**, que, por sua vez, são extensões próprias de **KT**.

2.2 Os sistemas S4 e S5

Um grande problema surge entre o operado $\Box$ e o uso da expressão "é necessário" na linguagem natural quando nos deparamos com múltiplas modalidades. Não usamos em linguagem natural, por exemplo, a expressão "é necessário necessário", a não ser que queiramos mostrar o caráter enfático de "necessário". Em lógica modal, por sua vez, é comum o uso de fbfs do tipo $\Box\Box p_1$. Alguns lógicos, portanto, tentando aproximar a linguagem natural das lógicas modais, acrescentam em **KT** o seguinte axioma:

4: $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

O axioma **(4)** acrescentado em **KT** nos dá o sistema denominado **S4**. Para provarmos que **(4)** não é teorema em **KT**, devemos encontrar um modelo em **KT** que $\mathcal{M} \nvDash_{w'} \Box p_1 \rightarrow \Box\Box p_1$. Para isso, nesse modelo, por (vii), devemos ter $\mathcal{M} \vDash_{w'} \Box p_1$ mas $\mathcal{M} \nvDash_{w'} \Box\Box p_1$. Ainda, por (ix), temos que $\mathcal{M} \vDash_{w''} p_1$ para todo ω'', desde que $\omega' R \omega''$. Também temos que $\mathcal{M} \nvDash_{w'} \Box\Box p_1$, por (ix), se e somente se $\mathcal{M} \nvDash_{w''} \Box p_1$ para algum ω'', desde que $\omega' R \omega''$. Aplicando-se mais uma vez (ix), temos que $\mathcal{M} \nvDash_{w'''} p_1$ para algum ω''', desde que $\omega'' R \omega'''$. Tomemos, portanto, o seguinte modelo $\mathcal{M}$:

$\mathcal{M} = \langle W, R, \mathbb{P} \rangle$
$W = \{\omega', \omega'', \omega'''\}$
$R = \{(\omega', \omega'), (\omega'', \omega''), (\omega''', \omega'''), (\omega', \omega''), (\omega'', \omega''')\}$
$\mathbb{P}_1 = \{\omega', \omega''\}$

Sabemos que uma relação R é reflexiva se e somente se, para todo ω' em $\mathcal{M}$, $\omega' R \omega'$. No modelo $\mathcal{M}$, temos que ω', ω'' e $\omega''' \in W$ e, ao mesmo tempo, $\omega' R \omega'$, $\omega'' R \omega''$ e $\omega''' R \omega'''$. Isso significa que R é reflexiva. Como já demonstramos anteriormente, todo modelo $\mathcal{M}$ em que R é reflexivo, é um modelo de **KT**. Além disso, como $\omega' \in \mathbb{P}_1$, temos, por (i), que $\mathcal{M} \vDash_{w'} p_1$. Da mesma maneira, como $\omega'' \in \mathbb{P}_1$, temos $\mathcal{M} \vDash_{w''} p_1$. Como $\omega' R \omega'$, $\omega' R \omega''$, mas $\omega' \not R \omega'''$, temos que para todo ω'', $\mathcal{M} \vDash_{w''} p_1$, desde que $\omega' R \omega''$ e, por (ix), podemos afirmar que $\mathcal{M} \vDash_{w'} \Box p_1$. Entretanto, como $\omega''' \notin \mathbb{P}_1$, temos, por (i), que $\mathcal{M} \nvDash_{w'''} p_1$. Ora, mas $\omega'' R \omega'''$, o que significa que existe um ω''' que $\omega'' R \omega'''$, mas $\mathcal{M} \nvDash_{w'''} p_1$, ou seja, aplicando (ix), temos $\mathcal{M} \nvDash_{w''} \Box p_1$. Isso também significa que existe um ω'' que $\omega' R \omega''$ mas $\mathcal{M} \nvDash_{w''} \Box p_1$, ou seja, por (ix), temos que $\mathcal{M} \nvDash_{w'} \Box\Box p_1$. Para finalizar, como no modelo $\mathcal{M}$ acima, $\mathcal{M} \vDash_{w'} \Box p_1$ mas $\mathcal{M} \nvDash_{w'} \Box\Box p_1$, temos, por (vii), $\mathcal{M} \nvDash_{w'} \Box p_1 \rightarrow \Box\Box p_1$. Dado que $\mathcal{M}$ é um modelo de **KT**, concluímos que o axioma **(4)** não é teorema em **KT**.

Ora, se o axioma **(4)** não é teorema em **KT**, também não pode ser no Sistema **K**, já que **S4** estende **KT** que, por sua vez, estende **K**.

Agora tomemos a seguinte definição de relação R transitiva em $\mathcal{M}$:

DEFINIÇÃO 3 Num modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, P\rangle$, a relação R é transitiva sse para todo ω', ω'' e ω''' em $\mathcal{M}$, se $\omega' R \omega''$ e $\omega'' R \omega'''$, então $\omega' R \omega'''$.

A definição acima implica o teorema:

TEOREMA 3 O axioma **(4)** é teorema em $\mathcal{M}$ sse a relação R é transitiva.

Prova. Suponhamos um modelo $\mathcal{M}$ em que R é transitivo mas não vale **4**, ou seja, $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box p_1 \rightarrow \Box\Box p_1$. Dessa forma, temos, por (vii), que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$ mas $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box\Box p_1$. Por (ix), por sua vez, temos que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$ sse para todo ω'', $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$, desde que $\omega' R \omega''$. Entretanto, por (ix) novamente, $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box\Box p_1$ sse não é o caso que para todo ω'', $\mathcal{M} \nvDash_{\omega''} \Box p_1$, desde que $\omega' R \omega''$. Do mesmo modo, ainda por (ix), $\mathcal{M} \nvDash_{\omega''} \Box p_1$ sse não é o caso que para todo ω''', $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'''} p_1$, desde que $\omega' R \omega''$. Não devemos esquecer, entretanto, que R é transitiva e, portanto, $\omega' R \omega'''$. Assim, como já havíamos afirmado que para todo ω'', $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$, desde que $\omega' R \omega''$, temos, em particular para ω''', $\mathcal{M} \vDash_{\omega'''} p_1$, o que contradiz o que havíamos afirmado. Dessa forma, provamos por absurdo que num modelo $\mathcal{M}$ vale o axioma **(4)** sse R é uma relação transitiva em $\mathcal{M}$.

Uma importante propriedade em **S4** é que os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ podem ser simplificados. Isso significa que podemos acrescentar ou diminuir infinitamente o operador $\Box$, por exemplo, de modo que:

$$\Box\Box \ldots \Box\alpha \equiv \Box\alpha$$

Para provarmos essa regra, basta garantirmos que $\Box p_1 \leftrightarrow \Box\Box p_1$ é teorema em **S4**. A prova sintática é extremante simples e segue-se abaixo:

[1]	$\Box p_1 \rightarrow \Box\Box p_1$	((**4**))
[2]	$\Box p_1 \rightarrow p_1$	((**T**))
[3]	$\Box\Box p_1 \rightarrow \Box p_1$	([2][$\Box p_1/p_1$])
[4]	$\Box p_1 \leftrightarrow \Box\Box p_1$	([1], [3], $\mathbf{PC}_4$)

Denominaremos o teorema acima demonstrado como $(\mathbf{4}_1)$, pois ele será necessário nas provas seguintes. Assim, temos:

$(\mathbf{4}_1)$: $\Box p_1 \leftrightarrow \Box\Box p_1$

De forma semelhante, podemos provar que a mesma regra é válida para o operador $\Diamond$. Para tanto, é preciso demonstrarmos que $\Diamond p_1 \leftrightarrow \Diamond\Diamond p_2$ é teorema em **S4**. A prova, entretanto, é um pouco mais extensa e, uma vez que essa é apenas uma introdução aos principais sistemas modais, não nos delonguemos com demonstrações extensas, que, por sua vez, podem ser em grande parte encontradas em [Creswell and Hughes, 1996]. Desse modo, admitamos, por hora, o seguinte teorema em **S4**:

$(\mathbf{4}_2)$: $\Diamond p_1 \leftrightarrow \Diamond\Diamond p_1$

O teorema $(\mathbf{4}_2)$ mais a regra **(US)** nos garante a regra abaixo:

$$\Diamond\Diamond\ldots\Diamond\alpha \equiv \Diamond\alpha$$

Se em **S4** expressões como "é necessário necessário" pode ser resumida por "é necessário", em **S5** múltiplas modalidades simplesmente desaparecem, como veremos a seguir. O sistema **S5** é formado acrescentando-se o axioma **(5)** no sistema **KT**, descrito abaixo:

(5): $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$

Dissemos anteriormente, que **S5** é uma extensão própria do Sistema **KT**. Podemos ir além, e afirmar que **S5** é uma extensão própria de **S4**. Como é possível se **(4)** não é axioma em **S5**? Isso porque **(4)** é teorema em **S5**, embora **5** não o seja em **S4**.

Para demonstrarmos que **(5)** não vale em **S4**, é preciso encontrar um modelo $\mathcal{M}$ em **S4** de modo que $\mathcal{M}_{\omega'} \not\models \Diamond p_1 \rightarrow \Box\Diamond p_1$. De acordo com (vii), portanto, temos que $\mathcal{M}_{\omega'} \models \Diamond p_1$ mas $\mathcal{M}_{\omega'} \not\models \Box\Diamond p_1$. Ora, $\mathcal{M}_{\omega'} \models \Diamond p_1$ por (x) sse $\mathcal{M}_{\omega'} \models p_1$ para algum ω'', desde que $\omega' R \omega''$. Também $\mathcal{M}_{\omega'} \not\models \Box\Diamond p_1$ sse, por (ix), existe um ω'' em que $\mathcal{M}_{\omega''} \not\models \Diamond p_1$ e $\omega' R \omega''$. Por sua vez, $\mathcal{M}_{\omega''} \not\models \Diamond p_1$ sse, por (x), para todo ω''', $\mathcal{M}_{\omega'''} \not\models p_1$, desde que $\omega'' R \omega'''$. Assim, tomemos o seguinte modelo:

$\mathcal{M} = \langle W, R, \mathbb{P} \rangle$
$W = \{\omega', \omega'', \omega'''\}$
$R = \{(\omega', \omega'), (\omega'', \omega''), (\omega''', \omega'''), (\omega', \omega''), (\omega'', \omega'''), (\omega', \omega''')\}$
$\mathbb{P}_1 = \{\omega'\}$

Ora, como (ω', ω''), (ω'', ω''') e $(\omega', \omega''') \in R$, então $\omega' R \omega''$, $\omega'' R \omega'''$ e $\omega' R \omega'''$ e, pela Definição 3, R é transitivo. Mas o Teorema 3 afirma que uma relação R é transitiva sse em $\mathcal{M}$ vale o axioma **(4)**. De forma semelhante, como (ω', ω'), (ω'', ω'') e $(\omega''', \omega''') \in R$, temos $\omega' R \omega'$, $\omega'' R \omega''$ e $\omega''' R \omega'''$, pela Definição 2, R é uma relação reflexiva e, pelo Teorema 2, vale o axioma **(T)**.

Já sabemos que se num modelo $\mathcal{M}$ valem o axioma **(T)** e o axioma **(4)**, então $\mathcal{M}$ é um modelo em **S4**. Temos, também em $\mathcal{M}$, que $\omega' \in \mathbb{P}_1$ e, portanto, por (i), $\mathcal{M} \models_{\omega'} p_1$. Ora, como $\omega' R \omega'$, temos que $\mathcal{M} \models_{\omega'} p_1$ para algum ω'' em que $\omega' R \omega''$ e, por (x), $\mathcal{M} \models_{\omega'} \Diamond p_1$. Mas $\omega''' \notin \mathbb{P}_1$ e, por (i), $\mathcal{M} \not\models_{\omega'''} p_1$. Também $\omega'' \notin \mathbb{P}_1$ e, novamente por (i), $\mathcal{M} \not\models_{\omega''} p_1$. Como $\omega'' R \omega''$, $\omega'' R \omega'''$ mas $\omega'' \not R \omega'$, então não existe um ω''' em que $\mathcal{M} \models_{\omega'''} p_1$ e $\omega'' R \omega'''$ ou seja, por (x), $\mathcal{M} \not\models_{\omega''} \Diamond p_1$. Como, por sua vez, $\omega' R \omega''$, temos que não é o caso que para todo ω'' $\mathcal{M} \models_{\omega''} \Diamond p_1$ e, por (ix), concluímos que $\mathcal{M} \not\models_{\omega'} \Box\Diamond p_1$. Como háviamos considerado que $\mathcal{M} \models_{\omega'} \Diamond p_1$, temos, por (vii), que $\mathcal{M}_{\omega'} \not\models \Diamond p_1 \rightarrow \Box\Diamond p_1$. Isso significa que no modelo $\mathcal{M}$ acima valem o axioma **(4)**, **(T)** mas não vale **(5)**.

Mostraremos, a seguir, que **(4)** é teorema em **S5**. Para tanto, consideremos dois teoremas importantes em **S5**, para encurtar nossa demonstração sintática:

$(\mathbf{5}_1)$: $\Diamond p_1 \leftrightarrow \Box\Diamond p_1$

$(\mathbf{5_2})$: $\Box p_1 \leftrightarrow \Diamond\Box p_1$

Eis a demonstração:

[1]	$\Box\neg p_1 \rightarrow \neg p_1$	$((\mathbf{T})[\neg p_1/\alpha])$
[2]	$p_1 \rightarrow \neg\Box\neg p_1$	([1], DN, Transp.)
[3]	$p_1 \rightarrow \Diamond p_1$	([2], Def$_\Diamond$, Eq.)
[4]	$\Box p_1 \rightarrow \Diamond\Box p_1$	$([3][\Box p_1/p_1])$
[5]	$\Diamond\Box p_1 \leftrightarrow \Box\Diamond\Box p_1$	$((\mathbf{5_1})[\Box p_1/p_1])$
[6]	$\Box p_1 \rightarrow \Box\Diamond\Box p_1$	([4], [5], Eq.)
[7]	$\Box p_1 \rightarrow \Box\Box p_1$	$((\mathbf{5_2})$, [6], Eq.)

Podemos agora provar que em **S5**, múltiplas modalidades desaparecem. Isso significa que podemos acrescentar ou diminuir qualquer operador modal em p_1 que teremos o valor verdade do último operador. Isso porque, como $(\mathbf{4})$ é teorema em **S5**, $(\mathbf{4_1})$ e $(\mathbf{4_2})$ também são, que, juntamente com $(\mathbf{5_1})$ e $(\mathbf{5_2})$, nos garante a regra abaixo:

$$\eta_1\eta_1\eta_3\ldots\eta_k\alpha \equiv \eta_k\alpha, \qquad \eta_i \in \{\Diamond, \Box\} \qquad 1 < i \leq k, \text{ para } i, k \in \mathbb{N}.$$

Assim como demonstramos que em $\mathcal{M}$ toda relação R é transitiva se e somente se em $\mathcal{M}$ vale o axioma $(\mathbf{4})$, é possível demonstrar que uma propriedade semelhante vale para o axioma $(\mathbf{5})$. Tomemos a seguinte definição de relação euclidiana:

DEFINIÇÃO 4 Num modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, P\rangle$, a relação R é euclidiana sse para todo ω', ω'' e ω''' em $\mathcal{M}$, se $\omega' R\omega''$ e $\omega' R\omega'''$, então $\omega'' R\omega'''$.

O que nos possibilita afirmar o seguinte teorema:

TEOREMA 4 Toda relação R em $\mathcal{M}$ é euclidiana se e somente se em $\mathcal{M}$ vale o axioma $(\mathbf{5})$

Prova. Suponhamos que R é euclidiana e $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Diamond p_1$, que, por (x), nos garante que para algum ω'', desde que $\omega' R\omega''$, $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$. Tomemos então um ω''' de modo que $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'''} p_1$ e $\omega' R\omega'''$. Como R é euclidiana, $\omega''' R\omega''$ e, como existe um ω'''' de modo que $\omega''' R\omega''''$ e $\mathcal{M} \vDash_{\omega''''} p_1$ (a saber, ω''), assim, por (x), $\mathcal{M} \vDash_{\omega'''} \Diamond p_1$. Ora, como R é euclidiana, também temos que $\omega'' R\omega'''$. Assim, $\omega'' R\omega'''$ e obviamente $\omega'' R\omega'''$, que, por R ser euclidiana, nos garante $\omega'' R\omega''$. Como $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$ e $\omega'' R\omega''$, existe um ω''' de modo que $\omega'' R\omega'''$ e $\mathcal{M} \vDash_{\omega'''} p_1$; por (x), $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \Diamond p_1$. Temos então que $\omega' R\omega''$, $\omega' R\omega'''$, $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \Diamond p_1$ e $\mathcal{M} \vDash_{\omega'''} \Diamond p_1$, ou seja, para todo ω'', desde que $\omega' R\omega''$, $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \Diamond p_1$ que, por (ix), é o mesmo que $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \Box\Diamond p_1$. Assim, se $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Diamond p_1$, então $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \Box\Diamond p_1$ e, por (vii), temos $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \Diamond p_1 \rightarrow \Box\Diamond p_1$

***

Notemos que em todos os sistemas que vimos então (**K**, **KT**, **S4** e **S4**) interpretamos o operador $\Box$ como necessidade epistmológica, como afirmar que todo corpo terrestre cai, necessariamente, à uma aceleração constante, que é a gravitacional. Por outro lado, podemos tomar necessário e possível no sentido moral. Esse é o caso quando utilizamos a idéia de dever expressa, por exemplo, na *Declaração Universal dos Direitos Humanos*, em que se diz que "todos os homens devem agir em relação uns aos outros com espírito de fraternidade". Tomemos agir fraternalmente como p_1. Consideremos, por exemplo, o Sistema **KT**. Dado que $\vdash_{\mathbf{KT}} \Box p_1 \rightarrow p_1$, de $\Box p_1$ inferiríamos p_1. Isso significa que todos os homens vivem, de fato, com espírito de fraternidade, o que é obviamente falso.

Esse duplo sentido da expressão "é necessário que" fez com que muitos lógicos defendessem a importância de separar a lógica modal em duas grandes famílias: as lógicas modais aléticas, que trata da necessidade epistemológica, e as lógicas modais deônticas, que trata da noção de dever. O sistema que veremos a seguir, O sistema **D** (de deôntico), também é conhecido como **SDL** - *Standard Deôntic Logic* (Lógica Deôntica Padrão) - deu origem a inúmeros sistemas deônticos, e também a uma grande quantidade de paradoxos.

2.3 O sistema D

Vimos que o axioma **(T)** não pode valer num sistema modal em que o operador de necessidade seja interpretado como obrigação, ou seja, necessidade moral. Nesse sistema, não seria desejável que toda obrigação moral fosse o caso, ou seja, $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box p_1 \rightarrow p_1$. Outro axioma, entretanto, seria bastante desejável, a saber, de que toda obrigação é possível de se realizar, ou seja:

$(\mathbf{D}_\Box)$: $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ [8]

O axioma $(\mathbf{D}_\Box)$ acrescentado ao Sistema **K** dá origem ao Sistema **D** (de Deôntico). Esse Sistema tornou possível a criação de inúmeros sistemas modais que tratam de lógicas modais "morais", conhecidas como lógicas deônticas.

Podemos provar que $(\mathbf{D}_\Box)$ é um acréscimo ao Sistema **K**, para isso basta encontrarmos um modelo $\mathcal{M}$ em que $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box p_1 \rightarrow \Diamond p_1$. Aplicando (vii), temos que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$, mas $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Diamond p_1$. Ora, por (ix), temos que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$ se e somente se para todo ω'', se $\omega' R \omega''$, então $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$. De modo semelhante, temos , por (x), que $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Diamond p_1$ se e somente se não é o caso que existe um ω'' em que $\omega' R \omega''$ e $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$. Desse modo, tomemos o seguinte modelo:

$\mathcal{M} = \langle W, R, \mathbb{P} \rangle$
$W = \{\omega'\}$
$R = \varnothing$
$\mathbb{P}_1 = \varnothing$

Como tomamos $R = \varnothing$, temos que $\omega' \not R \omega''$. Isso significa que é válido afirmar que para todo ω'', se $\omega' R \omega''$, então $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$ e, por (ix), concluímos

[8] O índice $\Box$ em $(\mathbf{D}_\Box)$ é para diferenciá-lo de sua versão em linguagem deôntica, como veremos logo a seguir

que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$. Entretanto, não é o caso que existe um ω' em que $\omega' R \omega''$ e, ao mesmo tempo, $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$, que, por (x), deduzimos $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Diamond p_1$. Aplicando (vii), temos que $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box p_1 \rightarrow \Diamond p_1$. Isso significa que o modelo $\mathcal{M}$ acima não satisfaz o axioma $(\mathbf{D}_\Box)$ e, portanto, $(\mathbf{D}_\Box)$ não é teorema no Sistema $\mathbf{K}$.

Embora $(\mathbf{D}_\Box)$ não seja teorema no Sistema $\mathbf{K}$, podemos provar que é teorema em $\mathbf{KT}$. Segue-se, abaixo, a prova sintática:

[1]	$\Box p_1 \rightarrow p_1$	$((\mathbf{T}))$
[2]	$\Box\neg p_1 \rightarrow \neg p_1$	$([1], [\neg p_1/p_1])$
[3]	$\neg\neg p_1 \rightarrow \neg\Box\neg p_1$	([2], Transp.)
[4]	$p_1 \rightarrow \neg\Box\neg p_1$	([3], DN)
[5]	$p_1 \rightarrow \Diamond p_1$	([4], $\mathbf{Def}_\Diamond$)
[6]	$\Box p_1 \rightarrow \Diamond p_1$	([1], [5], Sil.)

Como já dissemos, em todo modelo $\mathcal{M}$ pertencente a $\mathbf{KT}$, a relação R é reflexiva. De modo análogo, temos a Definição e o Teorema abaixos válidos no Sitema $\mathbf{D}$:

DEFINIÇÃO 5 Num modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, P \rangle$, a relação R é serial sse para todo ω' em $\mathcal{M}$, há um ω'' em que $\omega' R \omega''$.

TEOREMA 5 Em todo modelo $\mathcal{M}$ pertencente a $\mathbf{D}$, a relação R é serial.

Prova. Tomemos um modelo $\mathcal{M}$ serial em que não vale $(\mathbf{D}_\Box)$, ou seja, $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Box p_1 \rightarrow \Diamond p_1$. De acordo com (vii), temos que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$ mas $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Diamond p_1$. Ora, (ix) diz que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Box p_1$ se e somente se para todo ω'' $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} p_1$, desde que $\omega' R \omega''$. Mas R é uma relação serial, ou seja, $\omega' R \omega''$ e, portanto, $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} p_1$. Mas $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} \Diamond p_1$ sse, por (x), para todo ω'' $\mathcal{M} \nvDash_{\omega''} p_1$, desde que $\omega' R \omega''$, o que contradiz o que supusemos de início. Provamos, portanto, que em todo modelo $\mathcal{M}$, vale o axioma $(\mathbf{D}_\Box)$ se e somente se a relação R em $\mathcal{M}$ é serial.

***

Para não confundir-se com a idéia de necessidade epistêmica das lógicas aléticas, utiliza-se o símbolo $\bigcirc$ em vez de $\Box$. Assim, $\bigcirc p_1$ pode ser lido como "p_1 é obrigatório". [9]

Suponhamos, então, uma **SDL** em que utilize a seguinte notação:

- $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ são proposições ($n \in \mathbb{N}$);
- $w, w', w'', \ldots$ representam mundos possíveis;
- $\mathbb{P}_n$ é o conjunto dos mundos em que p_n é verdadeiro.
- $\bigcirc$ e $\mathcal{P}$ são os operadores deônticos "é obrigatório" e "é permitido"

[9] A exposição da lógica deôntica bem como os símbolos adotados estão baseados na obra [Chellas, 1980]. Em alguns momentos foram consultados [Prakken and Sergot, 1994], [Garson, 2004] e [McNamara, 2006].

Além disso, temos os modelos $\mathfrak{M} = \langle W, d, V\rangle$, em que W é o conjunto dos mundos possíveis; V é a função de valoração para cada sentença; e d é a relação de acessibilidade deôntica, em que $d(w)$ é interpretado como o conjunto dos mundos que são alternativas deônticas a w. A condição de verdade do operador $\bigcirc$ é:

$$\mathfrak{M} \vDash_w \bigcirc p_1 \text{ sse } d(w) \subseteq \mathbb{P}_1$$

Utilizaremos $\mathcal{P}$ como correlato deôntico de $\Diamond$. A definição de $\mathcal{P}$ é análoga aos conectivos aléticos, de modo que:

$\mathbf{Def}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}p_1 \equiv_{df} \neg \bigcirc \neg p_1$

Podemos, então, reescrever o axioma $(\mathbf{D}_\Box)$, que garante que se p_1 é obrigatório, então é possível:

(D): $\alpha \rightarrow \mathcal{P}\alpha$

Em termos semânticos, basta garantir que $d(w) \neq \emptyset$.

Tomemos, então, a definição de $\mathcal{P}$. Podemos, a partir de **(D)**, deduzir um teorema importante de **SDL**, que denominaremos $(\mathbf{D}^*)$. Eis a dedução:

[1]	$\bigcirc p_1 \rightarrow \mathcal{P}p_1$	(**(D)**)
[2]	$\bigcirc p_1 \rightarrow \neg \bigcirc \neg p_1$	([1] $\mathrm{Def}_{\mathcal{P}}$)
[3]	$\neg(\bigcirc p_1 \wedge \neg\neg \bigcirc \neg p_1)$	([2], $\mathbf{PC}_5$, Eq.)
[4]	$\neg(\bigcirc p_1 \wedge \bigcirc \neg p_1)$	([3], DN)

$(\mathbf{D}^*)$: $\neg(\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\neg\alpha)$

A importância de $(\mathbf{D}^*)$ é evitar os conflitos de obrigações, ou seja, fazer como que não seja o caso que uma mesma proposição p_1 seja obrigatória e ao mesmo tempo proibida. Veremos que a maioria dos paradoxos deônticos ferem esse axioma.

Pertence à **SDL** uma regra adicional, **(ROK)**,que garante que uma proposição é obrigatória se for conseqüência de uma série de obrigações. Em temos formais, temos:

$$\textbf{(ROK)} : \quad \frac{(p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow p_1}{(\bigcirc p_2 \wedge \bigcirc p_3 \wedge \ldots \wedge \bigcirc p_n) \rightarrow \bigcirc p_1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Observe que pelo fato de utilizar a lógica clássica como lógica subjacente às **SDL**'s, é válida, em particular, a sentença $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge p_1) \rightarrow p_2$, que é uma fbf análoga à regra de Modus Ponens. Desse modo, podemos a partir de **(ROK)** fazer a seguinte derivação:

[1]	$((p_1 \rightarrow p_2) \wedge p_1) \rightarrow p_2$	(**(MP)**)
[2]	$(\bigcirc(p_1 \rightarrow p_2) \wedge \bigcirc p_1) \rightarrow \bigcirc p_2$	([1], **(ROK)**)
[3]	$\bigcirc(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\bigcirc p_1 \rightarrow \bigcirc p_2)$	([2], $\mathbf{PC}_6$, Eq.)

Ou seja, temos a versão deôntica do teorema **K**:

$\mathbf{K}_D$: $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$.

Veremos, adiante, que algumas lógicas deônticas utilizam também os operadores aléticos $\Box$ e $\Diamond$, como no caso das lógicas contextuais. Temos ainda as lógicas temporais, que adicionam o índice t_n aos operadores e proposições. Esses sistemas veremos quando forem apresentadas algumas soluções propostas aos paradoxos deônticos.

3 Lógicas da Inconsistência Formal

3.1 Introdução

Um dos principais objetivos dessa pesquisa é compreender noções básicas de lógica paraconsistente para, a seguir, verificar como são apresentadas soluções paraconsistentes para paradoxos modais. As **LFI**'s - Lógicas da Inconsitência Formal (*Logics of Formal Inconsistency*) - são uma classe ampla e expressiva de lógicas paraconsistentes que internalizam as noções básicas de consistência e inconsistência em nível meta-lógico. Compreender essas noções e poder formulá-las em linguagem abstrata é o tema dessa subseção. O artigo aqui utilizado é [Carnielli et al., 2005b] e, referências adicionais a este artigo serão explicitamente citada.

Uma das principais diferenças entre as lógicas do tipo clássico e as **LFI**s é que, na primeira, não há distinção entre contradição e formas de inconsistência. A partir de uma contradição, tudo pode ser provado e o sistema, portanto, trivializa. Já as **LFI**'s são as lógicas que equilibram a equação:

$$\text{CONTRADIÇÃO} + \text{CONSISTÊNCIA} = \text{TRIVIALIDADE}$$

Assim, nas **LFI**'s, não-trivialidade não pode ser definida apenas como ausência de contradição, pois nessa relação está pressuposto o conceito de consistência. O mínimo que se exige é permitir inconsistência em certas circunstâncias e garantir que o sistema ainda possa manter sua capacidade de realizar inferências razoáveis, ou seja, seja capaz de separar as proposições em dois conjuntos não-vazios: as deriváveis e as não deriváveis.

Outra grande diferença entre a lógica clássica e as lógicas paraconsistentes é que, nas lógicas paraconsistentes, teorias contraditórias não contêm necessariamente apenas sentenças falsas. Caso seja possível um modelo em que sentenças contraditórias sejam verdadeiras, então, nesse modelo, havendo uma contradição em uma teoria, ainda sim podemos fazer certas inferências.

Se o problema da paraconsitência é admitir sentenças contraditórias como verdadeiras, a paraconsistência está relacionada às propriedades da negação em vez de recusar o PNC (Princípio de Não-Contradição) como se costuma interpretar. Para provarmos essas e outras teses aqui enunciadas informalmente, daqui em diante trataremos essas noções em nível meta-lógico.

Tomemos For como um conjunto de fórmulas, α e β como fórmulas e Γ e Δ como subconjuntos de For. Assim, uma lógica **L** é definida simplesmente como uma estrutura da forma $\langle For, \Vdash \rangle$, que contém um conjunto de fórmulas e relações de conseqüência definidas nesse conjunto. Acrescentemos a essa lógica **L** as seguintes condições:

(Con1) $\alpha \in \Gamma$ implica $\Gamma \Vdash \alpha$
(Con2) $(\Delta \Vdash \alpha$ e $\Delta \subseteq \Gamma)$ implica $\Gamma \Vdash \alpha$
(Con3) $(\Delta \Vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha \Vdash \beta)$ implica $\Delta, \Gamma \Vdash \beta$
(Con4) $\Gamma \Vdash \alpha$ implica $\varepsilon(\Gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$

A primeira condição é denominada *reflexividade*, a segunda é *monotonicidade* e a terceira é chamada de condição de *corte*. A última condição é denominada *estruturalidade* em que o símbolo ε significa endomorfismo. Essa condição equivale sintaticamente à *Regra de Substituição Uniforme* **(US)** (vide seção 1).

Assumiremos que a linguagem de qualquer lógica **L** é definida pela assinatura proposicional $\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n\in\omega}$, em que Σ_n é o conjunto de conectivos de cardinalidade n. Assumiremos ainda que $P = \{p_n : n \in \omega\}$ é o conjunto de variáveis proposicionais (ou fórmulas atômicas) que são geradas livremente a partir de *For* usando Σ.

Qualquer conjunto $\Gamma \subseteq For$ é chamado de *teoria* de **L**. Se $\Gamma \Vdash \alpha$ para todo Γ, dizemos que α é uma *tese* dessa lógica.

A partir de agora lidaremos com uma lógica arbitrária $\mathbf{L} = \langle For, \Vdash\rangle$ em que se escreve *For* usando uma assinatura que contém o conectivo $\neg$ (negação) e $\Vdash$ satisfaz (Con1) - (Con4).

Seja Γ uma teoria de **L** . Dizemos que uma teoria Γ é *contraditório em relação a* $\neg$, ou simplesmente *contraditório* sse:

$$\exists\alpha(\Gamma \Vdash \alpha \text{ e } \Gamma \Vdash \neg\alpha)$$

Para cada fórmula α acima, podemos dizer que Γ é α-*contraditório*. Já uma teoria é *trivial* sse:

$$\forall\alpha(\Gamma \Vdash \alpha)$$

Evidentemente, a teoria For é trivial, uma vez que, para todo α, $\alpha \in For$ e, por (Con1), temos que $For \Vdash \alpha$. Além disso, como em uma teoria trivial vale $\Gamma \Vdash \alpha$ para todo α, então, em particular vale para $\neg\alpha$. Assim, toda teoria trivial é contraditória. Entretanto, veremos adiante que a recíproca não é verdadeira.

Outro conceito importante é o de *explosão*. Uma teoria é *explosiva* sse:

$$\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)$$

Podemos demonstrar facilmente que se uma teoria é trivial, então explode. Ora, se Γ é trival, temos $\forall\beta(\Gamma \Vdash \beta)$, substituindo α por β. Tomemos $\Gamma' = \{\Gamma, \alpha, \neg\alpha\}$. Como $\Gamma \subseteq \Gamma'$, por (Con2), temos que $\Gamma' \Vdash \beta$ p/ todo β, ou seja, $\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)$.

Também é possível demonstrar que se uma teoria é contraditória e explosiva, então é trivial. Se Γ é contraditório, temos $\exists\alpha(\Gamma \Vdash \alpha \text{ e } \Gamma \Vdash \neg\alpha)$. Ainda, se Γ é explosivo, temos $\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)$. Como temos $\Gamma \Vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta$, temos, por (Con3) que $\Gamma, \neg\alpha \Vdash \beta$, p/ todo α e p/ todo β. Do mesmo modo, de $\Gamma, \neg\alpha \Vdash \beta$ e $\Gamma \Vdash \neg\alpha$, por (Con3), temos $\Gamma \Vdash \beta$, p/ todo β, ou seja, Γ é trivial.

Não podemos esquecer que definimos **L** como $\langle For, \Vdash\rangle$. Ora, como $\Gamma \subseteq For$, por (Con2), podemos estender todas as definições acima para uma lógica **L**. Dessa forma, já nos é possivel formalizar alguns *princípios lógicos* aplicados a uma lógica qualquer **L**:

Princípio de Não-Contradição (PNC)

$$\exists\Gamma\forall\alpha(\Gamma \nVdash \alpha \text{ ou } \Gamma \nVdash \neg\alpha)(\mathbf{L} \text{ é não-contraditório}) \tag{1}$$

Princípio de Não-Trivialidade (PNT)

$$\exists\Gamma\exists\alpha(\Gamma \nVdash \alpha)(\mathbf{L} \text{ é não-trivial}) \tag{2}$$

Princípio de Explosão (PPE)

$$\forall\Gamma\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)(\mathbf{L} \text{ é explosivo}) \tag{3}$$

O último princípio é também denominado de Princípio *ex Contraditione Sequitor Quodlibet*.

De acordo com as definições (1) - (3) acrescidas as demonstrações anteriores, podemos formular o seguinte teorema:

TEOREMA 6
(1) Uma lógica é trivial se e somente se for contraditória e explosiva.
(2) Numa lógica não valem o Princípio de Explosão e o Princípio de Não-Trivialidade se, e somente se, não vale o Princípio de Não-Contradição.

As primeiras lógicas paraconsistentes foram criadas idependentemente em 1948 por Stanislaw Jaśkowsky e por Newton da Costa, em 1963. Para eles, lógicas paraconsistências são lógicas que possuem teorias contraditórias sem contudo serem triviais. Para da Costa, uma lógica é *paraconsistente em relação a* $\neg$ sse:

$$\exists\Gamma\exists\alpha\exists\beta(\Gamma \Vdash \alpha \text{ e } \Gamma \Vdash \neg\alpha \text{ e } \Gamma \nVdash \beta) \tag{4}$$

É digno de nota que, de acordo com (4), uma lógica paraconsistente não rejeita o Princípio de Não-Contradição (1), conforme havíamos citado anteriormente, mas rejeita o Princípio de Explosão (3). Vejamos, a seguir, a definição de Jaśkowsky:

$$\exists\Gamma\exists\alpha\exists\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nVdash \beta) \tag{5}$$

É evidente que (5) implica (4) por (Con1). Tomemos $\Gamma' = \{\Gamma, \alpha, \neg\alpha\}$, que, por (5), nos garante que $\Gamma' \nVdash \beta$. Como $\alpha \in \Gamma'$, temos, por (Con1), $\Gamma' \Vdash \alpha$. Do mesmo modo, como $\neg\alpha \in \Gamma'$, temos $\Gamma' \Vdash \alpha$. Ainda por (Con3) podemos concluir que (4) implica (5). Sabemos, por (Con3), que $\Delta, \Gamma \nVdash \beta$ implica ($\Delta \nVdash \alpha$ ou $\Gamma, \alpha \nVdash \beta$). Tomemos $\Delta = \Gamma$. Assim, de (4) inferímos que $\Delta, \Gamma \nVdash \beta$, ou seja, $\Delta \nVdash \alpha, \neg\alpha$ ou $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nVdash \beta$. Mas por (4), é impossível que $\Delta \nVdash \alpha, \neg\alpha$, ou seja, nos resta afirmar que $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nVdash \beta$. Isso significa que (4) e (5) são equivalentes.

Outro conceito importante que foi citado no início dessa subseção e que ainda não formalizamos é o conceito de consistência. Dadas as definições e teoremas acima, podemos chegar à seguinte definição:

DEFINIÇÃO 6 Uma lógica $\mathbf{L}$ é *consistente* se for explosiva e não trivial, isso é, se $\mathbf{L}$ respeita (2) e (3).

Lógicas paraconsistentes são inconsistentes porque há o controle da explosão de diversas formas. Lógicas triviais também são inconsistentes, conforme a definição acima. A diferença entre lógicas paraconsistentes e triviais é que as últimas aceitam todo tipo de inferência, não separando as proposições entre deriváveis e não deriváveis. De acordo com a definição acima, acrescida de (4) e (5), podemos formular uma nova definição de lógica paraconsistente:

$$\text{Uma lógica é paraconsistente se for inconsistente e não-trivial} \tag{6}$$

Essa definição explica a diferença entre lógicas paraconsistentes e lógicas do tipo clássico, como citado no inícío dessa subseção. Lógicas do tipo clássico são consistentes, isso é, aceitam o Princípio de Explosão (2). Disso decorre que de uma contradição do tipo α e $\neg\alpha$, tudo se segue, trivializando o sistema. Já lógicas paraconsistentes, por não aceitar (2), mas somente (1) e (3), podem aceitar certas inconsistencias sem trivializar o sistema.

***

Um importante conceito que será nas subseções seguintes é o de equivalênciaentre conjunto de fórmulas: Γ e Δ são equivalentes sse:

$$\forall\alpha \in \Delta(\Gamma \Vdash \alpha) \text{ e } \forall\alpha \in \Gamma(\Delta \Vdash \alpha)$$

Em particular, as fórmulas α e β são *equivalentes* sse:

$$(\alpha \Vdash \beta) \text{ e } (\beta \Vdash \alpha)$$

Essas propriedades serão denotadas por $\Gamma \dashVdash \Delta$ e $\alpha \dashVdash \beta$, respectivamente.

Uma lógica **L** é *minimamente trivializável* quando tem um número finito de teorias triviais. Evidentemente, se uma lógica é explosiva, é minimamente trivializável. Lógicas não-explosivas podem ser trivializáveis ou não.

Uma fórmula ξ em **L** é uma *partícula bottom* se pode, por si só, trivializar a lógica, isto é:

$$\forall\Gamma\forall\beta(\Gamma, \xi \Vdash \beta)$$

Uma partícula bottom, quando existir, será denotada por $\perp$. A notação não é ambígüa porque duas partículas bottom quaisquer são equivalentes. Se numa lógica a partícula botton é uma tese, então a lógica é trivial.

A existência de partículas botom numa lógica **L** é regulada pelo seguinte princípio:

Princípio de *Ex Falso Sequitur Quodlibet*

$$\exists\xi\forall\Gamma\forall\beta(\Gamma, \xi \Vdash \beta)(\mathbf{L} \text{ tem uma partícula botom}) \tag{7}$$

Na subseção seguinte, veremos lógicas que não respeitam (3) mas respeitam (7), a saber, todas as **LFI**'s aqui apresentadas, o que mostra que *ex contraditione* não é necessariamente o mesmo que *ex falso*.

Analogamente à particula bottom, dizemos que uma fórmula ξ é uma *partícula top* quando se segue de toda teoria, ou seja:

$$\forall\Gamma(\Gamma \Vdash \xi)$$

Denotaremos tal partícula, quando existir, por $\top$, que também não é ambíguo. Em uma lógica qualquer, todas as suas teses são uma única partícula top. É interessante notar que, como $\Gamma \Vdash \top$, então, por (Con3): $\Gamma, \top \Vdash \alpha$ se e somente se $\Gamma \Vdash \alpha$.

Daqui em diante, uma fórmula φ de **L** construída usando estritamente as variáveis $p_0 \ldots p_n$ será denotada por $\varphi(p_0 \ldots p_n)$. Essa fórmula *depende apenas* das variáveis que ocorrem nela. Essa notação pode ser generalizada por conjuntos; como resultado, teríamos $\Gamma(p_0 \ldots p_n)$. Se $\gamma_0 \ldots \gamma_n$ são fórmulas, então $\varphi(\gamma_0 \ldots \gamma_n)$ significa a substituição (simultânea) de p_i por γ_i em $\varphi(p_0 \ldots p_n)$ (para i = 0 ... n). Analogamente, dado um conjunto de fórmulas $\Gamma(p_0 \ldots p_n)$, escreveremos $\Gamma(\varphi_0 \ldots \varphi_n)$.

DEFINIÇÃO 7 Uma lógica **L** tem uma *negação suplementar* se há uma fórmula $\varphi(p_0)$ de modo que:
(a) $\varphi(\alpha)$ não é uma partícula botom, para algum α;
(b) $\forall\Gamma\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \varphi(\alpha) \Vdash \beta)$.

Considere uma lógica com uma negação suplementar, denotada por $\sim$. Podemos então definir uma teoria Γ como sendo *contraditória em relação a* $\sim$ desde que:

$$\exists\alpha(\Gamma \Vdash \alpha \text{ e } \Gamma \Vdash \sim \alpha)$$

Desse modo, uma lógica **L** pode ser contraditória em relação à $\sim$ se todas suas teorias são também. Assim, uma lógica que tem uma negação suplementar deve satisfazer o Princípio de Não-Contradição em relação a essa negação.

Uma vez definida a noção de negação suplementar, podemos enunciar uma variação de (3):

Princípio de Explosão Suplementar:

$$\textbf{L} \text{ tem uma negação suplementar} \tag{8}$$

A disponibilidade de um tipo específico de negação suplementar faz com que algumas lógicas paraconsistentes possam recuperar a negação clássica.

Pode-se, ainda, considerar o correlato da definição de negação complementar:

DEFINIÇÃO 8 Uma lógica **L** tem uma *negação complementar* se há uma fórmula $\varphi(p_0)$ de modo que:
(a) $\varphi(\alpha)$ não é uma partícula top, para algum α;
(b) $\forall\Gamma\forall\alpha(\Gamma, \alpha, \Vdash \varphi(\alpha)$ implica $\Gamma \Vdash \varphi(\alpha))$.

Dizemos que **L** tem uma negação clássica se tem algum conectivo de negação (primitivo ou definido) que é suplementar e complementar.

3.2 As LFI's e os C-sistemas

Suponhamos o conjunto *For* de fórmulas e o conjunto $\Vdash$ de implicações semânticas e sintáticas. Dadas duas lógicas $\mathbf{L1} = \langle For_1, \Vdash_1 \rangle$ e $\mathbf{L2} = \langle For_2, \Vdash_2 \rangle$, dizemos que **L**2 é uma *extensão linguística (estrita)* de **L**1 se For_1 for um subconjunto (estrito) de For_2. Dizemos que **L**2 é uma *extensão dedutiva (estrita)* de **L**1 se $\Vdash_1$ for um subconjunto (estrito) de $\Vdash_2$. Finalmente, se **L**2 for uma extensão linguística e dedutiva de **L**1, e se a restrição das relações de conseqüência de **L**2 $\Vdash_2$ para o conjunto For_1 fize-la idêntica a $\Vdash_1$ (ou seja, se $For_1 \subseteq For_2$ e para todo conjunto de fórmulas Γ, $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For_1$ nós temos que $\Gamma \Vdash_2 \alpha$ sse $\Gamma \Vdash_1 \alpha$), dizemos que **L**2 é uma *extensão conservativa* de **L**1, ou simplesmente **L**2 é uma *extensão* de **L**1 (e similarmente para extensão conservativa estrita). Em todos esses casos, podemos dizer, de modo mais genérico, que **L**2 é uma *extensão* de **L**1, ou que **L**1 é um *fragmento* de **L**2.

Daqui em diante, Σ será o conjunto dos conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow$ e o conectivo unário $\neg$, enquanto $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto de fórmulas atômicas. *For* é o conjunto de fórmulas geradas de P em Σ.

Analogamente, Σ° será o conjunto obtido adicionando a Σ o conectivo unário $\circ$, e For° será a álgebra das fórmulas de Σ°.

EXEMPLO 1 Considere uma lógica dada pelas seguintes matrizes:

$\wedge$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	0

$\rightarrow$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	1	1

	$\neg$
1	0
$^1/_2$	$^1/_2$
0	1

em que tanto 1 quanto $^1/_2$ são valores assertivos. O nome da lógica acima é *Pac*, apresentada primeiramente por Avron, em 1991. Em *Pac*, temos que $\alpha, \neg\alpha \nvDash \beta$ para todo α e todo β. Assim, *Pac* não é uma lógica controlavelmente explosiva, embora seja paraconsistente, de acordo com os princípios (4) e (5) da subseção anterior. Poderíamos, entretanto, adicionar uma negação clássica em *Pac* a partir da matriz:

	$\sim$
1	0
$^1/_2$	0
0	1

É evidente, pois, que essa negação não é definível em *Pac*. Isso porque considerando qualquer função de verdade das matrizes acima, caso tenhamos $^1/_2$ na entrada, obtemos sempre $^1/_2$ na saída. Como conseqüência, *Pac* não tem partícula bottom (e não pode expressar a consistência das fórmulas, como veremos a seguir).

Caso adicionemos a *Pac* uma negação suplementar ou uma partícula botom, obtemos uma extensão conservativa de *Pac*, ainda paraconsistente, evidentemente, mas que tem algumas teorias explosivas interessantes: satisfaz os princípios (VII) e (VIII). Em vez da negação suplementar, podemos adicionar a *Pac* um "conectivo de consistência" $\circ$ como primitivo, que seguiria a seguinte função de verdade:

	$\circ$
1	1
$^1/_2$	0
0	1

Essa nova lógica é denominada **LFI**1, de acordo com o conjunto Σ° aqui definido.

***

Lógicas paraconsistente são lógicas que em certas condições não pressupõem consistência. Se entendermos consistência como aquilo que pode explodir na presença de uma contradição, lógicas como **LFI**1 podem expressar consistência de uma fórmula em nível metalógico.

Em termos formais, considere um conjunto $\overline{\bigcirc}(p)$ de fórmulas que dependam apenas da variável proposicional p. Esse conjunto satisfaz a exigência de haver fórmulas α e β tais que:

(a) $\overline{\bigcirc}(\alpha), \alpha \nVdash \beta$
(b) $\overline{\bigcirc}(\alpha), \neg\alpha \nVdash \beta$

Dizemos que uma teoria Γ é *fracamente explosiva* em relação a $\overline{\bigcirc}(p)$ se:

$$\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \overline{\bigcirc}(\alpha), \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)$$

Uma lógica **L** será considerada *fracamente explosiva* quando houver um conjunto $\overline{\bigcirc}(p)$ de modo que todas as teorias de **L** são fracamente explosivas em relação a $\overline{\bigcirc}(p)$.

Podemos, desse modo, considerar uma variação "fraca" do Princípio de Explosão:

Princípio de Explosão Fraco

$$\mathbf{L} \text{ é fracamente explosiva em relação a algum conjunto } \overline{\bigcirc}(p) \tag{9}$$

Para cada fórmula α, o conjunto $\overline{\bigcirc}(\alpha)$ expressará precisamente a consistência de α relativa à lógica **L**. Quando o conjunto for unitário, consideremos $\circ\alpha$ o único elemento de $\overline{\bigcirc}(\alpha)$, nesse caso $\circ$ define um *operador de consistência.*

Desta maneira, definimos uma *Lógica da Inconsistência Formal* (**LFI**) como sendo uma lógica **L** tal que:

DEFINIÇÃO 9 Uma *Lógica da Inconsistência Formal* (**LFI**) é qualquer lógica na qual não vale o Princípio de Explosão (3) mas vale o Princípio de Explosão Fraco (9)

A partir dessa definição podemos chegar ao seguinte teorema:

TEOREMA 7
(i) Lógica Clássica não é uma **LFI**
(ii) *Pac* não é uma **LFI**
(iii) **LFI**1 é uma **LFI**

Prova. Para o item (i), note que o Princípio de Explosão (3) vale em Lógica Clássica.
Para demonstrar o item (ii), seja p uma fórmula atômica e seja $\overline{\bigcirc}(p)$ o conjunto de todas as fórmulas de *Pac* que dependem exclusivamente de p. Tomemos o valor de verdade 0 para p e $^1/_2$ para q. Desse modo, temos que $\overline{\bigcirc}(p), p, \neg p \nvDash q$, invalidando (9).
Para o item (iii), admitamos consistência como sendo expressa pelo conectivo unário $\circ$, de modo que $\overline{\bigcirc}(\alpha) = \{\circ\alpha\}$. Assim, para quaisquer valores de α e β, temos $\overline{\bigcirc}(\alpha), \alpha, \neg\alpha \vDash \beta$. Ainda, se tomarmos p como tendo valor 1, inferimos $\overline{\bigcirc}(p), p, \nvDash \beta$. De modo semelhante, tomando $\neg p$ como 0, temos $\overline{\bigcirc}(p), \neg p, \nvDash \beta$

***

Cabe aqui notar um interessante exemplo de **LFI**, axiomatizada a partir da semântica de Kripke.

EXEMPLO 2
Seja $\Sigma^{\Box\Diamond}$ um conjunto de conectivos obtido a partir do acréscimo dos conectivos unários $\Box$ e $\Diamond$. Os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$ são interpretados de acordo com a lógica clássica, enquanto $\Box$ e $\Diamond$ seguem a interpretação proposta na Semântica de Kripke (conferir seção 2.1, cláusulas (ix) e (x)). O modelo de Kripke "degenerado" seria aquele em que todos os mundos estão relacionados apenas com eles mesmos. Considerando qualquer modelo não degenerado, é possível definir uma negação paraconsistente $\smile$, de modo que $\smile \alpha \equiv_{def} \Diamond\neg\alpha$ e o conectivo de consistência $\circ$ pode ser definido como $\circ\alpha \equiv_{def} \alpha \rightarrow \Box\alpha$

Reciprocamente, considere o conjunto Σ°. A negação $\neg$, agora do ponto de vista das estruturas de Kripke, deve se comportar de modo idêntico ao conectivo $\smile$, ou seja, tomando um modelo $\mathcal{M}$, os mundos ω' e ω'', e a relação de acessibilidade R, teríamos:

$$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \neg\alpha \text{ sse } (\exists\omega'')(\omega' R \omega'' \text{ e } \mathcal{M} \nvDash_{\omega''} \alpha)$$

Além disso, o conectivo de consistência seria interpretado como:

$$\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \circ\alpha \text{ sse } \mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha \text{ implica } (\forall\omega'')(\text{se } \omega' R \omega'' \text{ então } \mathcal{M} \vDash_{\omega''} \alpha)$$

Nesse caso ainda é possível redefinir os conectivos de $\Sigma^{\Box\Diamond}$. Ainda, pode-se definir bottom $\bot$ como: $\bot \equiv_{def} \alpha \wedge (\neg\alpha \wedge \circ\alpha)$, para uma fórmula α qualquer. Também podemo tomar a negação clássica $\sim$ como: $\sim \alpha \equiv_{def} \alpha \to \bot$. Os conectivos modais podem, então, serem definidos como $\Diamond\alpha \equiv_{def} \neg \sim \alpha$ enquanto $\Box\alpha \equiv_{def} \sim \neg\alpha$.

Esse argumento mostra que qualquer modelo não degenerado da lógica modal pode ser naturalmente reescrito a partir do conjunto de conectivos de uma **LFI**. É nesse sentido que as lógicas modais são tipicamente paraconsistentes.

***

Suponhamos **L**1 e **L**2 como duas lógicas definidas pelos conjuntos Σ_1 e Σ_2 respectivamente, de modo que Σ_2 estende Σ_1 e Σ_2 contém o conectivo unário $\neg$ que não pertence a Σ_1. Dizemos que **L**2 é um **C**-*sistema baseado em* **L**1 *em relação a* $\neg$ (ou simplesmente um **C**-*sistema*) se:

(C)$_1$ **L**2 é uma extensão conservativa de **L**1;
(C)$_2$ **L**2 é uma **LFI** tal que o conjunto $\overline{\bigcirc}(p)$ é um conjunto unitário $\{\circ p\}$;
(C)$_3$ a negação não-explosiva $\neg$ não pode ser definida em **L**1.
(C)$_4$ **L**1 é não-trivial

Isso significa que, se **L**2 é um **C**-sistema, então a consistência em **L**2 pode ser definida com uma fórmula $\varphi(p)$.

Todos os **C**-*sistemas* são exemplos de sistemas lógicos não-contraditórios $\neg$-paraconsistentes. Além disso, eles são capazes de suplementar negações e partículas bottom, e ainda são baseados na lógica proposicional clássica. Como veremos a seguir, a hierarquia das lógicas $C_n, 1 \leq n \leq \omega$ são claros exemplos de **C**-*sistemas* baseados em lógica clássica.

Tomemos, mais uma vez, o conjunto Σ. Para cada fórmula α, seja $\circ\alpha$ uma abreviação da fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. A lógica $C_1 = \langle For, \vdash_{C_1}\rangle$ pode ser axiomatizada do seguinte modo:

Axiomas
(Ax1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
(Ax2) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
(Ax3) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

(Ax4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
(Ax5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
(Ax6) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
(Ax7) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
(Ax8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
(Ax9) $\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$
(Ax10) $\alpha \vee \neg\alpha$
(Ax11) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
(bc1) $\circ\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$
(ca1) $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \rightarrow \circ(\alpha \wedge \beta)$
(ca2) $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \rightarrow \circ(\alpha \vee \beta)$
(ca3) $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \rightarrow \circ(\alpha \rightarrow \beta)$

Regra de Inferência
(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$

Em geral, dado o conjunto de axiomas e regras de uma lógica **L**, dizemos que $\Gamma \vdash_L \alpha$ para dizer que há uma prova em **L** de α a partir das premissas de Γ. Se Γ for um conjunto vazio, Γ é um teorema de **L**.

A lógica C_1 é um **C**-*sistema* baseado em lógica clássica de modo que $\overline{\bigcirc}(p) = \{\circ p\} = \{\neg(p \wedge \neg p)\}$. Agora suponhamos que α^1 abrevie a fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ enquanto α^{n+1} abrevia a fórmula $\neg(\alpha^n \wedge \neg\alpha^n)^1$. Assim, para cada lógica C_i da hierarquia $C_n, 1 \leq n \leq \omega$ pode ser obtida assumindo $\overline{\bigcirc}(p) = \{p^1, \ldots p^i\}$. Isso é equivalente a dizer que $\circ\alpha \equiv_{def} \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^i$ nos axiomas (bc1), (ca1), (ca2) e (ca3). É evidente, pois, que para cada lógica C_i há um **C**-*sistema* baseado na lógica clássica. Cabe destacar que cada propriedade de C_i estende cada C_{i+1}.

***

NOTA 1 Suponhamos um conjunto de conectivos Σ_+ que denota o conjunto Σ sem o conectivo $\neg$, For_+ o fragmento de For correspondente. A *Lógica Clássica Positiva* será denotada por **CPL**$^+$ e pode ser axiomatizada por **(Ax1) - (Ax9)** e **(MP)**. A *Lógica Clássica Proposicional*, **CP**, é uma extensão de **CP**$^+$ a partir de Σ, acrescentando **(Ax10)** mais a seguinte "lei de explosão":

(exp) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

Essa axiomatização é esperada se tomarmos a definição de negação clássica dada na subseção anterior. É evidente, pois, que numa lógica **L**, que extende **CP**$^+$, um conectivo unário $\div$ de **L** é uma negação clássica sse valem $(\alpha \vee \div\alpha)$ e $(\alpha \rightarrow (\div\alpha \rightarrow \beta))$.

CP também é uma extensão minimal consistente de C_1. Um modo alternativo de axiomatizar **CP** é acrescentando $\circ\alpha$ como axioma. Assim, de **(bc1)**, **(MP)** e esse novo axioma, obteríamos **(exp)**

***

Na próxima seção, trataremos de um importante sistema baseado na lógica clássica, o sistema **mbC** e que, portanto, pode ser axiomatizado a partir de $\mathbf{CP}^+$.

3.3 O sistema mbC

Introduziremos, nessa subseção, o sistema **mbC**, a mas fraca **LFI** baseada em Lógica Clássica.

DEFINIÇÃO 10 Tomemos o conjunto Σ° de conectivos e a lógica $\mathbf{CP}^+$. A lógica **mbC** é garada de $\mathbf{CP}^+$ em Σ°, acrescentando os seguintes axiomas:

(Ax10) $\alpha \vee \neg\alpha$
(bc1) $\circ\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$

Tomemos $\vdash_{\mathbf{mbC}}$ A importância de (Ax10) é que, a partir dele, podemos usar a denominada *prova por casos*, ou seja:

$$\text{se } (\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta) \text{ e } (\Delta, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta) \text{ então } (\Gamma, \Delta \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta)$$

Note que, embora **(bc1)** já havia sido considerado na axiomatização de C_1, a fórmula $\circ\alpha$ não é mais uma abreviação de $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$. Em **mbC**, $\circ$ é um conectivo primitivo, de modo que $\circ\alpha$ é logicamente independente de sua abreviação em C_1. A importância de **(bc1)** é que, a partir de **(MP)**, obtemos:

$$\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{mbc}} \beta$$

Podemos traduzir a regra acima como "se α é consistente e contraditório, então explode." Claramente, a regra acima vailda o Princípio de Explosão Fraco (9), o que nos possibilida afirmar que:

TEOREMA 8 **mbC** é uma **LFI**. Na verdade, é um **C**-sistema baseado em **CP**

Prova. Observe que **mbC** é um fragmento de **LFI**1, que no Teorema 2 foi demonstrado ser uma **LFI**. Além disso, sabemos que o princípio (9) vale em **mbC**. Sabemos ainda que **mbC** contém $\mathbf{CP}^+$, lógica em que $\neg$ não pode ser definido. Assim, **mbC** é um **C**-sistema baseado em **CP** de modo que $\overline{\bigcirc}(p) = \{\circ p\}$.

NOTA 2 Embora usemos a expressão "Lógicas da *In*consistência Forma", mencionamos até então o conectivo de *consistência* $\circ$. Todavia, **mbC** pode ter ainda um conectivo análogodo de *inconstência* $\bullet$. Em geral, usamos a negação clássica $\sim$ para definir esse conectivo, escrevendo $\circ\alpha \equiv_{def} \sim \bullet\alpha$

***

O preço a pagar pela paraconsistência é que necessariamente perdemos alguns teoremas e inferências que dependem do "pressuposto de consistência". Em **mbC**, não valem, por exemplo. as regra de *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo) e a regra *transpositiva.* Valem, porém, algumas formas restritas desses teoremas, e modo que:

TEOREMA 9 [10]
Em relação à *reductio*:
(i) $(\Delta, \beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha)$ e $(\Pi, \beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\alpha)$ não implica $(\Delta, \Pi \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\beta)$
mas $(\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \circ\alpha))$ e $(\Delta, \beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha)$ e $(\Pi, \beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\alpha)$ implica
$(\Gamma, \Delta, \Pi \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\beta)$
(ii) $(\Delta, \neg\beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha)$ e $(\Pi, \neg\beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\alpha)$ não implica $(\Delta, \Pi \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta)$
mas $(\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \circ\alpha))$ e $(\Delta, \neg\beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha)$ e $(\Pi, \neg\beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\alpha)$ implica
$(\Gamma, \Delta, \Pi \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta)$

Em relação à *transpositiva*:
(i) $\alpha \to \beta \nvdash_{\mathbf{mbC}} \neg\beta \to \neg\alpha$
mas $\circ\beta, \alpha \to \beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\beta \to \neg\alpha$
(ii) $\alpha \to \neg\beta \nvdash_{\mathbf{mbC}} \beta \to \neg\alpha$
mas $\circ\beta, \alpha \to \neg\beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta \to \neg\alpha$
(iii) $\neg\alpha \to \beta \nvdash_{\mathbf{mbC}} \neg\beta \to \alpha$
mas $\circ\beta, \neg\alpha \to \beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\beta \to \alpha$
(iv) $\neg\alpha \to \neg\beta \nvdash_{\mathbf{mbC}} \neg\beta \to \neg\alpha$
mas $\circ\beta, \neg\alpha \to \neg\beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\beta \to \neg\alpha$

Esse teorema é, na verdade, uma instância particular de um fenômeno mais geral: admitindo o pressuposto de consistência, toda regra clássica pode ser recuperada num **C**-sistema.

Intuitivamente, contradição pode ser vista como condição suficiente para inconsistência. Eis, abaixo, algumas relações entre o conectivo de consistência e fórmulas contraditórias em **CP**:

TEOREMA 10 Em **mbC**, valem as seguintes regras:
(i) $\alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg \circ \alpha$
(ii) $(\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg \circ \alpha$
(iii) $\circ\alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
(iv) $\circ\alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$
As recíprocas dessas regras não valem em **mbC**.

O último teorema atenta para o fato que lógicas paraconsistentes podem ter algumas assimetrias inesperadas. Observe algums exemplos interessantes de assimetria:

TEOREMA 11 Em **mbC**:
(i) vale $(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_{\mathbf{mbC}} (\beta \wedge \alpha)$
mas não vale $\neg(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_{\mathbf{mbC}} \neg(\beta \wedge \alpha)$
(ii) vale $(\alpha \vee \beta) \dashv\vdash_{\mathbf{mbC}} (\beta \vee \alpha)$
mas não vale $\neg(\alpha \vee \beta) \dashv\vdash_{\mathbf{mbC}} \neg(\beta \vee \alpha)$
(iii) vale $(\alpha \wedge \neg\alpha) \dashv\vdash_{\mathbf{mbC}} (\neg\alpha \wedge \alpha)$
mas não vale $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \dashv\vdash_{\mathbf{mbC}} \neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$

[10] Os teoremas 8, 9 e 106 não serão demonstrados aqui, pois necessitariam das lógicas $\mathbf{P}^1$ e *PI*, que optamos não colocar para não estender essa seção, que é uma introdução às **LFI**'s. Para verificar a demonstração completa, consultar [Carnielli et al., 2005a]

(iv) se $\gamma \vee \neg\gamma$ é uma partícula top, então vale $(\alpha \vee \neg\alpha) \dashv\vdash_{\mathbf{mbC}} (\beta \vee \neg\beta)$ mas não vale $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \dashv\vdash_{\mathbf{mbC}} \neg(\beta \vee \neg\beta)$

***

Vimos até agora axiomas, regras e importantes teoremas de **mbC**, mas ainda não oferecemos uma possível semântica a essa lógica. Um exemplo de semântica paraconsistente foi apresentada em *Pac* e **LFI**1 (cf. Exemplo 1). Em **mbC**, todavia, não vale a regra de *Substituição Uniforme*, como podemos observar a partir das assimetrias citadas. Isso significa que sua semântica não será vero-funcional, ainda que podemos dar um exemplo de semântica bivalorizada (e não trivalorizada, como em *Pac* e **LFI**1). Considere, pois, a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 11 Seja $\mathbf{2} \equiv_{def} \{0, 1\}$ um conjunto de valores-verdades, em que 1 denota o valor "verdade" e 0 denota "falso". A valoração de **mbC** é uma função $v : For^{\circ} \longrightarrow \mathbf{2}$ de acordo com as seguintes cláusulas:
(i) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$
(ii) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$
(iii) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$
(iv) $v(\neg\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$
(v) $v(\circ\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$

Em [Carnielli et al., 2005a], é demonstrado que a semântica acima é adequada a sintática apresentada. Isso significa que $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$ sse $\Gamma \vDash_{\mathbf{mbC}} \alpha$, ou seja **mbC** é correto e completo. Como dissemos anteriormente, uma vez que esse texto não tem por objetivo um estudo aprofundado dos sistemas aqui apresentados, não demonstraremos a corretude e completude dos mesmos.

Embora a semântica bivalorizada acima simplifica a prova de completude de **mbC**, ela não é decidível, ou seja, não existe um algorítimo matemático que possa decidir o valor de verdade de uma fórmula φ qualquer. Para isso, precisamos considerar uma tradução semântica à **mbC**, de acordo com as seguintes matrizes:

$\wedge$	V	v	F
V	v	v	F
v	v	v	F
F	F	F	F

$\vee$	V	v	F
V	v	v	v
v	v	v	v
F	v	v	F

$\rightarrow$	V	V	F
V	v	v	F
v	v	v	F
F	v	v	v

	$\neg_1$	$\neg_2$	$\circ_1$	$\circ_2$
V	F	F	t	F
v	F	v	F	F
F	T	t	t	F

em que V e v são valores assertivos. Podemos interpretar o valor de verdade v como "verdadeiro por omissão" ou "verdadeiro por evidência do contrário", enquanto V e F são "verdadeiro" e "falso". Observe que as matrizes para a conjunção, disjunção e negação nunca oferem o valor V como resultado, ou seja, nunca temos certeza sobre o valor de verdade de sentenças compostas. Além disso, há dois modos de interpretar os operadores $\neg$ e $\circ$. A primeira possibilidade de $\neg$ é considerar o valor de verdade "verdadeiro por omissão" como "verdadeiro", obtendo "falso" na saída. Podemos ainda considerar que qualquer outro valor diferente de "verdadeiro", quando negado, se torna "verdadeiro por omissão". De modo correlato ocorre com $\circ$, em que o primeiro considera "verdadeiro por omissão" apenas os valores clássicos "verdadeiro" e 'falso", enquanto o segundo considera falso todos os valores-verdade.

***

A importância de **mbC** aqui apresentado se mostrará na subseção 4.4, em que se esboça uma versão deôntica de **mbC**, que parece resolver grande parte dos paradoxos deônticos apresentados em 4.3. Os **C-sitemas** vistos na seção anterior será crucial para a solução paraconsistente do Paradoxo de Chisholm, como veremos a seguir.

4 Paradoxos Modais

4.1 O Paradoxo da Cognoscibilidade

Essa seção trata do Paradoxo da Cognoscibilidade, também conhecido como Paradoxo de Fitch. [11] Como dissemos anteriormente, o tema central dessa pesquisa é o estudo de paradoxos modais. Nesse sentido, faremos uma construção minusciosa do paradoxo para, então, mostrar algumas das soluções propostas na literatura.

O texto a seguir é uma apresentação do Paradoxo de Fitch em sua versão proposicional, baseada em [Carnielli et al., 2005a] e [Costa-Leite, 2005]. Existe, entretanto, a versão de primeira ordem do paradoxo, como descrita em [Brogaard et al., 2004]. Essa versão, por sua vez, é bastante complexa e dificulta inicialmente uma solução paraconsistente ao paradoxo, como proposta em [Carnielli et al., 2005a]. Dado que nosso interesse reside em soluções paraconsistentes para paradoxos modais, foi dada prioridade à formulação proposiconal do Paradoxo de Fitch. Em alguns pontos específicos, por sua vez, consultou-se [Brogaard et al., 2004].

Veremos que, para [Costa-Leite, 2006], a linguagem do paradoxo não é apenas a lógica modal proposicional, mas uma linguagem gerada pela fusão de duas linguagens modais: a lógica modal alética com o operador $\Diamond$ e uma lógica epistêmica com o operador K. De qualquer modo, para formularmos o paradoxo, é necessário apresentar dois princípios lógicos importantes: O Princípio Verificacionista e o Princípio de Não-Onisciência.

***

O conceito de verificação aparece constantemente em Filosofia. Os positivistas lógicos, por exemplo, têm como princípio que uma proposição tem significado se e somente se for verificável.

Há diferentes modos de formular o Princípio Verificacionista, por exemplo:

- Todas as proposições podem ser conhecidas (i. e. são conhecíveis)
- Se uma proposição é verdadeira, então pode ser conhecida (i. e. é conhecível)

Em termos formais, podemos ignorar os quantificadores e anunciar o princípio a partir de um conjunto de um conjunto dos operadores clássicos $\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ acrescido dos operadores modais $\Diamond$ e K. Desse modo, teríamos:

(VP): $\alpha \rightarrow \Diamond K\alpha$

[11] de Acordo com J. Salermo, Church seria o verdadeiro autor do Paradoxo de Cognoscibilidade, uma vez cita um artigo de Fitch sobre o paradoxo em 1945, quando ainda não havia sido publicado. Além disso, nesse artigo, Fitch faz uma referência anônima a alguém que o conduzira na elaboração do paradoxo, o que tudo indica ser Church. Por essas razões que J. Salermo sugere designar o paradoxo de Paradoxo de Church-Fitch. (cf [Costa-Leite, 2005])

O Princípio Verificacionista é o ponto crucial na formulação do Paradoxo de Fitch pois, como veremos, a partir dele seremos obrigados a negar o Princípio de Não-Onisciência.

De modo correlato, há diferentes modos de formular o Princípio de Não-Onisciência. Eis duas deles:

- Nem todas as proposições verdadeiras são conhecidas
- Uma proposição qualquer é verdadeira e não é conhecida

Podemos, novamente, ignorar os quantificadores e anunciar esse princípio com a linguagem acima estipulada. Assim, teríamos:

(NO): $\alpha \wedge \neg K\alpha$

O teorema acima é intuitivamente muito razoável, pois como é possível ampliarmos nosso conhecimento, isso significa que há muitas proposições que não conhecemos; em outras palavras, o agente epistêmico não é onisciente.

Veremos a seguir que, muito embora os princípios acima mencionados possuem fortes razões para serem teoremas numa lógica do operador K, eles não podem valer simultaneamente.

***

Antes de apresentar o paradoxo, devemos saber qual é a mínima lógica modal epistêmica necessária para formulá-lo, ou seja, quais são os teoremas e regras de inferência necessários para contextualiza-lo. Fitch, em seu artigo publicado em 1967 pelo "Journal of Symbolic Logic", diz:

> "If * is a truth class witch is closed with respect to conjunction elimination, them the propositional $(\varphi \& \neg * \varphi)$, which asserts that φ is true but not a member of * (where φ is any proposition), is itself necessary not a member of *".

Fitch está assumindo um operador epistêmico qualquer (designado por *) em que vale a eliminação de conjunção. Além disso, o operador é de "classe verdade", o que significa dizer que se temos $*\alpha$, então temos α, pois é bastante razoável conhecermos somente proposicões verdadeiras. Assim, de acordo com a linguagem por nós estipulada, teríamos como teoremas:

$\mathbf{T}^K$: $K(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (K\alpha \wedge K\beta)$
$\mathbf{K}_2^K$: $K\alpha \rightarrow \alpha$

Fitch segue que, admitindo esses dois teoremas, temos que caso a proposição $\varphi \& \neg * \varphi$ é verdadeira para o operador *, então ela necessariante não vale para esse operador. Ou seja, o teorema de Fich pode ser escrito, em nossa linguagem, como $\Box\neg K(\alpha \wedge \neg K\alpha)$

Como podemos chegar a esse teorema a partir de $\mathbf{T}^K$ e $\mathbf{K}_2^K$? Para isso, utilizaremos duas regras válidas em qualquer lógica modal clássica. A primeira é a

Regra de Necessidade, que garante que caso α é um teorema, então α é necessariamente um teorema, ou seja, α é necessário. A segunda diz respeito à própria definição de necessidade e possibilidade, que afirma que se uma proposição é necessariamente falsa, então não pode ser verdadeira. Formalmente, teríamos:

N: Regra de Necessidade: Se α é teorema, então $\Box\alpha$ também é teorema
$\mathbf{K}_1$: $\Box\neg\alpha \to \neg\Diamond\alpha$ [12]

Feitas as devidas considerações, podemos, então, demonstrar o teorema de Fitch. Consideremos, como sugerido por Fitch, que conhecemos a proposição $\alpha \wedge \neg K\alpha$. Concluiremos, por absurdo, seu teorema. Eis a demonstração:

[1]	$K(p_1 \wedge \neg Kp_1)$	(*hipotesis*)
[2]	$Kp_1 \wedge K(\neg Kp_1)$	([1], $\mathbf{K}_2^K$)
[3]	Kp_1	([2])
[4]	$K(\neg Kp_1)$	([2])
[5]	$\neg Kp_1$	([4], $\mathbf{T}^K$)
[6]	$Kp_1 \wedge \neg Kp_1$	([3],[5])
[7]	$\neg K(p_1 \wedge \neg Kp_1)$	([1] - [6], *reductio ad absurdum*)
[8]	$\Box\neg K(p_1 \wedge \neg Kp_1)$	([7], **N**)
[9]	$\neg\Diamond K(p_1 \wedge \neg Kp_1)$	([8], $\mathbf{K}_1$)

Por hora, não encontramos paradoxo algum. O paradoxo ocorre ao admitirmos **(VP)**. Tomemos, então, a proposição $\alpha \wedge \neg K\alpha$ como uma instância particular de α. Teríamos:

[10]	$p_1 \to \Diamond Kp_1$	(**VP**)
[11]	$(p_1 \wedge \neg Kp_1) \to \Diamond K(p_1 \wedge \neg Kp_1)$	([10][$p_1/p_1 \wedge \neg Kp_1$])
[12]	$\neg\Diamond K(p_1 \wedge \neg Kp_1) \to \neg(p_1 \wedge \neg Kp_1)$	([11], Transp.)
[13]	$\neg(p_1 \wedge \neg Kp_1)$	([9], [12], **(MP)**)
[14]	$p_1 \to Kp_1$	([13],$\mathbf{PC}_5$)

Do ponto de vista intuitivo, temos, em [13], que proposições verdadeiras são sempre conhecidas, o que não é muito razoável, uma vez que há muitas proposições que são verdadeiras e que não conhecemos. Já do ponto de vista lógico, [13] afirma que o conceito de conhecimento e de verdade são equivalentes, pois admitimos, em $\mathbf{T}^K$, que $K\alpha \to \alpha$, o que nos forçaria concluir que $K\alpha \leftrightarrow \alpha$ é teorema.

Além do paradoxo tornar inócua o operador epistêmico K, há claramente uma contradição, pois [12] é a negação do Princípio de Não-Onisciência **(NO)**.

Veremos a seguir algumas das soluções possíveis ao paradoxo. A solução semântica proposta em [Costa-Leite, 2006] é considerar duas relações de acessibilidades diferentes para os operadores K e $\Diamond$. A solução paraconsistente

[12] Observe que o teorema $\mathbf{T}^K$ é a versão epistêmica do axoma **(T)**. $\mathbf{K}_1$ já foi demonstrado na subseção 4.1, válido para o Sistema **K** e todas as suas extensões. Por sua vez, K_2^K é a versão epistêmica de K_2, que também é teorema no Sistema **K**, cuja demonstração é demasiada longa para aqui colocarmos (cf. [Prakken and Sergot, 1997]). **N** é a *Regra de Necessidade* também admitida em 4.1.

apresentada em [Carnielli et al., 2005a] mantém a contradição, sem trivializar o sistema. A solução intuicionista nega alguns teoremas clássicos, como DN e $\mathbf{PC}_9$.

4.1.1 Solução Intuicionista

Como vimos na seção anterio, a lógica intuicionista nega (Ax11), a saber, $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ e, em particular, não aceitam o teorema clássico DN. Isso porque para os intuicionista, há uma nítida diferença entre provas concretas e por absurdo, pois nas primeiras demonstramos o teorema α a partir de um conjunto Γ, enquanto no segundo caso demonstramos simplesmente $\neg\neg\alpha$, ou seja, que é impossível α não ser o caso, mas não deduzimos α propriamente.

Essa restrição sintática torna um número razoável de teoremas em **CP** inválidos. Um exemplo disso é $\mathbf{PC}_9$, pois para os intuicionistas:

$$\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \nvdash (\alpha \rightarrow \beta)$$

Note que na derivação acima não podemos mais passar de [13] para [14], evitando o colapso do operador K. Temos, todavia, uma versão mais fraca de [14], a saber, $\alpha \rightarrow \neg\neg K\alpha$, de acordo com a derivação a seguir:

[13]	$\neg(p_1 \wedge \neg K p_1)$	([9], [12], **(MP)**)
[14]$*$	p_1	(*hipotesis*)
[15]	$\neg K p_1$	(*hipotesis*)
[16]	$p_1 \wedge \neg K p_1$	([14], [15])
[17]	$\neg\neg K p_1$	([13], [15], [16], *reductio ad absurdum*)
[18]	$p_1 \rightarrow \neg\neg K p_1$	([14], [16])

Para os intuicionistas, diferentemente de [14], [18] é bastante razoável, pois afirma que é impossível encontrarmos valores de verdade que nunca serão conhecidos. Note, todavia, que [13] ainda entra em contradição con **(NO)**. Esse impasse pode ser facilmente resolvido se tomarmos a segunda possibilidade de formalizar o Princípio de Não-Onisciência, de modo que:

(NO)*: $\neg(\alpha \rightarrow K\alpha)$

dissolvendo, assim, o paradoxo. Veremos, a seguir, sua solução paraconsistente.

4.1.2 Solução Paraconsistente

Para demonstrarmos como é possível uma solução paraconsisten ao Paradoxo de Fich, consideremos uma lógica $\mathbf{Ci}^T$. Para garantirmos a validade do Metateorema da Dedução, introduziremos $\mathbf{Ci}^T$ em duas partes. Daqui em diante, consideremos $\Sigma^{\circ\Box}$ o conjunto de conectivos obtido de Σ° adicionando o conectivo unário $\Box$. A $\Sigma^{\circ\Box}$-álgebra das fórmulas geradas por $\mathbb{P}$ será denominada

$For^{\circ\Box}$.

(1) A lógica modal $\mathbf{Ci}_0^T$ *definida por* $\Sigma^{\circ\Box}$ *é obtida de* **Ci** *adicionando os seguintes axiomas* ($\Box_1$ corresponde a **K** e $\Box_2$ a **T**):
($\Box_1$): $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$
($\Box_2$): $\Box\alpha \to \alpha$

mais a regra de necessidade:
(Nec1) $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$

(2) A lógica modal $\mathbf{Ci}_0^T$ *definida por* $\Sigma^{\circ\Box}$ *é obtida de* **Ci** *adicionando os axiomas* ($\Box_1$) *e* ($\Box_1$) *mais a seguinte regra de* necessidade:

(Nec1) $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$ *estipulada por* $\vdash_{\mathbf{Ci_0^T}} \alpha$.

Além disso, tomemos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 12 $\mathbf{Ci}^T$ satisfaz o Metateorema de Dedução, o que é possível provar por casos no modelo $\langle W, R, \{v_\omega\}_{\omega \in W}\rangle$, em que:

1. W é um conjunto não vazio (de *mundos possíveis*)
2. $R \subseteq W \times W$ é uma relação (de *necessidade*) entre os mundos possíveis que é reflexiva;
3. para cada $\omega \in W$, $v_\omega : For^{\circ\Box}[r]\mathbf{2}$ é um mapa que satisfaz a valoração **Ci** acrescentando: $v_\omega(\Box\alpha) = 1$ sse $v_{\omega'}(\alpha) = 1$ para todo $\omega' \in W$, desde que $\omega R \omega'$.

Uma vez que cada valoração v_ω satisfaz a valoração dada pelos axiomas de **Ci**, então:

$v_\omega(\sim \alpha) = 1$ sse $v_\omega(\alpha) = 0$

para cada fórmula $\alpha \in For^{\circ\Box}$, em que $\sim$ é considerado a negação forte $\sim \alpha \equiv_{def} (\neg\alpha \wedge \circ\alpha)$ de **Ci**. Desse modo, podemos definir o operador de possibilidade $\Diamond$ do seguinte modo:

$\Diamond\alpha \equiv_{def} \sim \Box \sim \alpha$

para toda fórmula α. Assim temos, como seria esperado:

$v_\omega(\Diamond\alpha) = 1$ sse $v'_\omega(\alpha) = 1$ para algum $\omega' \in W$, desde que $\omega R \omega'$

Dada a estrutura de Kripke $\mathfrak{M} = \langle W, R, \{v_\omega\}_{\omega \in W}\rangle$, um mundo ω em W e uma fórmula α, escrevemos $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \alpha$ para dizer que $v_\omega(\alpha) = 1$. Assim, podemos reescrever as cláusulas de $\mathfrak{M}$ de um modo mais intuitivo:

(I)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash p$ sse $v_\omega(p) = 1$, para todo $p \in \mathbb{P}$;
(II)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash (\alpha \wedge \beta)$ sse $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \alpha$ e $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \beta$;
(III)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash (\alpha \vee \beta)$ sse $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \alpha$ ou $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \beta$;
(IV)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ sse $\mathfrak{M}, \omega \nVdash \alpha$ ou $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \beta$;
(V)	$\mathfrak{M}, \omega \nVdash \alpha$ implica $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \neg\alpha$;
(VI)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash \neg\neg\alpha$ implica $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \alpha$;
(VII)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash \circ\alpha$ sse $\mathfrak{M}, \omega \nVdash \alpha$ ou $\mathfrak{M}, \omega \nVdash \neg\alpha$;
(VIII)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash \neg \circ \alpha$ sse $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \alpha$ ou $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \neg\alpha$;
(IX)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash \Box\alpha$ sse para todo $\omega' \in W$, desde que $\omega R \omega'$, $\mathfrak{M}, \omega' \Vdash \alpha$.

E ainda podemos inferir as seguinte cláusuras:

(X)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash \sim \alpha$ sse $\mathfrak{M}, \omega \nVdash \alpha$;
(XI)	$\mathfrak{M}, \omega \Vdash \Diamond\alpha$ sse para algum $\omega' \in W$, desde que $\omega R \omega'$, $\mathfrak{M}, \omega' \Vdash \alpha$.

O acréscimo do conectivo unário K à lógica acima apresentada, dificultaria a clareza da demonstração que se seguirá. Como já foi dito, o operador modal K possui as mesmas exigências de $\Box$. Assim como podemos substituir K por $\Box$ no argumento de Fitch, também podemos assumir uma versão alética do *Princípio Verificacionista* **(VP)**, que diz: se uma proposição é verdadeira, então é uma verdade possivelmente necessária, ou seja:

(AT): $\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha$.

Dada a nova lógica $\mathbf{Ci}^T$, substituiremos o operador $\neg$ por $\sim$, que possui as mesmas propriedades da negação clássica ($\neg$ será a negação paraconsistente). O argumento se estende abaixo:

[9]	$\sim \Diamond\Box(p_1 \wedge \sim \Box p_1)$	
[10]	$p_1 \rightarrow \Diamond\Box p_1$	(**AT**)
[11]	$(p_1 \wedge \sim \Box p_1) \rightarrow \Diamond\Box(p_1 \wedge \sim \Box p_1)$	([10][$\alpha/p_1 \wedge \sim \Box p_1$])
[12]	$\sim \Diamond\Box(p_1 \wedge \sim \Box p_1) \rightarrow \sim (p_1 \wedge \sim \Box p_1)$	([11], Transp)
[13]	$\sim (p_1 \wedge \sim \Box p_1)$	([9],[12], **(MP)**)
[14]	$p_1 \rightarrow \Box p_1$	([13],$\mathbf{PC}_5$)

que, somando-se o axioma **T**, torna inócuo o operador $\Box$.

Veremos agora que, diferentemente de **KT**, a lógica modal $\mathbf{Ci}^T$ evita o colapso de $\Box$ mesmo admitindo a tese alética **(AT)**. Isso significa que em $\mathbf{Ci}^T$, dado **(AT)** como teorema, existe uma proposição α de modo que $\alpha \rightarrow \Box\alpha$ não é um teorema. Esse não é o caso de **KT**, como vimos acima.

A prova que se segue é contrutiva: construiremos uma estrutura de Kripke $\mathfrak{M} = \langle W, R, \{v_\omega\}_{\omega \in W} \rangle$ para $\mathbf{Ci}^T$ de modo que cada instância de **(AT)** é válida em $\mathfrak{M}$. Portanto, basta encontrar uma fórmula α e um mundo $\omega \in W$ de modo que $\mathfrak{M}, \omega \Vdash \alpha$ mas $\mathfrak{M}, \omega \nVdash \Box\alpha$

Seja $W = \{\omega_1, \ldots \omega_6\}$ um conjunto que contém seis mundos e seja definida a seguinte relação $R \subseteq W \times W$:

1.1. $\omega_1 R \omega_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, 6\}$
1.2. $\omega_2 R \omega_i$ para todo $i \in \{2, 4, 5\}$
1.3. $\omega_3 R \omega_i$ para todo $i \in \{3, 5, 6\}$
1.4. $\omega_i R \omega_i$ para todo $i \in \{4, 5, 6\}$

Agora fixemos uma variável proposicional p e seja $P+ = P \cup \{\neg q : q \in P\}$. Para cada $1 \leq i \leq 6$ definimos um mapa $v_i : \mathbb{P}+[r]$ como se segue:

2.1. $v_i(q) = 1$ para todo $q \in P$, $q \neq p$;
2.2. $v_i(\neg q) = 0$ para todo $q \in P$, $q \neq p$;
2.3. $v_i(p) = v_i(\neg p) = 1$ para $i = 1$ e $i = 5$;
2.4. $v_i(p) = 1$ e $v_i(\neg p) = 0$ para $i = 2$ e $i = 4$;
2.5. $v_i(p) = 0$ e $v_i(\neg p) = 1$ para $i = 3$ e $i = 6$;

Os símbolos $\sqcap$, $\sqcup$ e $-$ denotarão os operadores Booleanos de conjunção, dijunção e complemento, respectivamente. A prova se segue abaixo:

Para cada $i = 4, 5, 6$ é possível estender o mapa v_i definido como o mapa $For^{\circ\Box}[r]$ do seguinte modo:

3.1. $v_i(\circ q) = -(v_i(q) \sqcap v_i(\neg q))$, para $q \in P$;
3.2. $v_i(\neg\alpha) = -v_i(\alpha)$, para $\alpha \notin P$;
3.3. $v_i(\circ\alpha) = 1$ para $\alpha \notin P$;
3.4. $v_i(\alpha \wedge \beta) = v_i(\alpha) \sqcap v_i(\beta)$;
3.5. $v_i(\alpha \vee \beta) = v_i(\alpha) \sqcup v_i(\beta)$;
3.6. $v_i(\alpha \to \beta) = -v_i(\alpha) \sqcup v_i(\beta)$;
3.7. $v_i(\Box\alpha) = v_i(\alpha)$.

Para $i = 2$ e $i = 4$ é possível estender o mapa v_i definido como o mapa $For^{\circ\Box}[r]$ usando as cláusulas 3.1 a 3.6 acima e:

3.8. $v_2(\Box\alpha) = v_2(\alpha) \sqcap v_4(\alpha) \sqcap v_5(\alpha)$;
3.9. $v_3(\Box\alpha) = v_3(\alpha) \sqcap v_5(\alpha) \sqcap v_6(\alpha)$.

É possível estender o mapa v_i definido como o mapa $For^{\circ\Box}[r]$ usando as cláusulas 1 a 6 acima e:

3.10. $v_1(\Box\alpha) = v_1(\alpha) \sqcap v_2(\alpha) \sqcap v_3(\alpha) \sqcap v_4(\alpha) \sqcap v_5(\alpha) \sqcap v_6(\alpha)$.

Para demonstrar que $\mathfrak{M}$ satisfaz **(AT)**, devemos considerar:

seja $\alpha \in For^{\circ\Box}$, e seja $i = \{1, 2, 3\}$. Então:

4.1. $v_i(\alpha) = 1$ implica $v_j(\alpha) = 1$ para alguma $j > i$ desde que $\omega_i R \omega j$
4.2. $v_i(\alpha) = 0$ implica $v_j(\alpha) = 0$ para alguma $j > i$ desde que $\omega_i R \omega j$

O modelo descrito acima é exatamente um modelo $\mathfrak{M}$ em que se adiciona o princípio **(AT)** em $\mathbf{Ci}^T$ que evita o colapso de $\Box$, ou seja, o esquema $(\alpha \rightarrow \Box\alpha)$ não é provado na lógica resultante. A demonstração de todas as valorações acima estipulada é demasiada extensa e complexa, mas em [Carnielli et al., 2005a] pode-se encontra-la.

É desse modo que é possível solucionar o Paradoxo de Fitch usando **LFI**. A partir da versão alética de **(VP)**, contruimos uma lógica em que há a lógica proposicional clássica adicionada dos operadores $\Box$, $\circ$ e $\sim$. Essa lógica evita o colapso de $\Box$, dissolvendo, portanto, o paradoxo.

Essa solução é um grande incentivo para pensar um uso das **LFI**'s nos paradoxos deônticos, como veremos nas seções adiante.

4.1.3 Solução Semântica

Suponhamos duas linguagens modais, uma alética $L_1 = \langle \Sigma^{\Diamond}, For^{\Diamond} \rangle$ e uma epistêmica e $L_2 = \langle \Sigma^K, For^K \rangle$, em que $\Sigma^{\Diamond} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Diamond\}$ e $\Sigma^K =< \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, K >$. A linguagem resultante da fusão de ambas é definida como a união de todos os construtures. Veremos que, na lógica resultante dessa fusão, é possivel manter o Princípio Verificacionista e o Princípio de Não-Onisciência.

Consideremos a lógica modal proposicional clássica **K** e a lógica proposicial modal epistêmica **KT1**. A fusão do sistema axiomático de **K** e **KT1** será denotado por $\mathbf{K} \oplus \mathbf{KT1}$, em que vale os teoremas$\mathbf{T}^K$, $\mathbf{K}_2^K$, **N** e $\mathbf{K}_1$, além de **(VP)** e **(NO)**

Do ponto de vista semântico, o enquadramento que deve ser usado de acordo com o argumento de Fitch é obtido pela fusão dos modelos de Kripke:

DEFINIÇÃO 13 $F_1 \oplus F_2 = \langle W, R, P \rangle$, em que:

1. W é um conjunto de mundos possíveis;
2. R é a relação de acessibilidade para $\Diamond$;
3. P é a relação de acessibilidade reflexiva para K.

$F_1 = \langle W, R \rangle$ é um enquadramento para a lógica modal **K**, enquanto $F_2 =< W, P >$ é um enquadramento para a lógica epistêmica **KT1**. Se os enquadramentos são uma fusão de modo que $F_1 \oplus F_2 =< W, R, P >$, então há um contramodelo baseado nessa fusão em que não vale o Paradoxo de Fitch. Eis o modelo:

$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = \langle W, R, P, V \rangle$, em que:
$W = \{\omega', \omega'', \omega'''\}$;
$\omega' R \omega'', \omega' R \omega'''$;
$\omega' P \omega'''$ e P é reflexiva;
$P \subseteq R$;
$V(\alpha) = \{\omega', \omega''\}$.

Para demonstrar que no modelo acima valem **(VP)** e **(NO)**, consideremos, primeiramente, que se em ω' vale α, também deve valer $\Diamond K\alpha$. Ora, se temos

$\mathcal{M} \vDash_{\omega''} \alpha$ e ainda ω'' está relacionado apenas com ele mesmo, temos então que $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} K\alpha$. Assim, temos que existe um ω'', tal que $\omega' R \omega''$ e $\mathcal{M} \vDash_{\omega''} K\alpha$, o que nos força concluir que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \Diamond K\alpha$. Assim, temos que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha \rightarrow \Diamond K\alpha$

Além disso, temos que $\omega' \not R \omega'''$, o que nos força concluir que $\mathcal{M} \nvDash_{\omega'} K\alpha$ apesar de α ser o caso em ω_1. Isso significa que $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \neg K\alpha$ e $\mathcal{M} \vDash_{\omega'} \alpha$, ou seja, em ω_1 vale **(NO)**.

***

As três soluções vistas até aqui mercem algumas considerações. Na solução intuicionista, por exemplo, há simplesmente a reformulação de **(NO)**, como uma forma de evitar o paradoxo, sem contudo justificar porque a primeira formulação seria pior que a dos intuicionistas. Já a solução paraconsiste simplifica a semântica exigida, atribuindo a versão alética de **(VP)** e, mais uma vez, o paradoxo não mantem em sua formulação inicial proposta por Fitch. A solução semântica, por outro lado, mantêm **(NO)** e **(VP)** como formulados por Fitch, mas é necessário ainda justificar por que há duas relações distintas de acessibilidade e quais seriam as implicações sintáticas nessa mudança.

Na seção seguinte, veremos uma série de paradoxos deônticos, e suas possíveis soluções usando as mais diversas lógicas.

4.2 Paradoxos Deônticos

Apesar do conceito de paradoxo ser muito próximo ao termo latino *contradictio*, o primeiro é usado em lógica formal em sentido muito mais amplo. Alguns paradoxos não chegam a uma contradição e são, na realidade, apenas imprecisões formais, uma vez que a formalização de um argumento parece concluir algo que não existe em linguagem natural. [13]

Vejamos o seguinte paradoxo:

[1] Você deve manter sua promessa.
[2] Se você não mantiver sua promessa, deve desculpar-se
[3] Você não manteve sua promessa.

Tomemos p_1: manter uma promessa; p_2: desculpar-se. O argumento acima pode ser formado do modo abaixo:

[1]' $\bigcirc p_1$
[2]' $\neg p_1 \rightarrow \bigcirc p_2$
[3]' $\neg p_1$
[4]' $\bigcirc p_2$ ([2]', [3]', **(MP)**)

Imaginemos, portanto, um mundo w' acessível a w tal que, em w, temos que é obrigatório manter uma promessa e desculpar-se. Isso significa que, num mundo

[13] Os paradoxos a seguir podem ser encontrados em [Prakken and Sergot, 1994] ou mesmo em [Prakken and Sergot, 1997].

ideal w', as pessoas mantêm uma promessa e mesmo assim desculpam-se, o que parece estranho. Prakken e Sergot denominam essa situação de "estranheza pragmática".

Ainda que alguns paradoxos nos causem apenas uma estranheza, em outros podemos encontrar situações muito mais drástica. Esse é o caso, por exemplo, do Paradoxo do Assassino Piedoso, como podemos observar abaixo.

[1] É proibido matar
[2] É obrigatório matar sem sofrimento.
[3] Alguém matou.

Tomemos, agora, p_1: matar; p_2: matar sem sofrimento. Sabemos que matar sem sofrimento pressupõe matar, em termos formais $p_2 \rightarrow p_1$. Vejamos, então, a formulação do argumento e sua extensão, utilizando as regras de inferência **(ROK)** e **(MP)**.

[1]'	$\bigcirc\neg p_1$	
[2]'	$\bigcirc p_2$	
[3]'	p_1	
[4]'	$p_2 \rightarrow p_1$	
[5]'	$\bigcirc p_2 \rightarrow \bigcirc p_1$	([4]', **(ROK)**)
[6]'	$\bigcirc p_1$	([2]', [5]', **(MP)**)
[7]'	$\bigcirc p_1 \wedge \bigcirc\neg p_1$	([1]', [6]')

Em [7]' temos claramente duas obrigações conflitantes, que faríamos concluir que é obrigatório matar e, ao mesmo tempo, não matar. Ainda que não seja uma violação do Princípio de Não-Contradição, [7]' é contraditório com **D***, que diz justamente que é impossível que duas obrigações sejam conflitantes. Chegamos, assim, evidentemente a uma contradição.

Um terceiro paradoxo semelhante ao acima é o denominado Paradoxo do Assassino Comedido. Vejamos sua formulação:

[1] Não se deve matar a testemunha do crime.
[2] Se matar a testemunha do crime, deve-se oferecer um cigarro.

Sabemos, ainda, que em geral é contravencional oferecer cigarros. Acrescentemos uma segunda regra:

[3] Não se deve oferecer cigarros.

Consideremos p_1: matar a testemunha do crime; p_2: oferecer cigarro. Imaginemos que o assassino viole a primeira regra e resolva matar a testemunha. A versão em linguagem formal do argumento segue abaixo:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1$	
[2]'	$p_1 \to \bigcirc p_2$	
[3]'	$\bigcirc\neg p_2$	
[4]'	p_1	
[5]'	$\bigcirc p_2$	([2]', [4]', **(MP)**)
[6]'	$\bigcirc p_2 \wedge \bigcirc\neg p_2$	([3]', [5]')

Contradizendo, mais uma vez, $\mathbf{D}^*$. Uma variação desse mesmo paradoxo seria:

[1]	É proibido ter cachorros.
[2]	Se tiver cachorros, deve-se fixar uma placa.
[3]	É proibido ter placas.

Observemos o argumento acima com mais cuidado. É evidente que [2] regula [1] e que [1], por sua vez, é a obrigação principal do argumento, que denominaremos de obrigação primária. [2] é um obrigação secundária.

E o que seria, portanto, [3]? Oras, [3] não é uma obrigação condicionada, o que nos faria supor que é uma obrigação primária. Mas [1] também é, o que nos faz concluir que [2] (pois regula [1]) é inconsistente com [3].

Para elucidar esse ponto, tomemos um argumento cujas as duas primeiras proposições são uma variante do Paradoxo do Assassino Piedoso.

[1]	É proibido ter cachorros
[2]	Se tiver cachorros, deve ser poodle.
[3]	É proibido ter poodle.

Aqui, sabemos que [1] e [2] são consistentes, pois [2] regula [1]. Mas sabemos, todavia, que [3] é inconsistente com [2]. Isso se torna evidente se notarmos que uma proposição [4] está pressuposta: se alguém tem poodle, então tem um cachorro (analogamente, no Paradoxo do Assassino Piedoso, pressupôe-se que se alguém matou sem sofrimento, então matou).

Formalizemos, pois, o argumento acima. Veremos que, diferentemente do Paradoxo do Assassino Piedoso, não será nessessário usar **(ROK)** para se deparar com uma inconsistência. Dados p_1: alguém tem cachorros; p_2: alguém tem poodles.

[1]'	$\bigcirc\neg p_1$	
[2]'	$p_1 \to \bigcirc p_2$	
[3]'	$\bigcirc\neg p_2$	
[4]'	$p_2 \to p_1$	
[5]'	p_2	
[6]'	p_1	([4]', [5]', **(MP)**)
[7]'	$\bigcirc p_2$	([2]', [6]', **(MP)**)
[8]'	$\bigcirc p_2 \wedge \bigcirc\neg p_2$	([3]', [7]')

É digno de nota que o paradoxo se mantém caso tomemos p_1 como verdadeiro em vez de p_2, ou seja, no caso de haver cachorros. Para tanto, basta substituir na linha [5]' p_2 por p_1, e o resto se segue inalterado.

Uma formulação semelhante do mesmo paradoxo seria:

[1]	A porta deve ser pintada de vermelho.
[2]	Se a porta não for pintada de vermelho, deve ser deixada sem pintar.
[3]	A porta não deve ser deixada de pintar.

É evidente que se alguém pinta a porta de vermelho, então nao deixou de pintar a porta, o que garante que [3] é conseqüência de [1]. Além disso, [1] e [2] são consistentes, pois [2] regula [1]. Podemos observar, entretanto, as cláusulas [1] a [3] são um conjunto inconsistente.

Para isso, tomemos p_1: pintar a porta de vermelho; p_2: deixar de pintar a porta. Suponhamos que alguém deixou de pintar a porta. Teremos:

[1]'	$\bigcirc p_1$	
[2]'	$\neg p_1 \rightarrow \bigcirc p_2$	
[3]'	$\bigcirc \neg p_2$	
[4]'	p_2	
[5]'	$p_1 \rightarrow \neg p_2$	
[6]'	$p_2 \rightarrow \neg p_1$	([5]', Contrapositiva)
[7]'	$\neg p_1$	([4]', [6]', **(MP)**)
[8]'	$\bigcirc p_2$	([2]', [7]', **(MP)**)
[9]'	$\bigcirc p_2 \wedge \bigcirc \neg p_2$	([3]', [8]')

De modo semelhante, é possivel supor uma situação em que há duas obrigações primárias e duas secundárias. Nesse caso, se torna mais claro que, independente da proposição que tomarmos verdadeira, o paradoxo se mantém.

Imaginemos uma reunião de cúpula em Reykjavik que estejam presentes Reagan e Gorbachov. Se alguém tiver alguma informação perigosa, é melhor não contar para ambos. Agora, caso conte para um dos dois, deve-se contar para o outro. Eis o argumento:

[1]	Não se deve contar a Reagan.
[2]	Não se deve contar a Gorbachov.
[3]	Se contar a Reagan, conte a Gorbachov.
[4]	Se contar a Gorbachov, conte a Reagan.

Assumamos p_1: contar a Reagan; p_2: contar a Gorbachov. Imaginemos que se tenha escolhido contar a Gorbachov, ou seja, p_1 é verdadeiro. Teremos, assim:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1$	
[2]'	$\bigcirc\neg p_2$	
[3]'	$p_1 \to \bigcirc p_2$	
[4]'	$p_2 \to \bigcirc p_1$	
[5]'	p_2	
[6]'	$\bigcirc p_1$	([4]', [5]', **(MP)**)
[7]'	$\bigcirc p_1 \wedge \bigcirc\neg p_1$	([2]', [6]')

E ainda que escolhemos contar a Reagan, basta substituirmos no argumento acima p_2 por p_1. Continuaremos, do mesmo modo, violando $\mathbf{D}^*$.

No argumento acima, uma situação problema seria supor que alguém contasse ao mesmo tempo para Reagan e Gorbachov. Como as duas obrigações são primárias, seria impossível saber qual obrigação foi violada.

Ainda que esse modelo pareça fisicamente impossível, podemos criar uma variação desse mesmo paradoxo. Para isso, imaginemos as seguintes recomendações de uma guia de moda:

[1]	As calças não devem ser vermelhas.
[2]	A jaqueta não deve ser verde.
[3]	Se as calças forem vermelhas, a jaqueta deve ser verde.
[4]	Se a jaqueta for verde, as calças devem ser vermelhas.

Caso alguém vista calças vermelhas com jaqueta verde, não saberia qual obrigação primária está violando.

O último paradoxo que veremos também esbarra em uma contradição, mas, diferentemente dos anteriores, não viola **($\mathbf{D}^*$)**. Veremos, ainda, que sua formalização necessitará de inclusão de mais símbolos lógicos. Eis o argumento:

[1]	Woody e Mia não devem se conhecer.
[2]	Se Woody e Mia se conhecerem, eles devem se abraçar.
[3]	Woody e Mia se conheceram.
[4]	Woody e Mia não podem se abraçar sem se conhecerem.

No argumento acima, precisaremos acrescentar o conectivo alético $\Diamond$ e, com isso, estender a semântica apresentada na subseção anterior. Isso é evidente em [4]', pois é fisicamente impossível que duas pessoas se abracem sem se conhecerem. Assim, tomemos agora o modelo $\mathfrak{M} = \langle W, f, d, V\rangle$, em que $f(w)$, é interpretado como alternativas aléticas ao mundo w. A condição de verdade do operador $\Box$ é:

$\mathfrak{M} \vDash_w \Box p_1$ sse $f(w) \subseteq \mathbb{P}_1$

Os teoremas que serão tomados aqui como válidos são exclusivamente os do Sistema **K** que, como vimos anteriormente, é o sistema mínimo modal alético. A definição de $\Diamond$ não sofre alterações.

A relação que existe entre $d(w)$ e $f(w)$ é garantir que $d(w) \subseteq f(w)$, o que valida o seguinte teorema:

$(\mathbf{D}_\Diamond)$: $\bigcirc p_1 \rightarrow \Diamond p_1$

O que é extremamente razoável, uma vez que só devemos fazer aquilo que é fisicamente possível. Para formular o paradoxo, entretanto, precisaremos de um teorema deôntico $\mathbf{D}_1$, diretamente derivado de **(ROK)**. Eis o teorema:

$(\mathbf{D}_1)$: $(\bigcirc p_1 \wedge \bigcirc p_2) \rightarrow \bigcirc(p_1 \wedge p_2)$

Agora tomemos p_1: Woody e Mia se conhecem; p_2: Woody e Mia se abraçam. Veremos, abaixo, a formalização do argumento bem como sua extensão, que nos levará a uma manifesta contradição:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1$	
[2]'	$p_1 \rightarrow \bigcirc p_2$	
[3]'	p_1	
[4]'	$\neg\Diamond(p_2 \wedge \neg p_1)$	
[5]'	$\bigcirc p_2$	([2]', [3]', **(MP)**)
[6]'	$\bigcirc p_2 \wedge \bigcirc\neg p_1$	([1]', [5]')
[7]'	$(\bigcirc p_2 \wedge \bigcirc\neg p_1) \rightarrow \bigcirc(p_2 \wedge \neg p_1)$	($\mathbf{D}_1[p_2/p_1, \neg p_1/p_2]$)
[8]'	$\bigcirc(p_2 \wedge \neg p_1)$	([6]', [7]', **(MP)**)
[9]'	$\neg\bigcirc(p_2 \wedge \neg p_1)$	([4]', $\mathbf{D}_\Diamond$)

Diferentemente do argumento anterior, o argumento acima não chega a um conflito de obrigações. O que ocorre, na verdade, é uma manifesta contradição nas linhas [8]' e [9]'. Se por um lado, Woody e Mia não devem se abraçar sem se conhecerem, eles devem também se abraçarem mesmo sem se conhecerem.

Os paradoxos deônticos aqui apresentados serão minusciosamente explorados na seção seguinte, em que trataremos das soluções propostas na literatura. Dedicamos, todavia, uma única seção ao Paradoxo de Chisholm, importante paradoxo deôntico que não possui uma solução definitiva.

4.3 O Paradoxo de Chisholm

Um dos primeiros paradoxos deônticos, o Paradoxo de Chisholm possui inúmeras formulações e igualmente soluções diversas, porém nenhuma definitiva. Algumas delas são bem conhecidas, como a solução temporal ou mesmo a solução diádica, como veremos na seção seguinte.

O paradoxo consiste em um conjunto de proposições que, em linguagem natural, são aparecentemente coerentes mas que, ao formalizamos, esbarramos em obrigações confitantes. O paradoxo de Chisholm é, na verdade, um caso particular da maioria dos paradoxos deônticos que vimos até então. Eis o paradoxo:[14]

[14] A formulação que se segue é baseada em [Duc, 1997]. Há, entretanto, diversas formulações,

[1] João não deve engravidar Maria.
[2] Não engravidar Maria obriga João a não se casar com ela.
[3] Engravidar Maria obriga João a se casar com ela.
[4] João engravida Maria.

Tomemos p_1: João engravida Maria; p_2: João se casa com Maria. As proposições [1] e [4] seriam facilmente formalizadas, de modo que teríamos:

[1]' $\bigcirc\neg p_1$
[4]' p_1

A obrigação condicional [2], por sua vez, pode ser formalizada de dois modos: "$\neg p_1 \to \bigcirc\neg p_2$" (fórmula que usamos nos paradoxos anteriores), ou ainda "$\bigcirc(\neg p_1 \to \neg p_2)$". Quais das duas fórmulas é a mais conveniente? Consideremos o seguinte teorema válido nas **SDL**'s:

(D$_2$): $\neg p_1 \to (p_1 \to \bigcirc p_2)$

Se substituirmos $\neg p_1$ por p_1 e $\neg p_2$ por p_2, teríamos a fórmula "$p_1 \to (\neg p_1 \to \bigcirc\neg p_2)$", cuja expressão entre parênteses é nossa segunda opção em formalizar [2]. Ora, isso significaria que p_1, ou seja, [4]', seria o primeiro termo da implicação, que faria com que [2] fosse conseqüência de [4], o que intuitivamente não é verdadeiro. Ficaremos, portanto, com a segunda opção.

De modo semelhante, podemos formalizar [3] como "$p_1 \to \bigcirc p_2$" ou "$\bigcirc(p_1 \to p_2)$". Tomemos, então, um terceiro teorema em **SDL**:

(D$_3$): $\bigcirc\neg p_1 \to \bigcirc(p_1 \to p_2)$

O que faria com que [3], em nossa segunda opção, fosse consequência de [1], o que é, mais uma vez, intuitivamente falso. Escolhemos, nesse caso, a primeira opção. Eis as duas proposições formalizadas:

[2]' $\bigcirc(\neg p_1 \to \neg p_2)$
[3]' $p_1 \to \bigcirc p_2$

Lembremos que a versão deôntica do axioma **K** é sempre válida na **SDL**:

(K$_D$): $\bigcirc(p_1 \to p_2) \to (\bigcirc p_1 \to \bigcirc p_2)$.

Mostraremos, abaixo, o argumento inteiro formalizado seguido de seu desenvolvimento que, ao final, fere o teorema **D***.

como em [Prakken and Sergot, 1994] e [Prakken and Sergot, 1997].

[1]'	$\bigcirc\neg p_1$	
[2]'	$\bigcirc(\neg p_1 \to \neg p_2)$	
[3]'	$p_1 \to \bigcirc p_2$	
[4]'	p_1	
[5]'	$\bigcirc p_2$	([3]', [4]', **(MP)**)
[6]'	$\bigcirc(\neg p_1 \to \neg p_2) \to (\bigcirc\neg p_1 \to \bigcirc\neg p_2)$	($\mathbf{K}_D[\neg p_1 \ / \ p_1, \neg p_2 \ / \ p_2]$)
[7]'	$\bigcirc\neg p_1 \to \bigcirc\neg p_2$	([2]', [6]', **(MP)**)
[8]'	$\bigcirc\neg p_2$	([1]', [7]', **(MP)**)
[9]'	$\bigcirc p_2 \wedge \bigcirc\neg p_2$	([5]', [8]', **(MP)**)

Na seção seguinte trataremos das possíveis soluções aos paradoxos deônticos. Com relação ao Paradoxo de Chisholm, veremos a solução temporal, contextual e diática. Na terceira seção, dedicada exclusivamente às **LFI**'s, mostraremos um esboço de uma solução usando **LFI**'s.

4.4 Possíveis Soluções

Essa seção trata de algumas soluções possíveis aos paradoxos apresentados na seção anterior. Veremos que não existe uma solução definitiva, ou melhor, não existe um sistema deôntico que seja capaz de resolver todos os paradoxos.

O que faremos, por conseguinte, é, em cada subseção, apresentar cada um desses sistemas lógicos, mostrando rapidamente sua semântica, sua sintaxe e em que paradoxos pode ser aplicado. Os sistemas aqui tratados são: temporais, não-monotônicos, diádicos e contextuais.

4.4.1 Lógicas Temporais

Grande parte das obrigações são efêmeras. Em particular, o que é obrigatório em um certo mundo possível varia conforme o tempo.[15]

Vimos até agora modelos da forma $\mathfrak{M} = \langle W, d, V \rangle$ para as lógicas deônticas padrão. Nesses modelos não existe uma função que determine as obrigações no tempo. Para isso, podemos imaginar o tempo como uma série de momentos sem início nem fim descrito, por exemplo, pelo conjunto abaixo:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

As relações *antes* e *depois* são representadas por "$<$" e "$>$".

Para inserir a noção de tempo no modelo padrão acima, consideremos uma função ω de $\mathbb{Z}$ em um conjunto de mundos possíveis momentâneos. Podemos, desse modo, considerar a relação de identidade histórica: os mundos ω e ω' possuem a mesma história no momento t, representado simbolicamente por $\omega \sim_t \omega'$, somente no caso em que são identicos até t. Em termo formais:

[15] A apresentação a seguir é baseda principalmente em [Chellas, 1980], e alguns teoremas presentes em [Prakken and Sergot, 1997]. Os paradoxos são todos retirados de [Prakken and Sergot, 1994] e [Prakken and Sergot, 1997].

$\omega \sim_t \omega'$ sse $\omega(t') = \omega'(t')$ para todo $t' < t$

Desse modo, a relação R entre mundos possíveis pode ser relativizada em função do tempo. Dizemos que ω' é uma alternativa deôntica a ω no tempo t somente se ω e ω' são historicamente idênticos em t. Formalmente, teríamos:

$\boldsymbol{R}_t$: se $\omega R_t \omega'$, então $\omega \sim_t \omega'$.

As sentenças atômicas também são indexadas pelo conjunto $\mathbb{Z}$. Assim, $\mathbb{P}_t(n)$ é o conjunto dos mundos em que p_n é verdadeiro no tempo t. A seguinte condição é dada a P:

$\mathbb{P}_t(n)$: se $\omega(t) = \omega(t)$, então $\omega \in \mathbb{P}_t(n)$ sse $\omega' \in \mathbb{P}_t(n)$

Nesse novo modelo, as sentenças tomarão um valor de verdade de acordo com o par $< \omega_n, t >$ de mundos e instantes. Isso significa que escreveremos $\mathfrak{M} \vDash_{<\omega,t>} p_1$ para dizer que p_1 é verdadeiro no mundo ω no instante t. As principais condições de verdade do modelo são:

$\mathfrak{M} \vDash_{<\omega,t>} p_1$ sse $\omega' \in \mathbb{P}_t(n)$, $\qquad (n \in \mathbb{N})$
$\mathfrak{M} \vDash_{<\omega,t>} \bigcirc p_1$ sse para todo $\omega' \in \mathfrak{M}$, desde que $\omega R_t \omega'$, $\mathfrak{M} \vDash_{<\omega',t>} p_1$

Com respeito ao operador $\bigcirc$, nada muda em relação à **SDL**. Precisamos nos atentar, todavia, que um teorema é agora interpretado como válido se for verdadeiro para todo ponto $< \omega', t >$ em todo modelo $\mathfrak{M}$.

Veremos como a lógica temporal pode solucionar o primeiro paradoxo deôntico aqui apontado, a saber, de que devemos comprir uma promessa mas caso não cumpramos, devemos nos desculpar. Tomemos p_1: manter uma promessa; p_2: desculpar-se. A formalização temporal do argumento seria:

[1]' $\bigcirc p_1(1)$
[2]' $\neg p_1(2) \rightarrow \bigcirc p_2(3)$
[3]' $\neg p_1(2)$
[4]' $\bigcirc p_2(3)$ $\qquad$ ([2]', [3]', **(MP)**)

Não há, portanto, a "estranheza pragmática" que ocorria ao formalizar o argumento usando as **SDL**'s. Isso porque no instante 1 vale $\bigcirc p_1$ mas não $\bigcirc p_2$, que só vale a partir do instante 2, quando vale $\neg p_1$ e a obrigação primária $\bigcirc p_1$ foi violada. Assim, não existe nenhum modelo em que somos obrigados a manter uma promessa e, *ao mesmo tempo*, se desculpar.

Se a "estranheza pragmática" é facilmente resolvida no argumento acima, podemos tomar uma variação do mesmo argumento sem a variável tempo. Para isso, imaginemos uma situação a respeito de cercas de uma casa de campo.

[1] É obrigatório não haver cerca.
[2] Se houver cerca, a cerca deve ser branca.
[3] Há uma cerca.

Suponhamos p_1: não há cerca; p_2: a cerca é branca. A formalização temporal do argumento seria:

[1]' $\bigcirc\neg p_1(1)$
[2]' $p_1(1) \to \bigcirc p_2(1)$
[3]' $p_1(1)$
[4]' $\bigcirc p_2(1)$ ([2]', [3]', **(MP)**)

E o índice (t) se tornaria inócuo. O mais grave é que a "estranheza pragmática" se manteria. No melhor dos mundos, vale tanto $\bigcirc\neg p_1$ com $\bigcirc p_2$, ou seja, não deve haver cerca e, *ao mesmo tempo*, a cerca deve ser branca.

Dos paradoxos apresentados na seção anterior, é evidente a presença do tempo no Paradoxo de Woody e Mia, basta nos atentarmos para os tempos verbais em "se conhecer" e "se "conheceram".

Para formalizar o paradoxo, entretanto, será necessário acrescentar os conectivos aléticos $\Box$ e $\Diamond$ num modelo temporal. Esses operadores representariam as noções de necessidade e possibilidade históricas, de modo que valeriam as seguintes condições de verdade:

$\mathfrak{M} \vDash_{<\omega,t>} \Box p_1$ sse para todo ω em $\mathfrak{M}$, desde que $\omega \sim_t \omega'$, $\mathfrak{M} \vDash_{<\omega',t>} p_1$
$\mathfrak{M} \vDash_{<\omega,t>} \Diamond p_1$ sse para algum ω em $\mathfrak{M}$, desde que $\omega \sim_t \omega'$, $\mathfrak{M} \vDash_{<\omega',t>} p_1$

Os teoremas da seção anterior continuam valendo desde que indexados pelo tempo. Usaremos (t) e (t') para os teoremas que são válidos em qualquer tempo. Teremos, portanto:

$\mathbf{D}_{\Diamond(t)}$: $\bigcirc p_1(t) \to \Diamond p_1(t')$
$\mathbf{D}_{1(t)}$: $(\bigcirc p_1(t) \wedge \bigcirc p_2(t')) \to \bigcirc(p_1(t) \wedge p_2(t'))$
$\mathbf{K}_{1(t)}$: $\Box\neg p_1(t) \leftrightarrow \neg\Diamond p_1(t')$

Para desenvolver o argumento precisaremos, todavia, de dois teoremas específicos desse sistema. Uma vez que $\Box$ representa necessidade histórica, é bem razoável que aquilo que seja necessário num momento, também seja no futuro. Formalmente:

$\mathbf{D}_{\Box(t)}$: $\Box p_1(1) \to \Box p_1(t)$, para todo $t > 1$

Esses quatro teoremas serão necessários para dissolvermos o Paradoxo de Woody e Mia com a variável tempo. Tomemos p_1: Woody e Mia se conhecem; p_2: Woody e Mia se abraçam. Diferentemente do que fizemos até então, não demonstraremos toda as etapas do desenvolvimento. Dada a complexidade dos novos teoremas acima apresentados, expor todas as etapas do argumento o tornaria extremamente longo, o que dificultaria a compreensão. Eis abaixo a formalização simplificada do argumento e de seu desenvolvimento:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1(1)$	
[2]'	$p_1(2) \to \bigcirc p_2(3)$	
[3]'	$p_1(2)$	
[4]'	$\neg\Diamond(p_2(1) \land \neg p_1(1))$	
[5]'	$\Box\neg(p_2(1) \land \neg p_1(1))$	([4], $\mathbf{K}_{1(t)}$)
[6]'	$\Box\neg(p_2(3) \land \neg p_1(3))$	([5], $\mathbf{D}_{\Box(t)}$)
[7]'	$\neg\Diamond(p_2(3) \land \neg p_1(3))$	([6], $\mathbf{K}_{1(t)}$)
[8]'	$\neg \bigcirc (p_2(3) \land \neg p_1(3))$	([7], $\mathbf{D}_{\Diamond(t)}$)
[9]'	$\bigcirc p_2(3)$	([2]', [3]', **(MP)**)
[10]'	$\bigcirc p_2(3) \land \bigcirc\neg p_1(1)$	([1]', [9]')
[11]'	$(\bigcirc p_2(3) \land \bigcirc\neg p_1(1)) \to$ $\bigcirc(p_2(3) \land \neg p_1(1))$	($\mathbf{D}_{1(t)}[p_2(3)/p_1(t),\ \neg p_1(1)/p_2(t')]$)
[12]'	$\bigcirc(p_2(3) \land \neg p_1(1))$	([10]', [11]', **(MP)**)

Em primeiro lugar, podemos observar que não há contradição nas linhas [8]' e [12]', pois se tratam de variáveis diferente: na primeira temos $p_1(3)$ enquanto na segunda $p_1(1)$. Além disso, o sistema infere tudo o que intuitivamente é válido. Temos em [12]', por exemplo, que é obrigatório Woody e Mia se abraçarem e que não se tivessem conhecido no passado. Por outro lado, não é obrigatório que Woody e Mia se abracem sem se conhecerem, como concluimos em [8], pois isso seria fisicamente impossível.

Ainda que não haja contradição no paradoxo acima utilizando lógica temporal, podemos tomar uma variação do mesmo paradoxo. Para tanto, suponhamos o conjunto de regras recomendadas para quaisquer pais que morarem em Londres.

[1] As crianças não devem andar na rua.
[2] Se as crianças andarem na rua, então devem andar do lado esquerdo da rua.
[3] As crianças estão andando na rua.
[4] É impossivel as crianças andarem do lado esquerdo da rua se elas não estiverem andando na rua.

Suponhamos, pois, p_1: As crianças andam na rua; p_2: As crianças andam do lado esquerdo da rua. A formalização e a extensão desse novo argumento, que nos levará a uma contradição:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1(1)$	
[2]'	$p_1(1) \to \bigcirc p_2(1)$	
[3]'	$p_1(1)$	
[4]'	$\neg\Diamond(p_2(1) \wedge \neg p_1(1))$	
[5]'	$\bigcirc p_2(1)$	([2]', [3]', **(MP)**)
[6]'	$\bigcirc p_2(1) \wedge \bigcirc\neg p_1(1)$	([1]', [5]')
[7]'	$(\bigcirc p_2(1) \wedge \bigcirc\neg p_1(1))$	
	$\to \bigcirc(p_2(1) \wedge \neg p_1(1))$	$(\mathbf{D}_{1(t)}[p_2(1)/p_1(t),\ \neg p_1(1)/p_2(t')])$
[8]'	$\bigcirc(p_2(1) \wedge \neg p_1(1))$	([6]', [7]', **(MP)**)
[9]'	$\neg \bigcirc (p_2(1) \wedge \neg p_1(1))$	([4]', $\mathbf{D}_{\Diamond(t)}$)

E temos novamente uma contradição nas linhas [8]' e [9]'.

A lógica temporal deôntica pode ser uma forte candidata a dissolver o Paradoxo de Chisholm. Não precisaremos, contudo, dos operadores $\Box$ e $\Diamond$ como no argumento acima. Utilizaremos apenas o teorema $\mathbf{D}_{1(t)}$, válido em qualquer lógica deôntica temporal padrão.

Tomemos, novamente, p_1: João engravida Maria; p_2: João se casa com Maria. Eis a formalização temporal:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1(1)$	
[2]'	$\bigcirc(\neg p_1(2) \to \neg p_2(3))$	
[3]'	$p_1(2) \to \bigcirc p_2(3)$	
[4]'	$p_1(2)$	
[5]'	$\bigcirc p_2(3)$	([3]', [4]', **(MP)**)
[6]'	$\bigcirc(\neg p_1(2) \to \neg p_2(3))$	
	$\to (\bigcirc\neg p_1(2) \to \bigcirc\neg p_2(3))$	$(\mathbf{D}_{1(t)}[\neg p_1(2)\ /\ p_1(t),\ \neg p_2(3)\ /\ p_2(t')])$
[7]'	$\bigcirc\neg p_1(2) \to \bigcirc\neg p_2(3)$	([2]', [6]', **(MP)**)

Como seria esperado intuitivamente, inferimos em [5]' que é obrigatório João se casar com Maria. Além disso, não há conflitos de obrigações porque não conseguimos inferir $\bigcirc\neg p_2(3)$. Para isso precisaríamos ter $\bigcirc\neg p_1(2)$ e, por *Modus Ponens* em $[7]'$, inferirmos $\bigcirc\neg p_2(3)$. Isso não ocorre porque a obrigação de João não deve engravidar Maria vale até o instante (1). A partir do instante (2), quando João engravida Maria, a obrigação não tem sentido e, portanto, não temos $\bigcirc\neg p_1(2)$.

Ainda que o Paradoxo de Chisholm parece se dissolver em lógicas temporais, também podemos tomar uma versão do mesmo paradoxo sem a variável tempo. Suponhamos a seguinte situação:

[1] Não deve haver placas
[2] Se não há cachorros, então não deve haver placas.
[3] Se há cachorros, então deve haver placas.
[4] Há uma placa.

Consideremos p_1: há placas, p_2: há cachorros. Usaremos em [2] e [3] as fórmulas $\bigcirc(\neg p_1(1) \to \neg p_2(1))$ e $p_1(1) \to \bigcirc p_2(1)$, pelas mesmas razões descrita na seção exclusiva ao Paradoxo de Chisholm. Vejamos o desenvolvimento do paradoxo:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1(1)$	
[2]'	$\bigcirc(\neg p_1(1) \to \neg p_2(1))$	
[3]'	$p_1(1) \to \bigcirc p_2(1)$	
[4]'	$p_1(1)$	
[5]'	$\bigcirc p_2(1)$	([3]', [4]', **(MP)**)
[6]'	$\bigcirc(\neg p_1(1) \to \neg p_2(1))$	
	$\to (\bigcirc\neg p_1(1) \to \bigcirc\neg p_2(1))$	$(\mathbf{D}_{1(t)}[\neg p_1(1)\ /\ p_1(t),\ \neg p_2(1)\ /\ p_2(t')])$
[7]'	$\bigcirc\neg p_1(1) \to \bigcirc\neg p_2(1)$	([2]', [6]', **(MP)**)
[8]'	$\bigcirc\neg p_2(1)$	([1]', [7]', **(MP)**)
[9]'	$\bigcirc p_2(1) \wedge \bigcirc\neg p_2(1)$	([5]', [8]', **(MP)**)

Concluimos, em [9]', que é obrigatório no tempo (1) haver cachorros e não haver cachorros. Isso significa que temos obrigações conflitantes, pois ocorrem *ao mesmo tempo*.

Vimos, portanto, que a lógica temporal deôntica soluciona muitos paradoxos deônticas mas que em geral possuem uma variação em que o tempo não está presente. A subseção a seguir tratará das lógicas diádicas e de como podem solucionar o paradoxo de Chisholm.

4.4.2 Lógicas Diádicas

Os paradoxos deônticos fizeram com que muitos lógicos acreditassem não ser possível formalizar a noção de compromisso com o operador monádico $\bigcirc$. Sugeriram, assim, um novo operador diádico $\bigcirc(/)$, em que $\bigcirc(\alpha/\beta)$ é interpretado como "é obrigatório α na circunstância de β". Obrigações incondicionais podem ser definidas como:

$$\bigcirc\alpha \equiv_{df} \bigcirc(\alpha/\top)$$

Em que $\top$ simboliza qualquer tautologia. Antes de axiomatizarmos uma lógica deôntica diádica, é importante retomarmos as **SDL**'s e mostrar uma outra forma de axiomatizá-las, com uma única regra de inferência e um único axioma, a saber:

$$\textbf{ROM}: \quad \frac{p_1 \to p_2}{\bigcirc p_1 \to \bigcirc p_2}$$

OD: $\neg\bigcirc\bot$

Caso queiramos construir uma lógica do operador $\bigcirc(/)$ por analogia com o que foi feito para o operador $\bigcirc$, teríamos as duas regras de inferência abaixo:

$$\textbf{RCOEA}: \quad \frac{p_1 \leftrightarrow p_3}{\bigcirc(p_2/p_1) \leftrightarrow \bigcirc(p_2/p_3)}$$

$$\textbf{RCOM}: \quad \frac{p_2 \rightarrow p_3}{\bigcirc(p_2/p_1) \rightarrow \bigcirc(p_3/p_1)}$$

A importância de **RCOEA** é garantir que quando p_1 e p_3 expressam a mesma proposição, os operadores $\bigcirc(/p_1)$ e $\bigcirc(/p_3)$ são equivalentes. Isso significa que as condições expressas por p_1 e p_3 - e não, por exemplo, as fórmulas por si só - que determinam o que é obrigatório. A segunda regra, **RCOM**, afirma que implicações são mantidas em obrigações condicionais.

O correlato de **OD** num operador diádico parece ser, a princípio:

CD$^+$: $\neg \bigcirc (\bot/p_1)$

Em que $\bot$ simboliza qualquer fórmula contraditória. A fórmula acima diz que nada impossível é obrigatório em qualquer condição, o que faria $\neg \bigcirc (\bot/\bot)$ um teorema. Parece mais razoável aceitar que nada impossível é obrigatório em qualquer condição possível, ou seja:

CD: $\Diamond p_1 \rightarrow \neg \bigcirc (\bot/p_1)$

Aqui, o operador $\Diamond$ representa qualquer noção de possibilidade. Para simplificar, suponhamos que $\Diamond$ opera de acordo com o sistema **S5** ou seja, $\Diamond p_1$ significa que p_1 é o caso em algum dos mundos possíveis.

Nós podemos chamar a lógica do operador $\bigcirc(/)$ como *lógica minimal condicional deôntica*. Tomemos, então, um modelo $\mathfrak{M} = \langle W, f, V \rangle$ que satisfaça a seguinte condição:

se $\mathbb{P}_1 \neq \emptyset$, então $\emptyset \neq f(\omega, \mathbb{P}_1)$.

Já as condições de $\bigcirc(/)$ são dadas por:

$\mathfrak{M} \Vdash_\omega \bigcirc(p_2/p_1)$ sse $\mathbb{P}_2 \in f(\omega, \mathbb{P}_1)$

É digno de nota que como asssumimos que $\Diamond$ e $\Box$ obedecem a semântica de **S5**, não precisamos introduzir uma nova relação entre mundos para o modelo.

Uma vez apresentada a semântica acima, podemos nos indagar como a Lógica Minimal Condicional Deôntica pode solucionar a "estranheza pragmática" que existe no nosso primeiro paradoxo, a saber que devemos manter nossas promessas mas, caso não mantemos, devemos nos desculpar.

Tomemos p_1: manter a promessa; p_2: desculpar-se. A formalização do argumento seria:

[1]' $\bigcirc p_1$
[2]' $\bigcirc(p_2/\neg p_1)$
[3]' $\neg p_1$

Evidentemente não há "estranheza pragmática", pois não concluímos que existe um mundo ideal em que $\bigcirc p_2$ e $\bigcirc p_1$, ou seja, em que somos obrigados a nos desculpar mesmo sem quebrar a promessa. Temos em [2]' apenas $\bigcirc(p_2/\neg p_1)$,a saber, que é obrigatório nos desculpar na condição de não manter uma promessa.

A lógica diádica é bastante eficaz para dissolver "estranhezas pragmáticas". Quando tratamos de conflito de obrigações, entretanto, a eficácia parece comprometida. Uma vez que lidamos com o operador diádico $\bigcirc(/)$, o teorema **D*** tem uma nova versão (derivada de **CD**):

CD*: $\Diamond p_1 \rightarrow \neg(\bigcirc(p_2/p_1) \wedge \bigcirc(\neg p_2/p_1))$

Vejamos então de que modo o operador $\bigcirc(/)$ pode solucionar o Paradoxo de Chisholm. Tomemos, mais uma vez, p$_1$: João engravida Maria; p$_2$: João se casa com Maria. Eis a formalização:

[1]' $\bigcirc\neg p_1$
[2]' $\bigcirc(\neg p_2/\neg p_1)$
[3]' $\bigcirc(p_2/p_1)$
[4]' p_1

Primeiramente, sabemos que não há conflito de obrigações. O conflito ocorreria se infrigíssemos **CD***, o que não é o caso. Isso porque não concluímos, por **RCOK** e [2]', $\bigcirc(\neg p_2/\neg p_1)$ e tampouco $\bigcirc\neg p_2$, o que ocorria nas lógicas dêonticas padrão utilizando **(ROK)**.

Se por um lado, não concluir $\bigcirc\neg p_2$ parece positivo (pois seria anti-intuivo concluir que João não deve se casar com Maria), pelas mesma razões acima descritas não podemos concluir $\bigcirc p_2$. É claro que a partir do argumento formulado em linguagem natural, espera-se que concluamos ser obrigatório João se casar com Maria, o que não ocorre com o operador diádico $\bigcirc(/)$.

Assim, embora as lógicas diádicas dissolvem "estranhezas pragmáticas" e evitam o conflito de obrigações, concluem menos do que esperamos intuitivamente. Vejamos, abaixo, como as lógicas contextuais lidam com esses problemas.

4.4.3 Lógicas Contextuais

A proposta da lógica contextual[16] é criar uma semântica baseada nas **SDL**'s em que as obrigações pressupõem um certo contexto. Nesse sentido, para uma fórmula p_2, toma-se um operador $\bigcirc[p_2]$, que pode ser lido como "é obrigatório no contexto p_2". A expressão $\bigcirc[p_2]p_1$ significa "há uma obrigação secundária p_1 que vale no contexto p_2".

Para dar conta dessa nova semântica, definiremos uma função dc, de modo que $dc(\mathbb{P}_2, \omega)$ seleciona os mundos que são as melhores alternativas a ω dado o contexto p_2. A condição de verdade estrita de $\bigcirc[p_2]p_1$ é:

[16] A semântica e os exemplos aqui colocados estão baseados em [Prakken and Sergot, 1994] e [Prakken and Sergot, 1997]

$\models \bigcirc[p_2]p_1$ sse $\omega \in \mathbb{P}_2$ e $dc(\mathbb{P}_2, \omega) \subseteq \mathbb{P}_1$

A condição acima valida o seguinte teorema:

$\bigcirc[p_2]p_1 \rightarrow p_2$

Por outro lado, $\bigcirc p_1$ é redefinido como:

$\bigcirc p_1 \equiv_{df} \bigcirc[\top]p_1$

Para se dar conta da formalização dos paradoxos, será preciso representar as obrigações condicionais com um conectivo específico. Assim, será usado o conectivo $\Rightarrow$ para se diferenciar da condicional simples. Para esse conectivo, usaremos a seguinte regra:

$$\textbf{OMP}: \quad \frac{p_1, p_1 \Rightarrow \bigcirc p_2}{\bigcirc p_2}$$

É importante notar que as expressões do tipo "se p_2, então deve ser o caso que p_1" são representadas por $p_2 \Rightarrow \bigcirc[p_2]p_1$ e não simplesmente $\bigcirc[p_2]p_1$. Essa, por sua vez, representa uma obrigação específica: p_1 é obrigatório, mas apenas no caso do contexto p_2.

Abaixo, alguns dos teoremas exigidos para essa lógica:

Pos: $\bigcirc[p_2]p_1 \rightarrow \Diamond p_1$
Up: $\mathcal{P}p_2 \rightarrow (\bigcirc[p_2]p_1 \rightarrow \bigcirc p_1)$
Down: $(\Diamond(p_1 \wedge p_2) \wedge \neg\Box(\neg p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow (\bigcirc p_1 \rightarrow \bigcirc[p_2]p_1)$

O primeiro teorema é bem intuitivo, diz que p_1 só pode ser obrigatório num certo contexto, se p_1 for possível. O teorema **Up** garante que obrigações secundárias também sejam primárias, mas apenas no caso do contexto ser permitido. O último teorema diz o oposto, ou seja, em que circustâncias uma obrigações primária p_1 também é secundária. As restrições são simples: p_1 e p_2 devem ser possíveis, do mesmo modo que $\neg p_1$ e $\neg p_2$.

Vejamos, então, de que modo essa semântica pode ser aplicada nas estruturas em que existe uma "estranheza pragmática". Tomemos p_1: manter uma promessa; p_2: desculpar-se. O argumento acima pode ser formado do modo abaixo:

[1]'	$\bigcirc p_1$	
[2]'	$\neg p_1 \Rightarrow \bigcirc[\neg p_1]p_2$	
[3]'	$\neg p_1$	
[4]'	$\bigcirc[\neg p_1]p_2$	([2]', [3]', **OMP**)

A "estranheza pragmática" é dissolvida, uma vez que não podemos supor um mundo ω em que valem $\bigcirc p_1$ e $\bigcirc p_2$. O que concluimos, na verdade, é

$\bigcirc[\neg p_1]p_2$, ou seja é obrigatório se desculpar apenas no contexto de não manter uma promessa.

Se a "estranheza pragmática" parece dissolver-se, vejamos como a lógica contextual aqui descrita lida com o Paradoxo do Assassino Comedido apresentado na seção anterior. Para derivar o paradoxo, entretanto, precisaremos reformular **Down**, de modo que teríamos:

Down*: $(\Diamond(p_1 \wedge p_2) \wedge \Diamond(\neg p_1 \wedge \neg p_2)) \rightarrow (\bigcirc p_1 \rightarrow \bigcirc[p_2]p_1)$

Consideremos p_1: matar a testemunha do crime; p_2: oferecer cigarro. Suponhamos que o assassino decida matar a testemunha. Sabemos, ainda, que é possível matar sem oferecer cigarro do mesmo modo que se pode oferecer cigarro sem matar. A versão em linguagem formal do argumento segue abaixo:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1$	
[2]'	$p_1 \Rightarrow \bigcirc[p_1]p_2$	
[3]'	$\bigcirc\neg p_2$	
[4]'	$\Diamond(\neg p_2 \wedge p_1) \wedge \Diamond(p_2 \wedge \neg p_1)$	
[5]'	p_1	
[6]'	$\bigcirc[p_1]p_2$	([2]', [5]', **OMP**)
[7]'	$\Diamond(\neg p_2 \wedge p_1) \wedge \Diamond(p_2 \wedge \neg p_1)$ $\rightarrow (\bigcirc\neg p_2 \rightarrow \bigcirc[p_1]\neg p_2)$	(**Down***$[\neg p_2/p_1, p_1/p_2)$
[8]	$\bigcirc\neg p_2 \rightarrow \bigcirc[p_1]\neg p_2$	([4]', [7]', **(MP)**)
[9]'	$\bigcirc[p_1]\neg p_2$	([3]', [8]', **(MP)**)
[10]	$\bigcirc[p_1]p_2 \wedge \bigcirc[p_1]\neg p_2$	([6]', [9]')

E temos, na linha [10]', um conflito de obrigações: somos obrigados, no contexto de matar a testemunha, oferecer cigarros e não oferecê-los. Os autores Praken e Segot afirmam, todavia, que esse é o resultado esperado, pois [2] não é uma obrigação contrária ao dever de [3], mas de [1] e, por essa razão, $\bigcirc[p_1]p_2$ e $\bigcirc\neg p_2$ são obrigações sem relação entre si.

De modo semelhante, podemos encontrar dois conflitos de obrigação no mesmo argumento. Isso ocorre, por exemplo, no Paradoxo do Guia de Moda. Suponhamos: p_1: as calças são vermelhas; p_2: as jaquetas são verdes. Sabemos que é possível alguém não usar jaqueta verde mas calças vermelhas e vice-versa. Dada uma situação em que alguém veste calças vermelhas com jaqueta verde, a derivação do argumento seria:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1$	
[2]'	$\bigcirc\neg p_2$	
[3]'	$p_1 \Rightarrow \bigcirc[p_1]p_2$	
[4]'	$p_2 \Rightarrow \bigcirc[p_2]p_1$	
[5]'	$\Diamond(\neg p_2 \wedge p_1) \wedge \Diamond(p_2 \wedge \neg p_1)$	
[6]'	$p_1 \wedge p_2$	
[7]'	p_1	([6]')
[8]'	$\bigcirc[p_1]p_2$	([3]', [7]', **OMP**)
[9]'	p_2	([6]')
[10]'	$\bigcirc[p_2]p_1$	([4]', [9]', **OMP**)
[11]'	$\Diamond(\neg p_2 \wedge p_1) \wedge \Diamond(p_2 \wedge \neg p_1)$	
	$\rightarrow (\bigcirc\neg p_2 \rightarrow \bigcirc[p_1]\neg p_2)$	(**Down***$[\neg p_2/p_1, p_1/p_2)$
[12]'	$\bigcirc\neg p_2 \rightarrow \bigcirc[p_1]\neg p_2$	([5]', [11]', **(MP)**)
[13]'	$\bigcirc[p_1]\neg p_2$	([2]', [12]', **(MP)**)
[14]'	$\Diamond(\neg p_1 \wedge p_2) \wedge \Diamond(p_1 \wedge \neg p_2)$	([5], Comutativa)
[15]'	$\Diamond(\neg p_1 \wedge p_2) \wedge \Diamond(p_1 \wedge \neg p_2)$	
	$\rightarrow (\bigcirc\neg p_1 \rightarrow \bigcirc[p_2]\neg p_1)$	(**Down***$[\neg p_1/p_1)$
[16]'	$\bigcirc\neg p_1 \rightarrow \bigcirc[p_2]\neg p_1$	([14]', [15]', **(MP)**)
[17]'	$\bigcirc[p_2]\neg p_1$	([1]', [16]', **(MP)**)

O primeiro confito de obrigações ocorre nas linhas [8] e [13]. Há, além disso, um segundo conflito, como podemos notar nas linhas [10] e [17]. O conflito de obrigações pode parecer inexistente na linguagem natural, mas para Praken e Sergot o próprio argumento pode ser tomado com inconsistente. Isso porque uma das interpretações possíveis é dizer que [3] não é uma obrigação contrária ao dever de [1], pelas mesmas razões apontadas no Paradoxo do Assassino Comedido. O mesmo vale para [4] e [2].

Na visão dos autores, entretanto, alguns paradoxos são necessariamente consistentes em linguagem natural. Esse é o caso do paradoxo de Woody e Mia. Consideremos p_1: Woody e Mia se conhecem; p_2: Woody e Mia se abraçam. Suponhamos um mundo em que Woody e Mia não se abraçam mesmo se conhecendo. Eis a formalização do argumento:

[1]'	$\bigcirc\neg p_1$	
[2]'	$p_1 \Rightarrow \bigcirc[p_1]p_2$	
[3]'	$p_1 \wedge \neg p_2$	
[4]'	$\neg\Diamond(\neg p_1 \wedge p_2)$	
[5]'	p_1	([3]')
[6]'	$\bigcirc[p_1]p_2$	([2]', [5]', **OMP**)

Nesse caso não conseguimos usar **Down***, pois em [4]' temos que uma das condições para afirmar $\bigcirc\neg p_1 \rightarrow \bigcirc[p_1]\neg p_2$ não é o caso. Oras, se não temos $\bigcirc[p_1]\neg p_2$, não há conflito com [6]' e a derivação é consistente.

Agora vejamos como a lógica contextual pode formalizar o Paradoxo de Chisholm. Em geral, o problema de Chisholm é encontrar uma formulação desse paradoxo em que não há inconsistência sem que com isso deixemos de fazer inferências desejáveis. O exemplo acima pode ser formulado de maneira consistente. Tomemos p_1: João engravida Maria; p_2: João se casa com Maria.

[1]' $\bigcirc\neg p_1$
[2]' $\neg p_1 \Rightarrow \bigcirc\neg p_2$
[3]' $p_1 \Rightarrow \bigcirc p_2$
[4]' p_1
[5]' $\bigcirc p_2$ ([3]', [4]', **OMP**)

Em primeiro lugar, o exemplo não tem inconsistência alguma. A inconsistência ocorreria se houvesse alguma regra análoga a **(ROK)** nas lógicas contextuais, o que não é o caso. Isso nos restringe a concluir $\bigcirc p_2$, ou seja, que João deve se casar com Maria, o que é esperado intuitivamente.

Há, entretanto, certa "estranheza pragmática". No exemplo acima, podemos concluir de [2]' que João deve se casar com Maria mesmo se não a engravidasse, ou seja, caso tivéssemos em [4] $\neg p_1$. Esse problema, entretanto, argumentam os autores que é pertencente à própria condicional e pode ser resolvido por uma condicional contrafactual.

Além disso, basta formular [2] como "É obrigatório que se João não engravidar com Maria, não deve se casar com ela". Desse modo, em **SDL** teríamos:

[2]" $\bigcirc(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2)$

De [2]" e **(ROK)** teríamos $\bigcirc\neg p_2$, o que faz a formulação inconsistente. Essa estrutura, entretanto, não pertence às Obrigações Contrárias ao Dever, mas o que pode ser denominado como um paradoxo de Separação Deôntica.

Por outro lado, essa "estranheza pragmática" pode ser facilmente resolvida com a semântica aqui proposta. Bastaria reformular [3]' do seguinte modo:

[3]" $p_1 \rightarrow \bigcirc[p_1]p_2$

Teríamos, desse modo, em [4]' $\bigcirc[p_1]p_2$, ou seja, que é obrigatório João se casar com Maria no contexto de engravidá-la, e a "estranheza pragmática" deixaria de existir.

Assim, alguns paradoxos apresentados na seção anterior são realmente solucionados pela lógica contextual. Outros, todavia, são mantidos, o que é justificado pelos autores devido a uma inconsistência existente na própria formulação em linguagem natural. O mesmo ocorre com as "estranhezas pragmáticas". A seção seguinte é uma introdução às **LFI**'s que se segue de duas subseções, discutindo o Paradoxo de Fitch e o Paradoxo de Chisholm.

4.4.4 Lógica da Inconsistência Deôntica - LDI

Vimos, na seção anterior, um exemplo claro de como as **LFI**'s podem ser usadas para solucionar um paradoxo modal. Essa constatação nos faz refletir se seria possível usar as **LFI**'s nos paradoxos deônticos apresentados na primeira seção.

Para tanto, retomemos brevemente a axiomatização da Lógica Padrão Deôntica (**SDL**), apresentada de uma forma conveniente:[17]

(TAUT) todas as tautologias clássicas
(O-K) $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc(\alpha) \to \bigcirc(\beta))$
(O-D) $\bigcirc\alpha \to (\bigcirc(\neg\alpha) \to \beta)$

Regras de Inferência
(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

(O-NEC) $\dfrac{\alpha}{\bigcirc(\alpha)}$

Vale ainda na **SDL** o *Metateorema da Dedução*, que diz:

(DM) $\Gamma, \alpha \vdash_{SDL} \beta$ se e somente se $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Evidentemente a regra **(O-NEC)** só pode ser aplicada a teoremas da **SDL**: assim, em geral $\alpha \nvdash_{SLD} \bigcirc(\alpha)$. Por outro lado, é possível utilizar *prova-por-casos* **(PPC)** na **SDL**:

(PPC): $\Gamma, \alpha \vdash_{SLD} \beta$ e $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{SLD} \beta$ implica $\Gamma \vdash_{SLD} \beta$

Baseado na idéia das **LFI**'s, propomos um cálculo mais fraco que **SDL**, adicionando o conectivo unário $\circ$ de modo que $\circ\varphi$ é interpretado como "α é deônticamente consistente ". A idéia básica é permitir obrigações contraditórias, de modo que $\bigcirc(\alpha)$ e $\bigcirc(\neg\alpha)$ não trivialize o sistema, ao não ser que α seja deônticamente consistente.

Definição: *O cálculo **LDI** é definido na linguagem gerada pelos símbolos*

$\{\wedge, \vee, \to, \neg, \bigcirc, \circ\}$

a partir dos seguintes axiomas e das seguintes regras:

(TAUT) todas as tautologias clássicas
(O-K) $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc(\alpha) \to \bigcirc(\beta))$
(Dbc) $\circ\alpha \to (\bigcirc\alpha \to (\bigcirc(\neg\alpha) \to \beta))$

Regras de Inferência
(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

(O-NEC) $\dfrac{\alpha}{\bigcirc(\alpha)}$

[17] O texto a seguir está totalmente baseado em [Coniglio, 2006], ainda em elaboração.

Observe que **(Dbc)** é uma versão mais fraca de **(OD)**, baseada no axioma **(bc)** mencionado acima, válido na grande parte das **LFI**'s. Obviamente, **(DM)** e **(PPC)** valem em **LDI**. Feitas essas considerações, sabemos de [Coniglio, 2006] que se segue o seguinte:

Proposição: *A lógica* **LDI** *satisfaz as seguintes propriedades:*
(*i*) $\bigcirc(\alpha), \bigcirc(\neg\alpha) \vdash_{\mathbf{LDI}} \neg\circ\alpha$
(*ii*) $\circ\alpha \vdash_{\mathbf{LDI}} \neg(\bigcirc(\alpha) \wedge \bigcirc(\neg\alpha))$
(*iii*) $\circ\alpha \vdash_{\mathbf{LDI}} \neg(\bigcirc(\alpha) \to \bigcirc(\neg\alpha))$

Observe que, conforme a Nota 2, é possível, substituir o conectivo $\circ$ pelo seu dual $\bullet$ em que $\bullet\alpha$ é interpretado por "α é (deônticamente) inconsistente". Como esperado, ambos os conectivos são interdefiníveis segundo a equivalência abaixo:

$\bullet\alpha \equiv \neg\circ\alpha$ e $\circ\alpha \equiv \neg\bullet\alpha$

A versão correspondente de **LDI** usando $\bullet$ em vez de $\circ$ como operador primitivo, chamada $\mathbf{LDI}^{\bullet}$, é obtida a partir de **LDI** substituindo **(Dbc)** pelo seguinte axioma:

$(\mathbf{Dbc}^{\bullet})$ $\neg\bullet\alpha \to (\bigcirc\alpha \to (\bigcirc(\neg\alpha) \to \beta))$

É evidente, pois, que **(DM)** e **(PPC)** ainda valem em $\mathbf{LDI}^{\bullet}$, do que se segue (cf. [Coniglio, 2006]):

Proposição: *A lógica* $\mathbf{LDI}^{\bullet}$ *satisfaz as seguintes propriedades:*
(*i*) $\bigcirc(\alpha), \bigcirc(\neg\alpha) \vdash_{\mathbf{LDI}^{\bullet}} \bullet\alpha$
(*ii*) $\neg\bullet\alpha \vdash_{\mathbf{LDI}^{\bullet}} \neg(\bigcirc(\alpha) \wedge \bigcirc(\neg\alpha))$
(*iii*) $\neg\bullet\alpha \vdash_{\mathbf{LDI}^{\bullet}} \neg(\bigcirc(\alpha) \to \bigcirc(\neg\alpha))$

Pelo exposto acima, podemos ver que tanto em **LDI** como em $\mathbf{LDI}^{\bullet}$ teríamos uma nova abordagem ao Paradoxo de Chisholm. O paradoxo se manteria, mas a fórmula α ficaria "marcada", nos informando que há uma inconsistência envolvendo ela, de modo que teríamos $\neg\circ\alpha$, em vez de trivializar o sistema como prevê **(O-D)**.

Já no caso do Paradoxo de Woody e Mia, em que não há simplesmente uma inconsistência deôntica, mas uma manifesta contradição, faria sentido utilizar uma versão mais fraca de **LDI** que denominaríamos **dMbC**, formada por **mbC** + **Dbc**. É digno de nota que em **dMbC** ainda valeriam as condições , (ii) e (iii), uma vez que **dMbc** seria uma lógica mais fraca que **LDI**.

5 Conclusões

Todos os paradoxos deônticos aqui apresentados não possuem uma solução definitiva. Cada sistema lógico possui suas restrições e, ora fazem inferências indesejáveis, ora não inferem o que gostaríamos que inferissem.

Tomemos, por exemplo, as lógicas temporais. O Paradoxo de Chisholm, por exemplo, parece ser resolvido. Mas se tomamos uma versão em que a variável tempo não ocorra, veremos que o paradoxo se mantém, ou seja, faz inferências indesejáveis. O mesmo ocorre com o Paradoxo de Woody e Mia que pode ser reformulado sem o tempo mantendo-se, assim, o paradoxo.

No caso das lógicas diádicas ocorre o oposto: as inferências são extremamente restritas e deixamos de concluir o que é esperado intuitivamente. O paradoxo não se mantém, mas se cria uma grande distância entre a formalização e o real significado das sentenças em linguagem natural.

As lógicas contextuais são mais complicadas. Alguns paradoxos são resolvidos, outros não. Alguns se resolvem, mas mantém uma certa "estranheza pragmática" que mostra, mais uma vez, que a linguagem natural e formal não estão bem ajustadas. Os autores Praken e Sergot, por sua vez, demonstram que alguns desses argumentos são intuitivamente inconsistentes, mas seus argumentos são poucos para sustentar afirmação tão ousada. Além disso, há, nas lógicas contextuais, um grande conjunto de axiomas e conectivos (chegam a algum momento sugerir uma terceira implicação $>>$, além de $\rightarrow$ e $\Rightarrow$). O sistema se torna, portanto, extremamente pragmático mas, por outro lado, desagradável esteticamente.

Seria possível, pois, uma solução dos paradoxo usando as **LFI**'s? A última subseção trata disso, com alguns indícios. Pela sua simplicidade, a **LDI** seria esteticamente melhor que todas as soluções aqui apresentadas. Cabe saber se pode resolver o paradoxo e que preço teremos que pagar na relação entre a linguagem natural e linguagem formal.

Não podemos esquecer que os paradoxos não existem em linguagem natural. Sabemos no argumento de Chisholm que João deve se casar com Maria e ninguém concluiria o contrário. O Paradoxo surge quando tentamos formalizalos, pois não existe o paradoxo em linguagem natural.

Parece, para mim, que as obrigações possuem múltiplas facetas e que a linguagem formal, sendo uma simplificação da linguagem natural, sempre terá algum tipo de perda, seja por falta de inferência ou excessos.

Nada impede, todavia, que se proponham novas soluções a esses paradoxos. Abordagens originais como as **LDI** e mesmo as lógica contextuais são sempre bem-vindas e ampliam os horizontes da lógica deôntica, mostrando até que ponto podemos formalizar essas obrigações.

Referências

[Brogaard et al., 2004] Brogaard, Berit, Salerno, and Joe (2004). Fitch's paradox of knowability. In Zalta, E. N., editor, *The Standorf Encyclopedia of Philosophy (Summer 2004 Edition)*. Kluwer Academic Publisher.
URL = `http://www.plato.stanford.edu/archives/sum2004/entries/ficht-paradox/`.

[Carnielli and Coniglio, 2006] Carnielli, W. and Coniglio, M. (2006). Lógic∀ ∃xiste para todos - um mínimo de lógica e argumentação. Em elaboração.

[Carnielli et al., 2005a] Carnielli, W., Coniglio, M., and Costa-Leite, A. (2005a). Solving the knowability paradox using modal logics of formal inconsistency. Submetido a publicacão.

[Carnielli et al., 2005b] Carnielli, W., Coniglio, M., and Marcos, J. (2005b). Logics of Formal Inconsistency. volume 14 of *Handbook of Philosophical Logic*. Kluwer Academic Publishers. Versão preliminar disponível em *CLE e-Prints*, Vol. 5(1), 2005.
URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/articles.html`.

[Chellas, 1980] Chellas, B. (1980). *Modal Logic: an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge.

[Church, 1956] Church, A. (1956). *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press, Princeton.

[Coniglio, 2006] Coniglio, M. (2006). Logic of deontic inconsistency. Em elaboração.

[Costa-Leite, 2005] Costa-Leite, A. (2005). What is fitch's paradox? Submetido a publicação.

[Costa-Leite, 2006] Costa-Leite, A. (2006). Fusions of modal logics and fitch's paradox. Submetido a publicação.

[Creswell and Hughes, 1996] Creswell, M. J. and Hughes, G. E. (1996). *A New Introduction to Modal Logic*. Houtledge, London.

[Duc, 1997] Duc, H. (1997). On a dilemma of conditional obligation. In Meggle, G., editor, *ANALYOMEN 2: Proceedings of the 2nd Conference Perspectives in Analytical Philosophy, Volume I: Logic, Epistemology, Philosophy of Science*, pages 93–100. De Gruyter.

[Garson, 2004] Garson, J. (2004). Modal logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
URL = `http://www.plato.stanford.edu/entries/logic-modal/`.

[McNamara, 2006] McNamara, P. (2006). Deontic logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
URL = `http://www.plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/`.

[Prakken and Sergot, 1994] Prakken, H. and Sergot, M. (1994). Contrary-to-duty imperatives, defeasibility and violability. In Jones, A. and Sergot, M., editors, *Proceedings of the 2nd International Workshop on Deontic Logic in Computer Science (DEON94)*, volume 1/94 of *CompLex*, pages 296–318. Tano A.S., Oslo.

[Prakken and Sergot, 1997] Prakken, H. and Sergot, M. (1997). Dyadic deontic logic and contrary-to-duty obligations. In Nute, D., editor, *Defeasible Deontic Logic*, volume 263 of *Synthese Library*, pages 223–262. Kluwer Publishing Company.

[(vários), 2005] (vários) (2005). Modal logic. In *Wikipedia, the free encyclopedia.* URL = `http://en.wikipedia.org/wiki/Modal-logic/`.