Um curso de Teoria de Modelos

Marcelo E. Coniglio
GTAL, Departmento de Filosofia
Universidade Estadual de Campinas
P.O. Box 6133, 13081-970
Campinas, SP, Brazil
E-mail: coniglio@cle.unicamp.br

Abstract

O presente texto corresponde às notas de aula de (parte de) o curso *HF103-Teoria de Modelos*, do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UNICAMP, que ministrei no segundo semestre de 1999. Trata-se principalmente de uma adaptação dos primeiros três capítulos do livro *Model Theory*, de C.C. Chang e H.J. Keisler (North-Holland, 1991, terceira edição). Alguns tópicos adicionais foram extraídos do livro *Models and Ultraproducts*, de J.L. Bell e A.B. Slomson (North-Holland, 1969).

Contents

Introdução

Teoria de modelos (TM) é uma das disciplinas mais importantes da Lógica Matemática, e um dos maiores avanços desta área no século XX.

Devemos começar com uma observação com relação à palavra "Modelo": existem duas interpretações opostas para ela (sempre pensada como uma relação entre objeto representado e representação). Assim, uma escultura a escala reduzida de um carro ou avião é um "Modelo" do carro ou avião (sendo que a escultura é uma representação, e o original o objeto representado).

As teorias físicas ou cosmológicas são "Modelos" da realidade; as teorias (modelos) são a representação, e a realidade é o objeto representado.

Fala-se também de "Modelos" matemáticos, biológicos e econômicos. Porém, em pintura, dizemos que um quadro é uma representação de uma figura viva, o "Modelo" (objeto sendo representado).

Esta é a perspectiva da teoria de modelos da lógica matemática: *teoria* é a representação, e o representado é o *modelo*. Vemos portanto que TM estuda as relações entre linguagens formais, por um lado, e as suas realizações ou interpretações ou modelos. A ponte que vincula a linguagem formal com as interpretações é a definição de *verdade*, introduzida por Tarski. A pergunta natural que nos podemos fazer a seguinte: que tipos de teoremas são provados em TM?

Historicamente, o primeiro teorema de TM é o teorema de Löwenheim, de 1915, que estabelece que se uma sentença tem modelos infinitos, então tem modelos enumeráveis. Este resultado foi logo estendido por Skolem para conjuntos arbitrários de sentenças. Assim surgiu o teorema de Löwenheim-Skolem, um dos pilares da TM.

Skolem introduziu em 1919 o método de eliminação de quantificadores, e em 1930 Gödel provou na sua tese de doutorado a completude do cálculo de predicados, obtendo como corolário o teorema da compacidade. Assim, por volta de 1930 já tinham sido estabelecidas três ferramentas clássicas de TM: compacidade, eliminação de quantificadores e Löwenheim-Skolem.

Porém, TM começou como disciplina formal somente 20 anos depois em Berkeley, nos seminários de lógica dirigidos por Tarski. Foi ele quem introduziu a noção de satisfação e verdade numa estrutura, assim como o nome "Teoria de Modelos". A teoria clássica de modelos foi desenvolvida nos anos 50, e em 1960 foi introduzido por A. Robinson a Análise Não-Standard.

Nos anos 60 foi estudada a TM de lógicas não-standard. Foi provado que na lógica de segunda ordem não valem nem compacidade nem Löwenheim-Skolem; nas lógicas infinitárias provou-se que vale compacidade mas não vale Löwenheim-Skolem. O contrário acontece na lógica que admite um quantificador "não-enumerável" Q (onde $Qx\varphi(x)$ denota que existe uma quantidade não-enumerável de indivíduos x que satisfazem $\varphi(x)$). Ou seja: nos exemplos estudados, ao menos um dos dois teoremas (compacidade; Löwenheim-Skolem) falhava. Em 1969 Lindtröm provou que isto não era casual:

> "É impossível que exista uma lógica mais expressiva que a lógica de primeira ordem, onde compacidade e Löwenheim-Skolem sejam ambas verdadeiras".

1 Preliminares

1.1 Linguagens de Primeira Ordem

Neste texto, somente consideraremos linguagens de primeira ordem com igualdade, definidas a seguir. Como é usual, o conjunto dos números naturais será denotado por $\mathbb{N}$, enquanto que $\mathbb{N}^+$ representará o conjunto dos números naturais ≥ 1.

Definição 1.1 Uma *assinatura* Σ é uma tripla $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ tal que:

- $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família de conjuntos;
- $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família de conjuntos;
- $\mathcal{C}$ é um conjunto. ■

Os elementos de $\mathcal{P}_n$ são chamados de *símbolos de predicados* de aridade n (ou n-ários); eventualmente $\mathcal{P}_n = \emptyset$.

Os elementos de $\mathcal{F}_n$ são chamados de *símbolos de funções* de aridade n (ou n-árias); eventualmente $\mathcal{F}_n = \emptyset$.

Os elementos de $\mathcal{C}$ são chamados de *constantes*; eventualmente $\mathcal{C} = \emptyset$.

Se Σ e Σ' são assinaturas tais que $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}'_n$, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}'_n$ (para todo $n \geq 1$) e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, então escreveremos $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

Definição 1.2 Seja Σ uma assinatura. A *linguagem obtida de* Σ é a tupla

$$\mathbb{L}(\Sigma) = \langle \Sigma, \mathcal{V}, \wedge, \neg, \forall, \approx \rangle$$

em que $\mathcal{V} = \{v_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de *variáveis individuais*; $\wedge$ (conjunção) e $\neg$ (negação) são os *conectivos*; $\forall$ é o *quantificador universal*; e $\approx$ é o *símbolo de igualdade*. ■

Frequentemente escreveremos $\mathbb{L}_\Sigma$ (ou ainda $\mathbb{L}$, quando a assinatura Σ for óbvia) no lugar de $\mathbb{L}(\Sigma)$.

Definição 1.3 Dada uma linguagem $\mathbb{L}(\Sigma)$, definimos por recursão o conjunto $TER(\Sigma)$ dos *termos* de $\mathbb{L}(\Sigma)$ como segue:

1. $\mathcal{V} \cup \mathcal{C} \subseteq TER(\Sigma)$.
2. Se $f \in \mathcal{F}_n$ e $\tau_1, \ldots, \tau_n \in TER(\Sigma)$, então $f\tau_1 \ldots \tau_n \in TER(\Sigma)$.
3. Não tem mais objetos em $TER(\Sigma)$ que os definidos por (1) e (2). ■

Frequentemente escreveremos $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ no lugar de $f\tau_1 \ldots \tau_n$.

Definição 1.4 Dada uma linguagem $\mathbb{L}(\Sigma)$, definimos por recursão o conjunto $FOR(\Sigma)$ das *fórmulas* de $\mathbb{L}(\Sigma)$ como segue:

1. Se $P \in \mathcal{P}_n$ e $\tau_1, \ldots, \tau_n \in TER(\Sigma)$, então $P\tau_1 \ldots \tau_n \in FOR(\Sigma)$; se $\tau_1, \tau_2 \in TER(\Sigma)$, então $(\tau_1 \approx \tau_2) \in FOR(\Sigma)$.

2. Se $\varphi, \psi \in FOR(\Sigma)$, então $(\varphi \wedge \psi)$ e $\neg\varphi \in FOR(\Sigma)$.

3. Se $\varphi \in FOR(\Sigma)$ e $x \in \mathcal{V}$ então $\forall x(\varphi) \in FOR(\Sigma)$.

4. Não tem mais objetos em $FOR(\Sigma)$ que os definidos por (1)-(4). ■

Frequentemente escreveremos $P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ no lugar de $P\tau_1 \ldots \tau_n$; fórmulas desta forma são ditas *atômicas*, assim como as fórmulas da forma $(\tau_1 \approx \tau_2)$.

As noções de *variável livre*, *variável ligada* e de *termo livre para uma variável numa fórmula*, assim como as noções de *subfórmula*, *complexidade* $l(\tau)$ e $l(\varphi)$ de um termo τ e de uma fórmula φ, são definidas como sempre.

Também adotaremos a seguinte notação: $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ indica que as variáveis que ocorrem no termo τ pertencem ao conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$; e $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ indica que as variáveis que ocorrem livres na fórmula φ pertencem ao conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Adotaremos os usuais abusos de notação com relação aos parênteses nas fórmulas; em particular, poderemos escrever $\varphi \wedge \psi$ e $\forall x\psi$ no lugar de $(\varphi \wedge \psi)$ e $\forall x(\psi)$. Finalmente, se τ_i é um termo livre para x_i em φ $(i = 1, \ldots, n)$ então $\varphi^{x_1}_{\tau_1} \ldots {}^{x_n}_{\tau_n}$ denota a fórmula obtida de φ por substituição (simultânea) das ocorrências livres de x_i por τ_i $(i = 1, \ldots, n)$. Note que, em geral, a substituição simultânea é diferente da substituição seqüencial, isto é: $\varphi^{x_1}_{\tau_1} \ldots {}^{x_n}_{\tau_n}$ é diferente de $(\ldots(\varphi^{x_1}_{\tau_1})^{x_2}_{\tau_2} \ldots)^{x_n}_{\tau_n}$, em geral (confira!).

Definição 1.5 Uma *sentença* é uma fórmula sem variáveis livres. O conjunto das sentenças sobre Σ é denotado por $SENT(\Sigma)$. ■

Definição 1.6 A *cardinalidade de uma linguagem* $\mathbb{L}(\Sigma)$, denotada por $\|\mathbb{L}(\Sigma)\|$, é a cardinalidade do conjunto

$$\aleph_0 \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \mathcal{P}_n) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \mathcal{F}_n) \cup \mathcal{C}$$

(consideramos, evidentemente, a união disjunta dos conjuntos acima). Observe que $\|\mathbb{L}(\Sigma)\|$ coincide com a cardinalidade do conjunto $FOR(\Sigma)$. ■

1.2 Estruturas de primeira ordem

Dada $\mathbb{L} = \mathbb{L}_\Sigma$, definimos uma Σ-*estrutura*, ou uma *interpretação* para $\mathbb{L}$, ou uma *estrutura* para $\mathbb{L}$, ou um *modelo* para $\mathbb{L}$, ou simplesmente uma *estrutura*, como sendo um par $\mathfrak{A} = \langle A, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$ em que A é um conjunto não vazio e $\cdot^{\mathfrak{A}}$ é uma função definida em Σ tal que:

1. $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ para cada $P \in \mathcal{P}_n$ $(n \geq 1)$;

2. $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ para cada $f \in \mathcal{F}_n$ $(n \geq 1)$;

3. $c^{\mathfrak{A}} \in A$ para cada $c \in \mathcal{C}$.

Dada uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$ então o conjunto A é chamado de *domínio* de $\mathfrak{A}$, denotado por $|\mathfrak{A}|$.

Por outro lado, dada uma estrutura $\mathfrak{A}$, então denotaremos o seu domínio $|\mathfrak{A}|$ por A (se não houver risco de confusão). Analogamente, usaremos A', A_i, B, B' e B_i para denotar o domínio da estrutura $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ e $\mathfrak{B}_i$, respectivamente.

Definição 1.7 Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{L}'$ as linguagens sobre Σ e Σ', respectivamente, tal que $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Se $\mathfrak{A} = \langle A, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$ é uma interpretação para $\mathbb{L}$, então claramente podemos estender $\cdot^{\mathfrak{A}}$ a uma aplicação $\cdot^{\mathfrak{A}'}$ definida sobre Σ'.

Nesse caso, $\mathfrak{A}' = \langle A, \cdot^{\mathfrak{A}'} \rangle$ é uma estrutura para $\mathbb{L}'$, chamada de *expansão* de $\mathfrak{A}$, e $\mathfrak{A}$ é o *reduto* de $\mathfrak{A}'$ para Σ. ■

Dada uma Σ'-estrutura $\mathfrak{A}' = \langle A, \cdot^{\mathfrak{A}'} \rangle$ e $\Sigma \subseteq \Sigma'$, podemos restringir $\cdot^{\mathfrak{A}'}$ a Σ, obtendo uma aplicação $\cdot^{\mathfrak{A}}$ definida sobre Σ. Logo $\mathfrak{A} = \langle A, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$ é uma Σ-estrutura. Observe que, dadas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ estruturas para Σ e Σ', respectivamente, então existem muitas expansões de $\mathfrak{A}$ para Σ', porém existe um único reduto de $\mathfrak{A}'$ para Σ. O universo não muda em ambas operações.

Definição 1.8 Definimos a cardinalidade de uma estrutura $\mathfrak{A}$ como sendo a cardinalidade do domínio A de $\mathfrak{A}$. Assim, dizemos que $\mathfrak{A}$ é finita (enumerável, não-enumerável, infinita) se A for finito (enumerável, não-enumerável, infinito). ■

Definição 1.9 Sejam $\mathfrak{A} = \langle A, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\mathfrak{A}' = \langle A', \cdot^{\mathfrak{A}'} \rangle$ duas estruturas para $\mathbb{L}_\Sigma$. Dizemos que $\mathfrak{A}$ é uma *subestrutura* de $\mathfrak{A}'$, denotado $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$, se $A \subseteq A'$, e:

1. $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{A}'} \cap A^n$ para todo $P \in \mathcal{P}_n$;
2. $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}'}|_{A^n}$ para todo $f \in \mathcal{F}_n$ (logo, $f^{\mathfrak{A}'}|_{A^n} : A^n \to A$);
3. $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}'}$ para todo $c \in \mathcal{C}$ (logo, $c^{\mathfrak{A}'} \in A$ para toda $c \in \mathcal{C}$).

Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$, escrevemos $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'|_A$. ■

Note que a relação $\subseteq$ entre estruturas é uma ordem parcial, e $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ implica que a cardinalidade de $\mathfrak{A}$ é menor do que a cardinalidade de $\mathfrak{A}'$.

Definição 1.10 Sejam $\mathfrak{A} = \langle A, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\mathfrak{A}' = \langle A', \cdot^{\mathfrak{A}'} \rangle$ duas estruturas sobre Σ. Um *morfismo* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ é dado por uma função $h : A \to A'$ tal que:

1. $(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}}$ implica $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{A}'}$
   para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ e $P \in \mathcal{P}_n$;
2. $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{A}'}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$
   para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ e $f \in \mathcal{F}_n$;
3. $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{A}'}$ para todo $c \in \mathcal{C}$. ■

Definição 1.11 Um morfismo $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ é um *isomorfismo* se h é uma bijeção, e vale "se e somente se" no lugar de "implica" na cláusula (1) da Definição 1.10 (isto é: $(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}}$ sse $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{A}'}$). Logo, $h^{-1} : A' \to A$ é também um morfismo $h^{-1} : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$.

Um isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'|_{h(A)}$ é uma *imersão* (ou *mergulho*) de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}'$; nesse caso dizemos que $\mathfrak{A}$ é *mergulhável* ou *imersível* em $\mathfrak{A}'$.

Se existe um isomorfismo $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$, dizemos que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ são *isomorfos* e escrevemos $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$ ou $\mathfrak{A} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{A}'$. ■

Observações 1.12
(1) Se $h_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ e $h_2 : \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3$ são morfismos de estruturas, podemos definir $h_2 \circ h_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3$ a partir de $h_2 \circ h_1 : A_1 \to A_3$ (lembre que $h_1 : A_1 \to A_2$ e $h_2 : A_2 \to A_3$). É fácil ver que (1)-(3) da Definição 1.10 valem para $h_2 \circ h_1$, logo $h_2 \circ h_1$ é um morfismo. Claro que $id_A : A \to A$ induz um morfismo $id_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ tal que $id_{\mathfrak{A}} \circ h = h$ e $h' \circ id_{\mathfrak{A}} = h'$ para todo $h : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ e $h' : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}''$. Dado que $h_1 \circ (h_2 \circ h_3) = (h_1 \circ h_2) \circ h_3$, então a classe Σ-Str das estruturas sobre Σ, junto com os morfismos de estruturas e a definição de composição e identidade, conformam uma *categoria*. O conjunto de morfismos de estruturas de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ é denotado por $Hom_\Sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.
(2) A noção de isomorfismo de estruturas é puramente algébrica, envolvendo exclusivamente a informação algébrico-relacional das estruturas. Podemos definir outra relação de equivalência entre estruturas que envolve esencialmente a linguagem $\mathbb{L}_\Sigma$. A idéia a ser resgatada é: "duas estruturas (sobre Σ) são equivalentes se não podem distinguir sentenças (sobre Σ)". ■

Antes de definir a noção de equivalência de estruturas mencionada na observação anterior, devemos introduzir a noção de verdade em estruturas.

Definição 1.13 Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura, e $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ um termo. Dada uma seqüência $\vec{a} = a_1 \ldots a_n$ em A, *o valor de* τ *em* $\vec{a}$, escrito $\tau[\vec{a}]$, é definido recursivamente por:

- τ é x_i, com $x_i \in \mathcal{V}$; logo $\tau[\vec{a}] := a_i$;
- τ é c, com $c \in \mathcal{C}$; logo $\tau[\vec{a}] := c^{\mathfrak{A}}$;
- τ é $f(\tau_1, \ldots, \tau_k)$; logo $\tau[\vec{a}] := f^{\mathfrak{A}}(\tau_1[\vec{a}], \ldots, \tau_k[\vec{a}])$. ■

Observe que na definição anterior assumimos que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, e que a_i interpreta x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Definição 1.14 Seja $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula, $\mathfrak{A}$ uma estrutura e $\vec{a}$ uma seqüência em $|\mathfrak{A}|$. Dizemos que $\vec{a}$ *satisfaz* φ em $\mathfrak{A}$, denotado por $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$, se:

- φ é $(\tau_1 \approx \tau_2)$; logo $\mathfrak{A} \vDash (\tau_1 \approx \tau_2)[\vec{a}]$ see $\tau_1[\vec{a}] = \tau_2[\vec{a}]$;
- φ é $P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ atômica; logo $\mathfrak{A} \vDash P(\tau_1, \ldots, \tau_n)[\vec{a}]$ sse $(\tau_1[\vec{a}], \ldots, \tau_n[\vec{a}]) \in P^{\mathfrak{A}}$;

- φ é $(\psi_1 \wedge \psi_2)$; logo $\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \models \psi_1[\vec{a}]$ e $\mathfrak{A} \models \psi_2[\vec{a}]$;

- φ é $\neg\psi$; logo $\mathfrak{A} \models \neg\psi[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \not\models \psi[\vec{a}]$;

- φ é $\forall x(\psi)$. Seja y a primeira variável livre para x em ψ, que não pertence a $\{x_1, \ldots, x_n\}$; logo $\mathfrak{A} \models \forall x(\psi)[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \models \psi^x_y[a; \vec{a}]$ para todo $a \in A$. ■

Por indução na complexidade do termo τ e da fórmula φ, pode ser provado:

Proposição 1.15 Sejam $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ e $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ um termo e uma fórmula, respectivamente. Considere duas seqüências $\vec{a} = a_1 \ldots a_r$ e $\vec{b} = b_1 \ldots b_s$ em $|\mathfrak{A}|$ tais que $n \leq r \leq s$ e $b_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.
(Podemos portanto escrever

$$\tau = \tau(x_1, \ldots, x_n; z_{n+1}, \ldots, z_r) = \tau(x_1, \ldots, x_n; z_{n+1}, \ldots, z_s)$$

e

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n; z_{n+1}, \ldots, z_r) = \varphi(x_1, \ldots, x_n; z_{n+1}, \ldots, z_s).)$$

Logo

1. $\tau[\vec{a}] = \tau[\vec{b}]$;

2. $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$. ■

Isto significa que o valor de τ em $\vec{a}$ depende dos a_i que interpretam as variáveis que efetivamente ocorrem em τ. Analogamente a relação $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$ depende *exclusivamente* dos a_i que interpretam as variáveis *livres* de φ. Em particular, se φ é uma sentença, então são equivalentes:

1. existe $\vec{a}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$;

2. para toda $\vec{a}$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$.

No caso de (1) ou (2) ser verdadeiro, dizemos que a sentença φ é *verdadeira em* $\mathfrak{A}$, denotado $\mathfrak{A} \models \varphi$. Se Γ é um conjunto de sentenças então $\mathfrak{A} \models \Gamma$ significa que $\mathfrak{A} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Gamma$.

Em geral, uma fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ é dita *verdadeira em* $\mathfrak{A}$ se vale a condição (2) acima; nesse caso (isto é, se φ é verdadeira em $\mathfrak{A}$) escrevemos $\mathfrak{A} \models \varphi$ e diremos que $\mathfrak{A}$ *satisfaz* φ, ou φ é *satisfeita por* $\mathfrak{A}$, ou $\mathfrak{A}$ é um *modelo* de φ.

Se $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, isto é, para toda $\vec{a}$, $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\vec{a}]$, então diremos que φ é *falsa* em $\mathfrak{A}$ e escreveremos $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. Observe que "$\mathfrak{A} \not\models \varphi$" não significa "não é o caso que $\mathfrak{A} \models \varphi$" (embora a notação usada possa sugeri-lo), a menos que φ seja sentença.

Podemos agora definir a relação de equivalência elementar:

Definição 1.16 Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas estruturas (sobre Σ). Dizemos que $\mathfrak{A}$ é *elementarmente equivalente* a $\mathfrak{B}$ se:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ implica } \mathfrak{B} \models \varphi$$

para toda sentença φ (sobre Σ). Nesse caso escreveremos $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. ■

Proposição 1.17 Se $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ então, para cada sentença φ (em Σ), $\mathfrak{A} \models \varphi$ sse $\mathfrak{B} \models \varphi$. Portanto $\equiv$ é uma relação de equivalência.

Demonstração: Suponha que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ e seja $\varphi \in SENT(\Sigma)$. Se $\mathfrak{A} \models \varphi$ então $\mathfrak{B} \models \varphi$, pela Definição 1.16. Se $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ então $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, donde $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ (pois $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) e então $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Daqui: $\mathfrak{B} \models \varphi$ implica $\mathfrak{A} \models \varphi$ para toda sentença φ. ■

Proposição 1.18 Se $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Demonstração: Lembrando que $l(\varphi)$ denota a complexidade de uma fórmula φ, considere a seguinte propriedade $\mathbf{P}(n)$ sobre números naturais (escrita, por comodidade, numa meta-linguagem semi-formal):

$$\mathbf{P}(n) := \forall\Sigma\ \forall\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Sigma\text{-}Str\ [\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\varphi \in SENT(\Sigma)(l(\varphi) \leq n \Rightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi))].$$

Observe que provar $\forall n\mathbf{P}(n)$ equivale a provar a proposição. Provaremos $\forall n\mathbf{P}(n)$ por indução em n.
Caso base $\mathbf{P}(0)$: Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Sigma\text{-}Str$ com $\mathfrak{A} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{B}$, e seja φ uma Σ-sentença com $l(\varphi) \leq 0$, isto é, $\varphi = P(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ onde $\tau_1, \ldots, \tau_k$ são Σ-termos fechados (ou seja, sem variáveis).

Fato: Se τ é um Σ-termo fechado, então $h(\tau^{\mathfrak{A}}) = \tau^{\mathfrak{B}}$.
Com efeito: se τ é c (uma constante) então $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$, pela definição de morfismo. Suponha que o **Fato** vale para qualquer termo τ com $l(\tau) \leq m$. Então,

$$\begin{aligned} &h(f(\tau_1, \ldots, \tau_s)^{\mathfrak{A}}) = h(f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \tau_s^{\mathfrak{A}})) = f^{\mathfrak{B}}(h(\tau_1^{\mathfrak{A}}), \ldots, h(\tau_s^{\mathfrak{A}})) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(\tau_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, \tau_s^{\mathfrak{B}}) = f(\tau_1, \ldots, \tau_s)^{\mathfrak{B}}, \end{aligned}$$

usando a hipótese de indução para $\tau_1, \ldots, \tau_s$. Logo, vale o **Fato**.

Usando o **Fato** provamos o seguinte:

$\mathfrak{A} \models P(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ sse $(\tau_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \tau_k^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{A}}$ sse (h é isomorfismo)
$(h(\tau_1^{\mathfrak{A}}), \ldots, h(\tau_k^{\mathfrak{A}})) \in P^{\mathfrak{B}}$ sse (**Fato**)
$(\tau_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, \tau_k^{\mathfrak{B}}) \in P^{\mathfrak{B}}$ sse $\mathfrak{B} \models P(\tau_1, \ldots, \tau_k)$.

Passo indutivo $\mathbf{P}(n) \Rightarrow \mathbf{P}(n+1)$: Assuma que vale $\mathbf{P}(n)$ ($n \geq 0$). Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Sigma\text{-}Str$ tal que $\mathfrak{A} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{B}$, e seja $\varphi \in SENT(\Sigma)$ tal que $l(\varphi) = n + 1$. Provaremos que $\mathfrak{A} \models \varphi$ sse $\mathfrak{B} \models \varphi$.
Caso 1: $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$.
Logo $\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$ sse $\mathfrak{A} \models \psi_1$ e $\mathfrak{A} \models \psi_2$ sse (hipótese de indução)
$\mathfrak{B} \models \psi_1$ e $\mathfrak{B} \models \psi_2$ sse $\mathfrak{B} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$.
Caso 2: $\varphi = \neg\psi$.
Logo $\mathfrak{A} \models \neg\psi$ sse $\mathfrak{A} \not\models \psi$ sse (hipótese de indução) $\mathfrak{B} \not\models \psi$ sse $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.
Caso 3: $\varphi = \forall x\psi$.

Logo, $\mathfrak{A} \models \forall x\psi$ sse, para todo $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi[a]$. Observe que $VAR(\psi) \subseteq \{x\}$. Considere a assinatura Σ' obtida de Σ acrescentando uma nova constante c. Logo, $\mathfrak{A}_a := \langle \mathfrak{A}; a \rangle$ e $\mathfrak{B}_{h(a)} := \langle \mathfrak{B}; h(a) \rangle$ são Σ'-estruturas. Aqui, $\mathfrak{A}_a$ é a expansão de $\mathfrak{A}$ tal que $c^{\mathfrak{A}} = a$ (idem com $\mathfrak{B}_{h(a)}$). Além do mais, $h : \mathfrak{A}_a \to \mathfrak{B}_{h(a)}$ é um isomorfismo. É óbvio que $\mathfrak{A} \models \psi[a]$ sse $\mathfrak{A}_a \models \psi^x_c$, e $\mathfrak{B} \models \psi[h(a)]$ sse $\mathfrak{B}_{h(a)} \models \psi^x_c$ para todo $a \in A$. Logo: $\mathfrak{A} \models \forall x\psi$ sse, para todo $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi[a]$ sse, para todo $a \in A$, $\mathfrak{A}_a \models \psi^x_c$ sse (por hipótese de indução) $\mathfrak{B}_{h(a)} \models \psi^x_c$ para todo $a \in A$ sse $\mathfrak{B} \models \psi[h(a)]$ para todo $a \in A$ sse (h bijetora) $\mathfrak{B} \models \psi[b]$ para todo $b \in B$ sse $\mathfrak{B} \models \forall x\psi$.

Vemos então que $\mathbf{P}(n+1)$ é verdadeira. Isto conclui a demonstração. ■

A noção de *estruturas elementares equivalentes* repousa na noção de sentenças. Gostaríamos de definir uma noção análoga envolvendo fórmulas em geral. A razão é que a partir de fórmulas (em geral) podemos aplicar raciocínios por indução (na complexidade da fórmula), enquanto que trabalhando somente com sentenças, esses argumentos não funcionam (subfórmula de sentença não é sentença, em geral). Observe que, se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e φ é fórmula atômica, então

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \text{ sse } \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}] \text{ para toda seqüência } \vec{a} = a_1 \dots a_n \text{ em } A.$$

Queremos estender essa propriedade para fórmulas em geral.

Definição 1.19 Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Sigma\text{-}Str$ tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Dizemos que $\mathfrak{A}$ é uma *sub-estrutura elementar* de $\mathfrak{B}$, e que $\mathfrak{B}$ é uma *extensão elementar* de $\mathfrak{A}$, se $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}]$ para toda $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in FOR(\Sigma)$ e para toda seqüência $\vec{a} = a_1 \dots a_n$ em A. Nesse caso, escrevemos $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. ■

Definição 1.20 Uma imersão $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ (isto é, $\mathfrak{A} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{B}|_{h(A)}$) é uma *imersão elementar* (ou *mergulho*) de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ se:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \dots a_n] \text{ sse } \mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1) \dots h(a_n)]$$

para toda $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in FOR(\Sigma)$ e para toda seqüência $a_1 \dots a_n$ em A. ■

Observação 1.21 Se $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é apenas uma imersão (não elementar), então somente podemos afirmar que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \dots a_n]$ sse $\mathfrak{B}|_{h(A)} \models \varphi[h(a_1) \dots h(a_n)]$. ■

Exemplo 1.22 A inclusão $h : \langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle \to \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ é uma imersão, mas $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \exists x(x^2 \approx y)[h(2)]$ e $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle \not\models \exists x(x^2 \approx y)[2]$. Logo, a inclusão h não é um mergulho. ■

Logo, se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ sse a injeção de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ é uma imersão elementar.

Se existir uma imersão elementar de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ dizemos que $\mathfrak{A}$ é *elementarmente imersível* (ou *mergulhável*) em $\mathfrak{B}$.

Como $\prec$ é definido em termos de fórmulas enquanto que $\equiv$ é definido em termos de sentenças, a noção $\prec$ é mais fácil de manipular do que a noção $\equiv$ (pelos motivos assinalados antes).

Observação 1.23 $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ implica $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. A recíproca é falsa. Com efeito: se $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n]$ sse $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1 \ldots a_n]$ para todo $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ e para toda $a_1 \ldots a_n$ em A. Em particular, se φ é sentença, então $\mathfrak{A} \models \varphi$ sse $\mathfrak{B} \models \varphi$, donde $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Considere agora $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}^+, < \rangle$ e $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$, onde $<$ é a ordem estrita usual. É claro que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Por outro lado $h : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ dada por $h(x) := x - 1$ é uma bijeção, e $n < m$ sse $h(n) < h(m)$. Logo, $\mathfrak{A} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{B}$. Provaremos que $\mathfrak{A} \not\prec \mathfrak{B}$ (ainda tendo $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$). Seja $\varphi(v_0)$ a fórmula $\neg \exists v_1 P(v_1, v_0)$. Aqui, P é um símbolo de predicado binário tal que $P^{\mathfrak{A}} = <$ e $P^{\mathfrak{B}} = <$. Logo $\mathfrak{A} \models \varphi[1]$ mas $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[1]$ (pois $0 < 1$ em $\mathfrak{B}$), daqui $\mathfrak{A} \not\prec \mathfrak{B}$. ■

Daremos a seguir um critério para determinar se uma extensão de uma estrutura é elementar ou não. Previamente introduzimos a seguinte notação. Dadas $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ e $s : \mathbb{N} \to A$ tal que $s(i_j) = a_j$ se $x_j = v_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, então $\mathfrak{A} \models_s \varphi$ denota $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n]$ (bem definido, pela Proposição 1.15). Por outro lado, dados $s : \mathbb{N} \to A$, $a \in A$ e $x = v_i \in \mathcal{V}$, então $s^x_a : \mathbb{N} \to A$ é a seqüência tal que

$$s^x_a(j) = \begin{cases} s(j) & \text{se } j \neq i \\ a & \text{se } j = i \end{cases} .$$

Provaremos então o seguinte: para ter $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ é condição necessária e suficiente que, se existe testemunha em B de $\varphi(x)$ (interpretando as outras variáveis livres de φ em A) então deve existir alguma testemunha de $\varphi(x)$ em A.

Proposição 1.24 Suponha que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ sse para toda fórmula φ de $\mathbb{L}_\Sigma$, para toda variável x e para toda seqüência s em $A^{\mathbb{N}}$, se $\mathfrak{B} \models_s \exists x\varphi$, então existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models_{s^x_a} \varphi$.

Demonstração: Suponha que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, e sejam φ, x e s tais que $\mathfrak{B} \models_s \exists x\varphi$. Suponha que as variáveis livres de $\exists x\varphi$ são exatamente $v_{i_1}, \ldots, v_{ik}$. Logo $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi[s(i_1) \ldots s(i_k)]$, donde $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[s(i_1) \ldots s(i_k)]$, pois $s(i_j) \in A$ e $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Daqui existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a; s(i_1) \ldots s(i_k)]$, donde $\mathfrak{B} \models \varphi[a; s(i_1) \ldots s(i_k)]$, e então $\mathfrak{B} \models_{s^x_a} \varphi$ para algum $a \in A$.

Reciprocamente, suponha agora que

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} \models_s \exists x\varphi \text{ implica } \mathfrak{B} \models_{s^x_a} \varphi \text{ para algum } a \in A \\ \text{para toda fórmula } \varphi \text{ e toda } s \in A^{\mathbb{N}}. \end{array}\right] (*)$$

Provaremos que

$$\mathfrak{A} \models_s \varphi \text{ sse } \mathfrak{B} \models_s \varphi \text{ para toda fórmula } \varphi \text{ e toda } s \in A^{\mathbb{N}} \qquad (**)$$

por indução em $l(\varphi)$. Se $l(\varphi) = 0$ então vale $(**)$ pois $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Os casos $\varphi = \neg\psi$ e $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ são triviais. Se $\varphi = \exists x\psi$, e $\mathfrak{A} \models_s \psi$ sse $\mathfrak{B} \models_s \psi$ para toda $s \in A^{\mathbb{N}}$, provaremos que $\mathfrak{A} \models_s \varphi$ sse $\mathfrak{B} \models_s \varphi$ para toda $s \in A^{\mathbb{N}}$. (Note que não estamos perdendo generalidade na prova pela substituição de $\forall x\psi$ por $\exists x\psi$, pois $\mathfrak{A} \models_s \forall x\psi$ sse $\mathfrak{A} \not\models_s \exists x\neg\psi$. Veja a Observação 1.25.) Se $\mathfrak{A} \models_s \exists x\psi$ então existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash_{s^x_a} \psi$. Dado que $s^x_a \in A^{\mathbb{N}}$, então $\mathfrak{B} \vDash_{s^x_a} \psi$, por hipótese de indução, donde $\mathfrak{B} \vDash_s \exists x\psi$. Reciprocamente, se $\mathfrak{B} \vDash_s \exists x\psi$ para $s \in A^{\mathbb{N}}$ então $\mathfrak{B} \vDash_{s^x_a} \psi$ para algum $a \in A$, por $(*)$. Dado que $s^x_a \in A^{\mathbb{N}}$ então $\mathfrak{A} \vDash_{s^x_a} \psi$, por hipótese de indução, donde $\mathfrak{A} \vDash_s \exists x\psi$. ■

Observação 1.25 Por única vez, e para convencer o leitor, provaremos que não estamos perdendo generalidade na prova por indução de $(**)$ a partir de $(*)$ considerando o caso $\varphi = \exists x\psi$ no lugar de $\varphi = \forall x\psi$. Seja então $\varphi = \forall x\psi$ e assuma que $\mathfrak{A} \vDash_s \psi$ sse $\mathfrak{B} \vDash_s \psi$ para toda $s \in A^{\mathbb{N}}$. Suponha que $\mathfrak{A} \vDash_s \forall x\psi$, logo $\mathfrak{A} \vDash_{s^x_a} \psi$ para todo $a \in A$, donde

$$\mathfrak{B} \vDash_{s^x_a} \psi \text{ para todo } a \in A. \qquad (***)$$

Suponha que existe $b \in B$ tal que $\mathfrak{B} \nvDash_{s^x_b} \psi$; logo existe $b \in B$ tal que $\mathfrak{B} \vDash_{s^x_b} \neg\psi$, donde $\mathfrak{B} \vDash_s \exists x\neg\psi$ (e $s \in A^{\mathbb{N}}$). Por $(*)$, existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \vDash_{s^x_a} \neg\psi$, o que contradiz $(***)$. Daqui $\mathfrak{B} \vDash_{s^x_b} \psi$ para todo $b \in B$, donde $\mathfrak{B} \vDash_s \forall x\psi$. Assim, $\mathfrak{A} \vDash_s \forall x\psi$ implica $\mathfrak{B} \vDash_s \forall x\psi$ (para toda $s \in A^{\mathbb{N}}$). Reciprocamente, suponha que $s \in A^{\mathbb{N}}$ é tal que $\mathfrak{B} \vDash_s \forall x\psi$. Logo $\mathfrak{B} \vDash_{s^x_b} \psi$ para todo $b \in B$; em particular $\mathfrak{B} \vDash_{s^x_a} \psi$ para todo $a \in A$, donde $\mathfrak{A} \vDash_{s^x_a} \psi$ para todo $a \in A$ (hipótese de indução); logo $\mathfrak{A} \vDash_s \forall x\psi$. ■

O seguinte resultado segue imediatamente.

Corolário 1.26 Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ sse, para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ e toda $a_1 \ldots a_{n-1}$ em A: se $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1 \ldots a_{n-1}; b]$ para algum $b \in B$, então existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1 \ldots a_{n-1}; a]$. ■

Exemplo 1.27 Sejam $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ e $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ ($<$ é a ordem usual). Provaremos usando o corolário anterior que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, logo $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Daqui $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ não distinguem sentenças na assinatura Σ que contém apenas o símbolo $<$.

Seja então $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathbb{L}_\Sigma$. Sejam $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1 \ldots a_{n-1}; b]$. Sem perda de generalidade, assumamos que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-1}$.

Se $b \in \mathbb{Q}$, então, não temos nada a provar.

Se $b \notin \mathbb{Q}$, suponha que $a_k < b < a_{k+1}$, com $k + 1 \leq n - 1$ (os casos $b < a_1$ ou $a_{n-1} < b$ são deixados como exercício). Seja $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a_k < c < a_{k+1}$.

Fato: Existe um isomorfismo de $\mathfrak{B}$ em $\mathfrak{B}$ que deixa fixos os a_i e que leva b em c.

Com efeito, considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq a_k \text{ ou } a_{k+1} \leq x \\[2ex] \dfrac{c - a_k}{b - a_k}\,(x - a_k) + a_k & \text{se } a_k \leq x \leq b \\[2ex] \dfrac{a_{k+1} - c}{a_{k+1} - b}\,(x - b) + c & \text{se } b \leq x \leq a_{k+1} \end{cases} .$$

É fácil ver que h tem as propriedades requeridas: h é bijeção; $x < y$ sse $h(x) < h(y)$; $h(a_i) = a_i$; e $h(b) = c$. Em particular, h é uma imersão elementar de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$. De fato: seja $(x < y)$ uma fórmula atômica de $\mathbb{L}_\Sigma$, logo

$$\mathfrak{B} \models (x < y)[a; b] \text{ sse } a < b \text{ sse } h(a) < h(b) \text{ sse } \mathfrak{B} \models (x < y)[h(a); h(b)].$$

Os casos $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ e $\neg\psi$ são óbvios. Finalmente

$$\mathfrak{B} \models \forall x\psi[\vec{a}] \text{ sse, para todo } a \in \mathbb{R},\ \mathfrak{B} \models \psi^x_y[a; \vec{a}] \text{ sse (hipótese de indução)}$$

$$\mathfrak{B} \models \psi^x_y[h(a); h(a_1) \dots h(a_n)] \text{ para todo } a \in \mathbb{R} \text{ sse } (h \text{ bijeção})$$

$$\mathfrak{B} \models \psi^x_y[b; h(a_1) \dots h(a_n)] \text{ para todo } b \in \mathbb{R} \text{ sse } \mathfrak{B} \models \forall x\psi[h(a_1) \dots h(a_n)].$$

Isto prova que h é uma imersão elementar, concluindo a demonstração do **Fato**.

Ora bem, dado que $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1 \dots a_{n-1}; b]$ e h é uma imersão elementar de $\mathfrak{B}$ em $\mathfrak{B}$, então $\mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1) \dots h(a_{n-1}); h(b)]$, isto é: $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1 \dots a_{n-1}; c]$. Ou seja: dados $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ e $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$, se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1 \dots a_{n-1}; b]$ então existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1 \dots a_{n-1}; c]$. Pelo corolário acima temos que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. ■

Definição 1.28 Seja A um conjunto, α um ordinal e $s \in A^\alpha$. A seqüência s é uma *enumeração de* A se $A = \{s(\beta) : \beta \in \alpha\}$. A seqüência s é uma *enumeração de* A *sem repetições* se s é uma bijeção. ■

Definição 1.29 Seja $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\Sigma)$, e α um ordinal. Considere a assinatura Σ_α obtida de Σ acrescentando um conjunto $\{c_\xi : \xi \in \alpha\}$ de novas constantes; assumimos que $c_\xi \neq c_\zeta$ se $\xi \neq \zeta$. Finalmente, seja $\mathbb{L}_\alpha := \mathbb{L}(\Sigma_\alpha)$ a linguagem obtida de Σ_α. ■

Note que as estruturas para $\mathbb{L}_\alpha$ são da forma $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}; s\rangle$ onde $\mathfrak{A}$ é uma estrutura para $\mathbb{L}$ e $s \in A^\alpha$ tal que $c_\xi^{\mathfrak{A}'} = s(\xi)$ para cada $\xi \in \alpha$.

Proposição 1.30 Sejam $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura e $s \in A^\alpha$ uma enumeração de A. Se $\mathfrak{B}$ é outra Σ-estrutura, então $\mathfrak{A}$ é elementarmente imersível em $\mathfrak{B}$ sse existe $s' \in B^\alpha$ tal que $\langle \mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}; s'\rangle$ como Σ_α-estruturas.

Demonstração: Suponha que $\mathfrak{A}$ é elementarmente imersível em $\mathfrak{B}$, isto é, existe $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \dots a_n]$ sse $\mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1) \dots h(a_n)]$ para toda $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ e $a_1 \dots a_n$ em A. Seja φ uma sentença sobre $\mathbb{L}_\alpha$, e considere $s' = h \circ s$. Logo $s' \in B^\alpha$. Sejam $c_{\xi_1}, \dots, c_{\xi_n}$ as constantes novas que ocorrem em φ, e considere variáveis novas $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ (isto é, variáveis que não ocorrem ligadas em φ), todas diferentes entre si. Logo $\varphi = \psi^{x_{j_1}}_{c_{\xi_1}} \dots ^{x_{j_n}}_{c_{\xi_n}}$ para alguma Σ-fórmula $\psi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ com exatamente $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ como variáveis livres. Assim:

$\langle\mathfrak{A}; s\rangle \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{A} \vDash \psi[s(\xi_1)\dots s(\xi_n)]$

sse $\mathfrak{B} \vDash \psi[s'(\xi_1)\dots s'(\xi_n)]$ sse $\langle\mathfrak{B}; s'\rangle \vDash \varphi$.

Logo $\langle\mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle\mathfrak{B}; s'\rangle$ (como Σ_α-estruturas) para $s' = h \circ s$.

Reciprocamente, suponha que $\langle\mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle\mathfrak{B}; s'\rangle$ para alguma $s' \in B^\alpha$. Defina $h : A \to B$ como $h(s(\xi)) = s'(\xi)$ para $\xi \in \alpha$.

Fato: h está bem definida, isto é: se $a \in A$ tal que $a = s(\xi) = s(\xi')$ para $\xi, \xi' \in \alpha$, então $s'(\xi) = s'(\xi')$.
Com efeito: se $s(\xi) = s(\xi')$ então $c_\xi^{\langle\mathfrak{A};s\rangle} = c_{\xi'}^{\langle\mathfrak{A};s\rangle}$, donde $\langle\mathfrak{A}; s\rangle \vDash (c_\xi \approx c_{\xi'})$. Como $\langle\mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle\mathfrak{B}; s'\rangle$ e $(c_\xi \approx c_{\xi'})$ é uma sentença de $\mathbb{L}_\alpha$, então $\langle\mathfrak{B}; s'\rangle \vDash (c_\xi \approx c_{\xi'})$. Daqui $s'(\xi) = c_\xi^{\langle\mathfrak{B};s'\rangle} = c_{\xi'}^{\langle\mathfrak{B};s'\rangle} = s'(\xi')$, provando o **Fato**.

Por outro lado $s : \alpha \to A$ é sobrejetora, logo $h : A \to B$ dada por $h(a) = s'(\xi)$ se $a = s(\xi)$ para algum $\xi \in \alpha$, está bem definida. Seja $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula de $\mathbb{L}$ com (no máximo) $x_1, \dots, x_n$ livres, e $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$. Seja $\xi_i \in \alpha$ tal que $s(\xi_i) = a_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Logo:

$\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1 \dots a_n]$ sse $\langle\mathfrak{A}; s\rangle \vDash \varphi^{x_1}_{c_{\xi_1}} \cdots^{x_n}_{c_{\xi_n}}$ sse $\langle\mathfrak{B}; s'\rangle \vDash \varphi^{x_1}_{c_{\xi_1}} \cdots^{x_n}_{c_{\xi_n}}$

(pois $\langle\mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle\mathfrak{B}; s'\rangle$ com relação a $\mathbb{L}_\alpha$, e $\varphi^{x_1}_{c_{\xi_1}} \cdots^{x_n}_{c_{\xi_n}}$ é uma sentença de $\mathbb{L}_\alpha$)

sse $\mathfrak{B} \vDash \varphi[s'(\xi_1)\dots s'(\xi_n)]$ sse $\mathfrak{B} \vDash \varphi[h(a_1)\dots h(a_n)]$ (pela definição de h).

Daqui $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é uma imersão elementar. ■

Observação 1.31 Um morfismo $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ satisfaz:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1 \dots a_n] \text{ sse } \mathfrak{B} \vDash \varphi[h(a_1)\dots h(a_n)] \\ \text{para toda } \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ e para toda } (a_1, \dots, a_n) \in A^n \end{array}\right] (1)$$

sse h é uma imersão elementar de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$.

Com efeito: suponha que h satisfaz (1). Basta provar que h é um morfismo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ e que h é injetora.

1. $(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}}$ sse $\mathfrak{A} \vDash P(x_1, \dots, x_n)[a_1 \dots a_n]$ sse, por (1), $\mathfrak{B} \vDash P(x_1, \dots, x_n)[h(a_1)\dots h(a_n)]$ sse $(h(a_1), \dots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$.

2. $\mathfrak{A} \vDash (x \approx f(x_1, \dots, x_n))[f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n); a_1 \dots a_n]$; logo, por (1), $\mathfrak{B} \vDash (x \approx f(x_1, \dots, x_n))[h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)); h(a_1) \dots h(a_n)]$. Daqui $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ para todo $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$.

3. $\mathfrak{A} \vDash (x \approx c)[c^{\mathfrak{A}}]$ para toda constante c; logo, por (1), $\mathfrak{B} \vDash (x \approx c)[h(c^{\mathfrak{A}})]$, donde $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ para toda constante c.

Daqui $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é um morfismo. Suponha que $a \neq b$ em A; logo $\mathfrak{A} \models \neg(x \approx y)[a; b]$, donde, por (1), $\mathfrak{B} \models \neg(x \approx y)[h(a); h(b)]$, isto é, $h(a) \neq h(b)$. Logo h é injetora. Por (1) é óbvio que $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é uma imersão elementar. A recíproca é óbvia. ■

Proposição 1.32 Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ duas estruturas sobre $\mathbb{L}$ da mesma cardinalidade, e seja $s \in A^\alpha$ uma enumeração de A. Então:

1. Se $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, então existe $s' \in B^\alpha$ tal que $\langle \mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}; s'\rangle$.
2. Se s' é uma enumeração de B e $\langle \mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}; s'\rangle$, então $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.
3. Se $A \subseteq B$ então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ sse $\langle \mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}; s\rangle$.

Demonstração: (1) Suponha que $\mathfrak{A} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{B}$. Seja $s' = h \circ s \in B^\alpha$. Por indução na complexidade de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ podemos provar que

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s(\xi_1) \ldots s(\xi_n)] \text{ sse } \mathfrak{B} \models \varphi[s'(\xi_1) \ldots s'(\xi_n)] \qquad (*)$$

(deixamos como exercício para o leitor). Seja agora φ uma sentença de $\mathbb{L}_\alpha$; logo $\varphi = \psi^{x_1}_{c_{\xi_1}} \ldots ^{x_n}_{c_{\xi_n}}$ para alguma $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{L}$. Portanto $\langle \mathfrak{A}; s\rangle \models \varphi$ sse $\langle \mathfrak{A}; s\rangle \models \psi^{x_1}_{c_{\xi_1}} \ldots ^{x_n}_{c_{\xi_n}}$ sse $\mathfrak{A} \models \psi[s(\xi_1) \ldots s(\xi_n)]$ sse (usando $(*)$) $\mathfrak{B} \models \psi[s'(\xi_1) \ldots s'(\xi_n)]$ sse $\langle \mathfrak{B}; s'\rangle \models \psi^{x_1}_{c_{\xi_1}} \ldots ^{x_n}_{c_{\xi_n}}$ sse $\langle \mathfrak{B}; s'\rangle \models \varphi$. Logo $\langle \mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}; s'\rangle$.

(2) Seja $s' \in B^\alpha$ uma enumeração de B tal que $\langle \mathfrak{A}; s\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}; s'\rangle$. Pela proposição anterior (e a sua prova), a função $h : A \to B$ dada por $h(x) := s'(\xi)$ se $x = s(\xi)$ $(\xi \in \alpha)$, está bem definida, constituindo uma imersão elementar de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n] \text{ sse } \mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1) \ldots h(a_n)] \\ \quad \text{para toda } \Sigma\text{-fórmula } \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ e para toda } (a_1, \ldots, a_n) \in A^n. \end{array}\right] (**)$$

Note que h é injetora pois, dados $a \neq b$ em A: $\mathfrak{A} \models \neg(x \approx y)[a; b]$. Logo, por $(**)$, $\mathfrak{B} \models \neg(x \approx y)[h(a); h(b)]$, isto é, $h(a) \neq h(b)$.

Por outro lado s' é uma enumeração de B. Assim, seja $b \in B$. Logo, $b = s'(\xi)$ para algum $\xi \in \alpha$. Seja $a = s(\xi) \in A$; Logo $h(a) = s'(\xi) = b$. Portanto h é sobrejetora, isto é, h é bijetora donde, por $(**)$, $\mathfrak{A} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{B}$. Com efeito, dado P predicado n-ário e $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, então $(a_1, \ldots, a_n) \in P^\mathfrak{A}$ sse $\mathfrak{A} \models P(x_1, \ldots, x_n)[a_1 \ldots a_n]$ sse $\mathfrak{B} \models P(x_1, \ldots, x_n)[h(a_1) \ldots h(a_n)]$ sse $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^\mathfrak{B}$.

(3) Conseqüência direta da prova da proposição anterior (caso particular em que $s' = s$ e $h = id_A$).

2 Modelos Construídos a partir de Constantes

2.1 Completude e Compacidade

Provaremos o teorema de completude dos sistemas axiomáticos de primeira ordem (tese de doutorado de Gödel, 1930), a partir do qual sai imediatamente o teorema da compacidade.

A seguir analizaremos algumas conseqüências importantes do teorema da compacidade.

Definição 2.1 Seja Σ uma assinatura. Um *sistema axiomático* $\mathcal{K}$ *sobre* Σ é composto do seguinte:

- *Axiomas:* Todas as instâncias dos seguintes esquemas de fórmulas de Σ (onde $(\delta \Rightarrow \gamma)$ denota $\neg(\delta \wedge \neg\gamma)$ e x é uma variável arbitrária):

  1. *Axiomas Proposicionais:*
     $\delta \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \delta)$
     $(\gamma_1 \Rightarrow (\gamma_2 \Rightarrow \gamma_3)) \Rightarrow ((\gamma_1 \Rightarrow \gamma_2) \Rightarrow (\gamma_1 \Rightarrow \gamma_3))$
     $(\neg\gamma \Rightarrow \neg\delta) \Rightarrow ((\neg\gamma \Rightarrow \delta) \Rightarrow \gamma)$

  2. *Axiomas de Primeira Ordem:*
     $\forall x(\gamma \Rightarrow \delta) \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \forall x\delta)$ se x não ocorre livre em γ
     $\forall x\gamma \Rightarrow \gamma^x_\tau$ se τ é um termo livre para x em γ

  3. *Axiomas da Identidade:*
     $(x \approx x)$
     $(x \approx y) \Rightarrow (\tau^x_z \approx \tau^y_z)$ para todo termo τ e variáveis x, y, z
     $(x \approx y) \Rightarrow (\gamma^x_z \Rightarrow \gamma^y_z)$ se x e y são livres para z em γ (atômica)

  4. *Axiomas Não-Lógicos (ou Próprios):*
     Um conjunto arbitrário $\mathcal{A}$ (eventualmente vazio) de fórmulas.

- *Regras de Inferência:*

  1. Modus Ponens: $\dfrac{\gamma, \quad (\gamma \Rightarrow \delta)}{\delta}$ (MP)
  2. Generalização: $\dfrac{\gamma}{\forall x\, \gamma}$ (GEN)

■

Os axiomas pertencentes ao conjunto $\mathcal{A}x$ formado pelas fórmulas de (1)-(3) são chamados de *Axiomas Lógicos*.

Definição 2.2 Seja $\mathcal{K}$ um sistema axiomático sobre Σ, e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de Σ-fórmulas. Uma *prova em* $\mathcal{K}$ *de* φ *a partir de* Γ é uma seqüência finita $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ de Σ-fórmulas tais que $\varphi_n = \varphi$ e, para todo $i \leq n$:

1. $\varphi_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}x \cup \Gamma$, ou
2. φ_i é obtido de φ_j (que é da forma $\varphi_k \Rightarrow \varphi_i$) e φ_k (onde $j, k < i$) por (MP), ou
3. φ_i é da forma $\forall x\varphi_j$ (com $j < i$) e é obtido de φ_j por (GEN).

Escreveremos $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ ou, simplesmente, $\Gamma \vdash \varphi$, se existir uma prova de φ a partir de Γ em $\mathcal{K}$, e diremos que φ *é demonstrável em* $\mathcal{K}$ *a partir de* Γ. ∎

O seguinte resultado é fácil de provar por indução no comprimento de uma prova de φ a partir de Γ:

Proposição 2.3 *(Teorema da Correção)* Seja $\mathcal{K}$ sem axiomas não-lógicos, isto é, tal que $\mathcal{A} = \emptyset$. Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$, isto é: para toda estrutura $\mathfrak{A}$, se $\mathfrak{A} \models \psi$ para toda $\psi \in \Gamma$, então $\mathfrak{A} \models \varphi$. ∎

Provaremos agora a recíproca, isto é, o Teorema da Completude:

$$\Gamma \models \varphi \text{ implica } \Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \varphi.$$

A prova que apresentaremos aqui é devida a Henkin (1949), e vale para linguagens de cardinalidade arbitrária.

Definição 2.4 Uma teoria de primeira ordem $\mathcal{K}$ é *consistente* se existe uma fórmula (ou, equivalentemente, uma sentença) φ tal que $\nvdash_{\mathcal{K}} \varphi$. Um conjunto T de sentenças é *consistente* (em $\mathcal{K}$) se existe φ tal que $T \nvdash_{\mathcal{K}} \varphi$. ∎

A partir de agora, e até o fim desta seção, trabalharemos com a teoria $\mathcal{K}_0$ tal que $\mathcal{A} = \emptyset$, a menos que seja indicado o contrário. Portanto, "consistente" significa "consistente em $\mathcal{K}_0$". Nosso próximo objetivo é provar o seguinte: se T é um conjunto consistente de sentenças, então T tem um modelo. Logo, se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível, portanto $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ e então $\Gamma \vdash \varphi$. Isto é, obteremos o teorema da completude.

O esquema da prova do teorema da completude é portanto o seguinte:
(1) Todo conjunto consistente T pode ser estendido a um conjunto $\overline{T}$ consistente e com "boas propriedades".
(2) Todo conjunto $\overline{T}$ consistente e com "boas propriedades" tem um modelo.

Definição 2.5 *("Boa propriedade")* Seja T um conjunto de Σ-sentenças, e $C \subseteq \mathcal{C}$ um conjunto de constantes de Σ. Dizemos que C é um *conjunto de testemunhas para* T *em* $\mathbb{L}_\Sigma$ se, para toda fórmula φ em $\mathbb{L}_\Sigma$ com no máximo uma variável livre (digamos, x), existe $c \in C$ tal que $T \vdash \exists x\varphi \Rightarrow \varphi^x_c$. Dizemos que T *tem testemunhas em* $\mathbb{L}_\Sigma$ se existe um conjunto de testemunhas para T em $\mathbb{L}_\Sigma$. ∎

Daqui em diante, poderemos escrever $\varphi(c)$ no lugar de φ^x_c, quando não houver confusão. Lembremos da Definição 1.6 de cardinalidade de uma linguagem $\mathbb{L}_\Sigma$ (que nada mais é do que o cardinal do conjunto $FOR(\Sigma)$ de fórmulas de $\mathbb{L}_\Sigma$).

Lema 2.6 Seja T um conjunto consistente de sentenças de $\mathbb{L} = \mathbb{L}_\Sigma$. Seja C um conjunto de símbolos novos de constantes tal que a cardinalidade de C

é a cardinalidade de $\mathbb{L}_\Sigma$. Finalmente, seja $\mathbb{L}' = \mathbb{L}_{\Sigma'}$, onde Σ' é obtida de Σ acrescentando C a $\mathcal{C}$ como novas constantes. Então T pode ser estendido para um conjunto consistente T' de sentenças em $\mathbb{L}'$ com C como conjunto de testemunhas em $\mathbb{L}'$.

Demonstração: Seja $\alpha = \|\mathbb{L}\|$. Defina $c = \{c_\xi : \xi \in \alpha\}$ um conjunto de novos símbolos, onde $c_\xi \neq c_\zeta$ se $\xi \neq \zeta$ $(\xi, \zeta \in \alpha)$. Considere Σ' obtida de Σ acrescentando C a $\mathcal{C}$, e seja $\mathbb{L}' = \mathbb{L}_{\Sigma'}$. É claro que $\|\mathbb{L}'\| = \|\mathbb{L}\| = \alpha$, logo podemos arranjar as fórmulas de $\mathbb{L}'$ com no máximo uma variável livre numa seqüência $(\varphi_\xi)_{\xi\in\alpha}$.

Suponha que $\varphi_\xi = \varphi_\xi(x_\xi)$ (se φ_ξ é sentença, estipulamos $x_\xi = v_0$). Observe que, necessariamente, existem $\xi \neq \zeta$ tais que $x_\xi = x_\zeta$. Definiremos uma seqüência crescente de conjuntos de Σ-sentenças:

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_\xi \subseteq \ldots \quad (\xi \in \alpha),$$

e uma seqüência $(d_\xi)_{\xi\in\alpha}$ de constantes de C, tais que:

1. T_ξ é consistente em $\mathbb{L}_\Sigma$, para todo $\xi \in \alpha$;
2. $T_{\xi+1} = T_\xi \cup \{\exists x_\xi \varphi_\xi \Rightarrow \varphi_\xi(d_\xi)\}$ (se $\xi + 1 \in \alpha$);
3. $T_\xi = \bigcup_{\zeta\in\xi} T_\zeta$ (se $\xi \in \alpha$, ξ ordinal limite).

Construção das seqüências: Suponha que T_ξ já foi definido. Observe que em T_ξ acrescentamos, no máximo, ξ sentenças de $\mathbb{L}'$ que não são sentenças de $\mathbb{L}$ (dizemos "no máximo" porque algumas fórmulas φ_ξ podem ser sentenças). Cada uma dessas sentenças usa finitas constantes c_ζ de C, logo $A_\xi = \{\zeta \in \alpha : c_\zeta$ não foi utilizada em $T_\xi\}$ é não vazio, pois α é infinito. Seja ζ o elemento mínimo de A_ξ, isto é, c_ζ é a primeira constante de C que não ocorre em T_ξ, e defina $d_\xi := c_\zeta$ (observe que acabamos de usar o fato de que o ordinal α é bem ordenado pela relação de pertinência $\in$). Isto conclui a definição de $(T_\xi)_{\xi\in\alpha}$ e $(d_\xi)_{\xi\in\alpha}$.

Provaremos a seguir, por indução transfinita, que cada T_ξ é consistente. Suponha então que $T_{\xi+1}$ é inconsistente; logo $T_\xi \vdash \neg(\exists x_\xi \varphi_\xi \Rightarrow \varphi_\xi(d_\xi))$ donde $T_\xi \vdash \exists x_\xi \varphi_\xi \wedge \neg\varphi_\xi(d_\xi)$. Como d_ξ não ocorre em T_ξ, podemos substituir d_ξ por x_ξ numa prova de $\exists x_\xi \varphi_\xi \wedge \neg\varphi_\xi(d_\xi)$ a partir de T_ξ, obtendo, por (GEN), $T_\xi \vdash \forall x_\xi(\exists x_\xi \varphi_\xi \wedge \neg\varphi_\xi(x_\xi))$ e logo: $T_\xi \vdash \exists x_\xi \varphi_\xi \wedge \neg\exists x_\xi \varphi_\xi$, uma contradição (pois T_ξ é consistente por hipótese de indução). Por outro lado, dado $\xi \in \alpha$ tal que ξ é ordinal limite, é óbvio que $T_\xi := \bigcup_{\zeta\in\xi} T_\zeta$ é consistente (assumindo, por hipótese de indução, que todo T_ζ é consistente). Isto sai do fato de que, por definição, toda prova em $\mathcal{K}$ usa finitas hipóteses.

Seja agora $T' := \bigcup_{\xi\in\alpha} T_\xi$. É óbvio que T' é uma extensão consistente de T. Se φ é uma fórmula de $\mathbb{L}'$ com no máximo uma variável livre, então existe $\xi \in \alpha$ tal que $\varphi = \varphi_\xi(x_\xi)$; daqui a sentença $\exists x_\xi \varphi_\xi \Rightarrow \varphi_\xi(d_\xi)$ pertence a $T_{\xi+1}$, portanto pertence a T'. Logo, C é um conjunto de testemunhas para T' em $\mathbb{L}'$. ■

Lema 2.7 Seja T um conjunto consistente de sentenças com conjunto C de testemunhas em $\mathbb{L}$. Então T tem um modelo $\mathfrak{A}$ tal que todo $a \in A$ interpreta alguma constante $c \in C$.

Demonstração: Começamos por considerar dois resultados:

1. *Lema de Lindembaum:* Todo conjunto consistente de Σ-sentenças pode ser estendido a um conjunto maximal consistente de Σ-sentenças.

2. Se um conjunto T de Σ-sentenças tem um conjunto C de testemunhas em $\mathbb{L}_\Sigma$, então toda extensão T' de T em Σ também possui C como conjunto de testemunhas em $\mathbb{L}_\Sigma$.

A partir de (1) e (2), podemos supor que T é maximal consistente em $\mathbb{L}_\Sigma$. Definimos a seguir a seguinte relação em C: $c \sim d$ sse $(c \approx d) \in T$ (sse $T \vdash (c \approx d)$). Dado que C é maximal temos que, pelos axiomas da identidade:

$$\left.\begin{array}{l} c \sim c; \\ c \sim d \text{ implica } d \sim c; \\ c \sim d,\ d \sim e \text{ implica } c \sim e \end{array}\right\} \text{ logo } \sim \text{ é relação de equivalência.}$$

Defina $\widetilde{c} = \{d \in C \ : \ c \sim d\}$ para $c \in C$, e seja $A = \{\widetilde{c} \ : \ c \in C\}$. Dado que C é um conjunto, então $\widetilde{c}$ é um conjunto, e então A é um conjunto ($\neq \emptyset$). Construiremos uma Σ-estrutura $\mathfrak{A}$ com domínio A como segue:

(i) Dado $P \in \mathcal{P}$ de aridade n observe que, pelos axiomas da identidade:

$$T \vdash (P(c_1, \ldots, c_n) \wedge (c_1 \approx d_1) \wedge \ldots \wedge (c_n \approx d_n)) \Rightarrow P(d_1, \ldots, d_n).$$

Logo:

se $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ e $c_i \sim d_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ então $P(d_1, \ldots, d_n) \in T$. $(*)$

Definimos então $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ como: $(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_n) \in P^{\mathfrak{A}}$ sse $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$ (bem definido, por $(*)$).

(ii) Seja d uma constante de Σ. Como $T \vdash \exists v_0(v_0 \approx d)$ e C é um conjunto de testemunhas para T em $\mathbb{L}_\Sigma$, então existe $c \in C$ tal que $T \vdash (c \approx d)$, isto é, $(c \approx d) \in T$ para algum $c \in C$. Por outro lado, se $(c' \approx d) \in T$ para $c' \in C$, então, pelas regras da identidade, $T \vdash ((c \approx d) \wedge (c' \approx d)) \Rightarrow (c \approx c')$, donde $(c \approx c') \in T$, isto é, $c \sim c'$. Definimos então $d^{\mathfrak{A}} := \widetilde{c}$ (bem definida, como acabamos de ver). Em particular, se $c \in C$, então $c^{\mathfrak{A}} = \widetilde{c}$ (pois $(c \approx c) \in T$).

(iii) Seja $f \in \mathcal{F}$ de aridade n, e $c_1, \ldots, c_n$ em C. Dado que $\exists v_0(f(c_1, \ldots, c_n) \approx v_0) \in T$ e C é um conjunto de testemunhas para T em $\mathbb{L}_\Sigma$, então existe $c \in C$ tal que $(f(c_1, \ldots, c_n) \approx c) \in T$. Se $d_i, d \in C$, então

$$T \vdash ((f(c_1, \ldots, c_n) \approx c) \wedge (c_1 \approx d_1) \wedge \ldots \wedge (c_n \approx d_n) \wedge (c \approx d))$$
$$\Rightarrow (f(d_1, \ldots, d_n) \approx d),$$

pelas regras da identidade. Logo, $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$, $f^{\mathfrak{A}}(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_n) = \widetilde{c}$ tal que $(f(c_1, \ldots, c_n) \approx c) \in T$, está bem definida.

Fato: Para toda Σ-sentença φ, $\mathfrak{A} \models \varphi$ sse $\varphi \in T$.
A prova é feita por indução em $l(\varphi)$. Só provaremos o caso $\varphi = \exists x\psi$ (deixamos o resto da prova como exercício para o leitor). Suponha que $\mathfrak{A} \models \exists x\psi$; logo, existe $\widetilde{c} \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[\widetilde{c}]$, donde $\mathfrak{A} \models \psi^x_c$. Daqui $\psi^x_c \in T$, por hipótese de indução. Mas $T \vdash \psi^x_c \Rightarrow \exists x\psi$, logo $\exists x\psi \in T$.

Suponha agora que $\exists x\psi \in T$; como C é um conjunto de testemunhas, existe $c \in C$ tal que $(\exists x\psi \Rightarrow \psi^x_c) \in T$ (pois T é maximal), logo $\psi^x_c \in T$. Por hipótese de indução obtemos $\mathfrak{A} \models \psi^x_c$, donde $\mathfrak{A} \models \psi[\widetilde{c}]$ para $\widetilde{c} \in A$. Daqui $\mathfrak{A} \models \exists x\psi$. Isto conclui a prova do **Fato**.

Portanto: $\mathfrak{A}$ é um modelo de T onde todo elemento de A interpreta alguma constante $c \in C$. Isto conclui a prova do Lema. ■

Lema 2.8 Seja $C \neq \emptyset$ um conjunto de constantes em $\mathbb{L}$, e T um conjunto de sentenças de $\mathbb{L}$. Se T tem um modelo $\mathfrak{A}$ tal que todo $a \in A$ interpreta alguma $c \in C$, então T pode ser estendido a um conjunto T' em $\mathbb{L}$ consistente tal que C é um conjunto de testemunhas.

Demonstração: Seja $T' = \{\varphi \in SENT(\Sigma) \ : \ \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

É claro que $T \subseteq T'$, pois $\mathfrak{A} \models T$. Por outro lado, T' é consistente (por definição). Seja φ uma fórmula com (no máximo) a variável x livre.

Se $\mathfrak{A} \models \neg\exists x\varphi$ então $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi \Rightarrow \varphi^x_c$ para toda $c \in C$, donde $T' \vdash \exists x\varphi \Rightarrow \varphi^x_c$ para qualquer $c \in C$.

Se $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi$ então $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ para algum $a \in A$. Por hipótese, existe $c \in C$ tal que $c^{\mathfrak{A}} = a$. Daqui $\mathfrak{A} \models \varphi^x_c$, donde $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi \Rightarrow \varphi^x_c$. Daqui $T' \vdash \exists x\varphi \Rightarrow \varphi^x_c$ para algum $c \in C$.
Isto prova que C é um conjunto de testemunhas para T' em $\mathbb{L}$. ■

Teorema 2.9 *(Completude estendida)* Seja Γ um conjunto de sentenças de $\mathbb{L}$. Então Γ é consistente sse Γ tem um modelo.

Demonstração: $\Leftarrow$) Óbvio.
$\Rightarrow$) Suponha que Γ é consistente. Considere, pelo Lema 2.6, uma extensão consistente Γ' de Γ em $\mathbb{L}'$ tal que Γ' tem testemunhas em $\mathbb{L}'$. Pelo Lema 2.7, seja $\mathfrak{A}$ um modelo de Γ' (na linguagem $\mathbb{L}'$). Considere o reduto $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ em $\mathbb{L}$ (isto é: $\mathfrak{B}$ é $\mathfrak{A}$ "esquecendo" dos símbolos novos de Γ'). Dado que as sentenças de Γ pertencem a $\mathbb{L}$, então $\mathfrak{B}$ é um modelo de Γ. ■

A partir de agora, denotaremos a cardinalidade de um conjunto X por $\overline{\overline{X}}$.

Corolário 2.10 Toda teoria consistente em $\mathbb{L}$ tem um modelo de cardinalidade $\leq \|\mathbb{L}\|$.

Demonstração: Na prova anterior podemos escolher $\mathfrak{A}$ tal que todo $a \in A$ interpreta uma constante $c \in C$, sendo que $\overline{\overline{C}} = \|\mathbb{L}\|$. Logo $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{C}} = \|\mathbb{L}'\| = \|\mathbb{L}\|$. Isto prova o corolário. ■

Em particular: se uma sentença (numa linguagem enumerável) tem um modelo, então tem um modelo no máximo enumerável (Löwenheim, 1905).

Teorema 2.11 *(Completude de Gödel)* Uma sentença é teorema sse é válida.

Demonstração: $\Rightarrow$) Fácil.
$\Leftarrow$) Suponha que φ é uma sentença tal que $\nvdash \varphi$, logo $\{\neg\varphi\}$ é consistente (pois $\Gamma \nvdash \varphi$ implica que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente). Daqui, pelo Teorema 2.9, existe um modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \nvDash \varphi$, isto é, φ não é válida. ■

Teorema 2.12 *(Compacidade)* Um conjunto de sentenças Γ tem um modelo sse todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tem um modelo.

Demonstração: $\Rightarrow$) Óbvio.
$\Leftarrow$) Se todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tem modelo então, pelo Teorema 2.9, todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito é consistente. Como toda prova é finita, inferimos que Γ é consistente. Usando novamente o Teorema 2.9 inferimos que Γ tem um modelo. ■

Corolário 2.13 Se uma teoria T tem modelos finitos arbitrariamente grandes, então T tem um modelo infinito.

Demonstração: Seja T com modelos finitos arbitrariamente grandes. Estendemos Σ a Σ', onde Σ' é obtida de Σ acrescentando o conjunto $\{c_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ de constantes novas, com $c_n \neq c_m$ se $n \neq m$.

Seja $\Gamma = T \cup \{\neg(c_n \approx c_m) \;:\; n < m,\ n, m \in \mathbb{N}\}$. Seja $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, e $\{c_0, \ldots, c_m\}$ um conjunto de constantes que contém todas as constantes c_i que ocorrem em Γ_0. Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura finita com, no mínimo, $m+1$ elementos $a_0, \ldots, a_m$ satisfazendo T ($\mathfrak{A}$ existe, por hipótese). Seja $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}; a_0, \ldots, a_m \rangle$ a Σ'-estrutura tal que $c_i^{\mathfrak{A}'} = a_i$ se $i \leq m$, e $c_i^{\mathfrak{A}'} = a_0$ para $i > m$. É claro que $\mathfrak{A}'$ é um modelo para Γ_0. Ou seja: todo subconjunto finito de Γ tem um modelos.

Pelo teorema da compacidade, existe um modelo $\mathfrak{A}$ para Γ. Como $\mathfrak{A} \vDash \neg(c_n \approx c_m)$ para $n < m$, então $c_n^{\mathfrak{A}} \neq c_m^{\mathfrak{A}}$ para $n \neq m$. Logo $\{c_n^{\mathfrak{A}} \;:\; n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ é infinito, donde $\mathfrak{A}$ é um modelo infinito. Tomando o reduto $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ a Σ temos que $\mathfrak{B}$ é um modelo infinito para T. ■

Corolário 2.14 *(Löwenheim-Skolem-Tarski)* Se T tem modelos infinitos, então T tem modelos de cardinalidade α para todo $\alpha \geq \|\mathbb{L}\|$.

Demonstração: Dado $\alpha \geq \|\mathbb{L}\|$, seja $\mathbb{L}'$ a linguagem sobre a assinatura Σ' obtida de Σ acrescentando a $\mathcal{C}$ o conjunto $\{c_\xi \; : \; \xi \in \alpha\}$ de constantes novas, onde $c_\xi \neq c_\zeta$ se $\xi \neq \zeta$. Observe que $\|\mathbb{L}'\| = \alpha$ (pois $\|\mathbb{L}\| \leq \alpha$). Considere $\Gamma = T \cup \{\neg(c_\xi \approx c_\zeta) \; : \; \xi, \zeta \in \alpha, \; \xi \neq \zeta\}$. Todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito envolve finitas constantes c_ξ, logo qualquer modelo infinito de T (que existe, por hipótese) pode ser estendido a um modelo de Γ_0. Pelo teorema da compacidade, existe um modelo $\mathfrak{A}$ de Γ tal que, pelo Corolário 2.10, podemos supor que $\mathfrak{A}$ tem cardinalidade $\overline{\overline{A}} \leq \|\mathbb{L}'\| = \alpha$. Por outro lado, $\mathfrak{A} \models \neg(c_\xi = c_\zeta)$ se $\xi \neq \zeta$, logo $c_\xi^{\mathfrak{A}} \neq c_\zeta^{\mathfrak{A}}$ se $\xi \neq \zeta$; daqui $\alpha \leq \overline{\overline{A}} \leq \alpha$, donde $\overline{\overline{A}} = \alpha$. ■

Exemplo 2.15 A teoria de números completa é a teoria

$$TN = \{\varphi \in SENT(\Sigma) \; : \; \langle \mathbb{N}, +, \cdot, s, 0\rangle \models \varphi\}$$

onde Σ é a assinatura da aritmética de Peano de primeira ordem ($\langle \mathbb{N}, +, \cdot, s, 0\rangle$ é portanto uma estrutura para Σ). Observe que TN é uma teoria consistente e maximal, isto é, completa. Ou seja, $TN \vdash \varphi$ ou $TN \vdash \neg\varphi$ para todo sentença φ de Σ. ■

Corolário 2.16 *(Skolem, 1934)* Existem modelos não-standard da teoria de números completa.

Demonstração: TN tem um modelo infinito, a estrutura standard $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, s, 0\rangle$. Pelo teorema anterior, TN tem modelos de cardinalidade α para todo $\alpha \geq \aleph_0$. Claramente, um modelo de cardinalidade $> \aleph_0$ é um modelo não-standard, não isomorfo a $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, s, 0\rangle$. ■

2.2 Método de Diagramas

Seja $\mathfrak{A}$ um modelo para $\mathbb{L} = \mathbb{L}_\Sigma$. Expandimos $\mathbb{L}$ a $\mathbb{L}_A = \mathbb{L}_{\Sigma_A}$, onde Σ_A é a assinatura obtida de Σ acrescentando o conjunto $\{c_a \; : \; a \in A\}$ de constantes novas, e $c_a \neq c_b$ se $a \neq b$ em $A = |\mathfrak{A}|$. Expandimos $\mathfrak{A}$ para um modelo $\mathfrak{A}_A = \langle \mathfrak{A}; a\rangle_{a\in A}$ para $\mathbb{L}_A$, onde $c_a^{\mathfrak{A}_A} := a$.

Definição 2.17 Com a notação anterior, definimos o *diagrama de* $\mathfrak{A}$, denotado por $\Delta_\mathfrak{A}$, como sendo

$$\begin{aligned}\Delta_\mathfrak{A} = \{\varphi \; : \; &(\varphi \text{ é sentença atômica de } \mathbb{L}_A \text{ ou} \\ &\varphi = \neg\psi, \text{ onde } \psi \text{ é sentença atômica de } \mathbb{L}_A) \\ &\text{e } \mathfrak{A}_A \models \varphi\}.\end{aligned}$$

■

Podemos generalizar $\mathbb{L}_A$: se $X \subseteq A$, então definimos $\mathbb{L}_X := \mathbb{L}_{\Sigma_X}$ onde Σ_X é obtida de Σ acrescentando as novas constantes $\{c_a \; : \; a \in X\}$. Definimos também a Σ_X-estrutura $\mathfrak{A}_X := \langle \mathfrak{A}; a\rangle_{a\in X}$. Se $\mathfrak{B}$ é um modelo de $\mathbb{L}$ e $h : X \to B$ e injetora, então $\langle \mathfrak{B}; h(a)\rangle_{a\in X}$ é a expansão de $\mathfrak{B}$ para um modelo de $\mathbb{L}_X$, onde c_a é interpretada como $h(a)$ (para todo $a \in X$).

Proposição 2.18 Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ modelos para $\mathbb{L}$. Então $\mathfrak{A}$ é isomorficamente mergulhável em $\mathfrak{B}$ sse $\mathfrak{B}$ pode ser expandida a um modelo do diagrama de $\mathfrak{A}$.

Demonstração: Seja h um isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}|_{h(A)}$. Seja $\mathfrak{B}_{h(A)} := \langle \mathfrak{B}; h(a)\rangle_{a\in A}$. Observe que, se τ é um termo fechado de $\mathbb{L}_A$, então $h(\tau^{\mathfrak{A}_A}) = \tau^{\mathfrak{B}_{h(A)}}$ (pode ser provado por indução na complexidade $l(\tau)$ de τ). Seja φ uma sentença atômica de $\mathbb{L}_A$ da forma $P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Então:

$$\mathfrak{A}_A \models \varphi \text{ sse } (\tau_1^{\mathfrak{A}_A}, \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}_A}) \in P^{\mathfrak{A}} \text{ sse } (h(\tau_1^{\mathfrak{A}_A}), \ldots, h(\tau_n^{\mathfrak{A}_A})) \in P^{\mathfrak{B}_{h(A)}}$$

$$\text{sse } (\tau_1^{\mathfrak{B}_{h(A)}}, \ldots, \tau_n^{\mathfrak{B}_{h(A)}}) \in P^{\mathfrak{B}_{h(A)}} \text{ sse } \mathfrak{B}_{h(A)} \models \varphi.$$

Logo $\mathfrak{B}_{h(A)}$ é um modelo de $\Delta_{\mathfrak{A}}$, e $\mathfrak{B}_{h(A)}$ é uma expansão de $\mathfrak{B}$.

Reciprocamente, seja $\mathfrak{B}' = \langle \mathfrak{B}; h(a)\rangle_{a\in A}$ uma expansão de $\mathfrak{B}$ que é um modelo de $\Delta_{\mathfrak{A}}$ (observe que toda expansão de $\mathfrak{B}$ para um modelo de $\mathbb{L}_A$ é da forma $\mathfrak{B}' = \langle \mathfrak{B}; h(a)\rangle_{a\in A}$ para alguma função $h : A \to B$). Então h é um isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}|_{h(A)}$ (deixado como exercício para o leitor). ■

Corolário 2.19 Assumamos que Σ não tem símbolos de funções nem de constantes (isto é, $\mathcal{C} = \mathcal{F}_n = \emptyset$ para todo $n \geq 1$). Seja T uma teoria e $\mathfrak{A}$ um modelo para $\mathbb{L}_\Sigma$. Então $\mathfrak{A}$ é imersível num modelo de T sse todo submodelo finito de $\mathfrak{A}$ é imersível em algum modelo de T.

Demonstração: $\Rightarrow$) Óbvia

$\Leftarrow$) Suponha que todo $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ finito é mergulhável em algum modelo de T. Provaremos que $\Gamma := T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ é consistente. Se $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ é finito, então Γ_0 contém um número finito de constantes novas, digamos $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$. Dado que Σ não tem funções nem constantes, então o conjunto finito $A' = \{a_1, \ldots, a_n\}$ gera um submodelo finito $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$. Seja $\mathfrak{B}'$ um modelo de T tal que $\mathfrak{A}'$ está mergulhado em $\mathfrak{B}'$ ($\mathfrak{B}'$ existe por hipótese).

É claro que $\Gamma_0 \subseteq T \cup \Delta_{\mathfrak{A}'}$. Com efeito, se φ é uma sentença atômica de Γ_0 na linguagem $\mathbb{L}_A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$, então φ é sentença atômica de $\mathbb{L}_{A'}$ tal que $\mathfrak{A}' \models \varphi$, donde $\varphi \in \Delta_{\mathfrak{A}'}$. Analogamente para o caso em que φ é da forma $\neg\psi$, com ψ sentença atômica. Pela Proposição 2.18, considerando $\mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{B}'$, temos que $\mathfrak{B}'$ pode ser expandida a um modelo $\mathfrak{B}''$ de $\Delta_{\mathfrak{A}'}$ (pois $\mathfrak{A}'$ é mergulhável em $\mathfrak{B}'$). Daqui vemos que $\mathfrak{B}''$ é um modelo de $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}'}$ (pois $\mathfrak{B}'$ é modelo de T). Como $\Gamma_0 \subseteq T \cup \Delta_{\mathfrak{A}'}$, então $\mathfrak{B}''$ é modelo de Γ_0 (note que $\mathfrak{B}''$ é estrutura para a linguagem $\mathbb{L}_{A'}$). Em resumo: todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tem um modelo.

Pelo teorema da compacidade, Γ tem um modelo $\mathfrak{B}$ (na linguagem $\mathbb{L}_A$). Seja $\overline{\mathfrak{B}}$ o reduto de $\mathfrak{B}$ para $\mathbb{L}$. Então $\overline{\mathfrak{B}}$ é um modelo de T. Como $\overline{\mathfrak{B}}$ pode ser expandida para um modelo do diagrama de $\mathfrak{A}$ (a estrutura $\mathfrak{B}$) então, pela Proposição 2.18, $\mathfrak{A}$ é mergulhável em $\overline{\mathfrak{B}}$, um modelo de T. ■

Lembremos que um corpo K tem característica $p \in \mathbb{N}$ (onde $p \in \mathbb{N}$ é necessariamente primo) se $p.1 = \overbrace{1 + \ldots + 1}^{p \text{ vezes}} = 0$. Por outro lado, se $p.1 \neq 0$ para todo primo p, então K tem característica 0.

Corolário 2.20 Seja Σ uma assinatura (para a teoria de corpos) contendo apenas os seguintes símbolos: $\mathcal{F}_2 = \{+, \cdot\}$ e $\mathcal{C} = \{0, 1\}$. Seja T uma teoria na linguagem $\mathbb{L}_\Sigma$ que tem como modelos corpos de característica $p > 0$ arbitrariamente grande , isto é: para todo p existe um corpo $\mathfrak{A}$ de característica $\geq p$ tal que $\mathfrak{A} \models T$. Então T tem um modelo que é um corpo de característica 0.

Demonstração: Considere a abreviatura $p.1$ denotando o termo $\overbrace{1 + \ldots + 1}^{p \text{ vezes}}$ de $\mathbb{L}$ (p primo positivo). Seja T' o conjunto de axiomas usuais da teoria de corpos na linguagem $\mathbb{L}$, e defina

$$\Gamma := T \cup T' \cup \{\neg(p.1 \approx 0) \ : \ p \text{ é primo}, \ p > 0\}.$$

Se $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ é finito, então Γ_0 envolve finitos primos p; seja p o máximo deles. Seja $\mathfrak{A}$ um modelo de T que é um corpo de característica $> p$ ($\mathfrak{A}$ existe, por hipótese). Logo $\mathfrak{A}$ é um modelo de T', portanto $\mathfrak{A}$ é um modelo de Γ_0.

Por compacidade, Γ tem um modelo. Este modelo é um corpo de característica 0, e é um modelo de T. ■

Isto prova que a classe $\mathcal{M}$ dos corpos de característica $\neq 0$ não é axiomatizável na linguagens dos corpos. Caso contrário, suponha que T é um conjunto de axiomas para $\mathcal{M}$ (isto é: $\mathfrak{A} \models T$ sse $\mathfrak{A}$ é um corpo de característica $\neq 0$). Pelo Corolário 2.20, existe um modelo de T de característica 0. Mas esse modelo, por satisfazer T, devia ser um corpo de característica $\neq 0$, uma contradição. No Corolário 3.9 provaremos que a classe dos corpos de característica 0 é axiomatizável, mas o conjunto de axiomas não pode ser finito.

Definição 2.21 Um *corpo ordenado* é uma estrutura

$$\langle F, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$$

tal que $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ é um corpo e $\langle F, \leq \rangle$ é um conjunto linearmente ordenado, isto é, para todo $x, y, z \in F$:

- $x \leq x$;
- $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$;
- $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$;
- $x \leq y$ ou $y \leq x$;
- $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$;
- $x \leq y$ e $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$. ■

Seja Σ_{CO} a assinatura (para a teoria de corpos ordenados) contendo apenas os seguintes símbolos: $\mathcal{F}_2 = \{+, \cdot\}$; $\mathcal{P}_2 = \{\leq\}$; e $\mathcal{C} = \{0, 1\}$. Então um corpo ordenado é uma Σ_{CO}-estrutura satisfazendo os axiomas óbvios. Por exemplo, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ (com a ordem usual) são corpos ordenados.

Definição 2.22 Um corpo ordenado $\langle F, +, \cdot, 0, 1, \leq\rangle$ é *arquimediano* se, para todo $a, b > 0$, existe $m \in \mathbb{N}^+$ tal que $m.a > b$ (onde $m.a$ denota $\overbrace{a + \ldots + a}^{m \text{ vezes}}$ e $x > y$ denota neste contexto $\neg(x \leq y)$). ■

A propriedade de ser um corpo ordenado arquimediano não é expressável em lógica de primeira ordem, como provaremos a seguir (observe que "existe $m > 0$ tal que $m.a > b$" não é uma expressão de primeira ordem).

Corolário 2.23 "Corpo ordenado arquimediano" não é expressável na lógica de primeira ordem.

Demonstração: Considere a seguinte classe de Σ_{CO}-estruturas:

$$COA = \{\mathfrak{A} \in \Sigma_{CO}\text{-}Str \ : \ \mathfrak{A} \text{ é um corpo ordenado arquimediano}\}.$$

Suponha que existe um conjunto de sentenças Γ na linguagem $\mathbb{L}(\Sigma_{CO})$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ sse $\mathfrak{A} \in COA$. Considere a assinatura Σ obtida de Σ_{CO} acrescentando uma nova constante c. Seja $\mathbb{L} = \mathbb{L}_\Sigma$ e Γ^* o conjunto de sentenças de $\mathbb{L}$ dado por $\Gamma^* = \Gamma \cup \{(m.1 \leq c) \ : \ m \in \mathbb{N}\}$. Se $\Gamma_0 \subseteq \Gamma^*$ é finito então $\langle \mathbb{R}; a\rangle \models \Gamma_0$, se $a \in \mathbb{R}$ satisfaz: $a \geq m$ para todo m envolvido em Γ_0 (se nenhuma fórmula da forma $(m \cdot 1 \leq c)$ ocorre em Γ_0 então basta tomar $a \geq 0$). Logo, todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma^*$ finito tem modelo.

Pelo teorema da compacidade, Γ^* tem um modelo

$$\mathfrak{A} = \langle\langle F, +, \cdot, 1, 0, \leq\rangle; b\rangle.$$

Logo, $\mathfrak{A} \models \Gamma$, donde $\langle F, +, \cdot, 1, 0, \leq\rangle$ é um corpo ordenado arquimediano. Como $\mathfrak{A} \models (m.1 \leq c)$ para todo $m \geq 0$, então $1.1^{\mathfrak{A}} \leq c^{\mathfrak{A}}$, isto é, $1 \leq b$. Logo: existem a $(= 1)$ e b $(= c^{\mathfrak{A}})$ em F, positivos tais que $m.a \leq b$ para todo $m \geq 0$, contrariando o fato de $\mathfrak{A}$ ser arquimediano. Logo, não pode existir uma axiomatização de COA na lógica de primeira ordem. ■

Observação 2.24 O leitor possa talvez ficar em dúvida sobre a interpretação do resultado anterior. De fato, apenas provamos que a classe COA dos corpos ordenados arquimedianos não pode ser caracterizada por um conjunto de axiomas *na linguagem* $\mathbb{L}(\Sigma_{CO})$. Não seria possível caracterizar COA utilizando uma assinatura (de primeira ordem) apropriada? Não será que a inexistência de axiomas para COA é devida à falta de expressividade da assinatura escolhida? Se analizamos com cuidado a prova do Corolário 2.23, veremos que a resposta é "nao".

Com efeito, se Γ fosse uma axiomatização de COA numa linguagem $\mathbb{L}(\Sigma)$ então, por força, a Σ_{CO}-fórmula $(m.1 \leq v_0)$ (para $m \in \mathbb{N}^+$) deveria poder ser representada por uma Σ-fórmula, dado que Σ é rica o suficiente para expressar COA. Por exemplo, se Σ não utiliza uma constante 1 para o neutro do produto então $(m.1 \leq v_0)$ pode ser expresso por

$$\exists v_1(\forall v_2(v_1 \cdot v_2 \approx v_2) \wedge (\overbrace{v_1 + \ldots + v_1}^{m \text{ vezes}} \leq v_0)).$$

Basta substituir na expressão anterior os símbolos de produto, de soma e de ordem pelas expressões correspondentes em Σ para obter uma Σ-fórmula expressando $(m.1 \leq v_0)$. Portanto, podemos repetir a prova do Corolário 2.23, desta vez utilizando a assinatura Σ. ∎

Outra aplicação (neste caso, positiva) do teorema da compacidade é à teoria de ordens:

Definição 2.25 Um *conjunto ordenado* é um par $\langle X, \leq \rangle$ tal que X é um conjunto não-vazio e $\leq \subseteq X \times X$ é uma relação binária em X satisfazendo as três primeiras propriedades de ordem enunciadas no Exemplo 2.21 de corpos ordenados (as quais são facilmente expressáveis numa linguagem de primeira ordem contendo apenas um símbolo de predicado binário $\leq$). Dizemos que $\langle X \leq \rangle$ é uma ordem *total* (ou *linear* ou *simples*) se adicionalmente vale a quarta propriedade de ordem enunciada no Exemplo 2.21 (também facilmente expressável em primeira ordem). ∎

Corolário 2.26 Toda ordem parcial sobre um conjunto X pode ser estendida para uma ordem total.

Demonstração: Seja Σ a assinatura para a ordem parcial que contem apenas um símbolo de predicado binário $\leq$, e fixe uma ordem parcial em X. Considere $\mathfrak{A} = \langle X, \leq \rangle$ um modelo para $\mathbb{L}_\Sigma$. Seja $\mathbb{L}_X := \mathbb{L}_{\Sigma_X}$ a linguagem obtida de Σ_X e seja $\mathfrak{A}_X$ a Σ_X-estrutura obtida de $\mathfrak{A}$ (veja o parágrafo prévio à Definição 2.17). Seja $\Delta = \{\varphi \ : \ \varphi$ é sentença atômica de $\mathbb{L}_X$ e $\mathfrak{A}_X \vDash \varphi\}$. Claramente $\Delta \subseteq \Delta_{\mathfrak{A}}$ (Δ é o *diagrama positivo* de $\mathfrak{A}$). Considere

$$\Gamma := \Delta \cup \{\neg(c_a \approx c_b) \ : \ a \neq b \ \text{ em } \ X\} \cup \{\sigma\},$$

onde σ é a sentença óbvia de $\mathbb{L}_\Sigma$ que define uma ordem total. Seja $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, e $a_1, \ldots, a_n \in X$ os elementos de X envolvidos nas constantes que ocorrem em Γ_0. Deixamos como exercício para o leitor provar, por indução em n, o seguinte:

Fato: Toda ordem parcial $\leq$ em $\{a_1, \ldots, a_n\}$ pode ser estendida para uma ordem total $\leq'$ em $\{a_1, \ldots, a_n\}$, isto é: se $a_i \leq a_j$ então $a_i \leq' a_j$.

A partir do **Fato**, temos que $\langle \langle \{a_1, \ldots, a_n\}, \leq' \rangle ; a_1, \ldots, a_n \rangle$ é um modelo de Γ_0 (se não ocorre nenhuma c_a em Γ_0, então $\Gamma_0 = \emptyset$ ou $\Gamma_0 = \{\sigma\}$, logo $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle \vDash \Gamma_0$ nos dois casos). Ou seja, todo subconjunto finito de Γ tem um modelo.

Pelo teorema da compacidade, existe um modelo $\mathfrak{B} = \langle \langle Y, \leq' \rangle ; d_a \rangle_{a \in X}$ para Γ. Nesse modelo, $d_a = c_a^{\mathfrak{B}}$ (um elemento de Y) para todo $a \in X$. É óbvio que $Y' = \{d_a \ : \ a \in X\}$ é um conjunto totalmente ordenado por $\leq'$, e para todo $a, b \in X$:

$a \leq b$ implica $d_a \leq' d_b$ pois $\mathfrak{B} \vDash \Delta$, e

$$a \neq b \text{ implica } d_a \neq d_b \quad \text{pois } \mathfrak{B} \models \{\neg(c_a \approx c_b) \ : \ a \neq b \text{ em } X\}.$$

Seja $h : X \to Y'$, $h(a) = d_a$; logo h é bijeção. Portanto, a função $g = h^{-1} : Y' \to X$ induz uma ordem total $\leq''$ em X, dada por:

$$a \leq'' b \ \text{ sse } \ d_a \leq' d_b$$

que estende $\leq$ (confira os detalhes). ■

3 Axiomatização e Equivalência Elementar

Estamos em condições de analisar questões de expressabilidade das linguagens de primeira ordem.

Definição 3.1 a) Seja $\Gamma \subseteq SENT(\Sigma)$ uma coleção de sentenças na linguagem $\mathbb{L} = \mathbb{L}_\Sigma$. A coleção de *modelos de* Γ, isto é, a classe das Σ-estruturas $\mathfrak{A}$ tais que $\mathfrak{A} \models \Gamma$, é definida por

$$MOD_\Sigma(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in \Sigma\text{-}Str \ : \ \mathfrak{A} \models \Gamma\}.$$

b) Seja $\mathcal{M} \subseteq \Sigma\text{-}Str$ uma coleção de estruturas sobre Σ. A *teoria de* $\mathcal{M}$ e a coleção de Σ-sentenças

$$Th_\Sigma(\mathcal{M}) = \{\sigma \in SENT(\Sigma) \ : \ \mathfrak{A} \models \sigma \text{ para toda } \mathfrak{A} \in \mathcal{M}\}.$$

■

Quando não houver risco de confusão, omitiremos o índice Σ. Escreveremos $MOD(\sigma)$ para $MOD(\{\sigma\})$ e $Th(\mathfrak{A})$ para $Th(\{\mathfrak{A}\})$

Proposição 3.2
(i) $MOD(\Gamma) = \bigcap_{\sigma\in\Gamma} MOD(\sigma)$.
(ii) $Th(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathfrak{A}\in\mathcal{M}} Th(\mathfrak{A})$.
(iii) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ implica $MOD(\Gamma') \subseteq MOD(\Gamma)$.
(iv) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ implica $Th(\mathcal{M}') \subseteq Th(\mathcal{M})$.
(v) $\Gamma \subseteq Th(MOD(\Gamma))$ e $MOD(Th(MOD(\Gamma))) = MOD(\Gamma)$.
(vi) $\mathcal{M} \subseteq MOD(Th(\mathcal{M}))$ e $Th(MOD(Th(\mathcal{M}))) = Th(\mathcal{M})$.

Demonstração: Exercício. ■

Definição 3.3 Seja $\mathcal{M} \subseteq \Sigma\text{-}Str$.
(i) Dizemos que $\mathcal{M}$ é *axiomatizável na linguagem* $\mathbb{L}_\Sigma$ se existe $\Gamma \subseteq SENT(\Sigma)$ tal que $\mathcal{M} = MOD(\Gamma)$.
(ii) $\mathcal{M}$ é *finitamente axiomatizável* (em $\mathbb{L}_\Sigma$) se $\mathcal{M} = MOD(\Gamma)$ para $\Gamma \subseteq SENT(\Sigma)$ finito.
(iii) Um conceito matemático é *expressável* na linguagem $\mathbb{L}_\Sigma$ se a classe de estruturas que é a sua referência é axiomatizável em $\mathbb{L}_\Sigma$. ■

Observações 3.4
1) Se σ é uma sentença logicamente válida (por exemplo, $\forall x(x \approx x)$) então Σ-$Str = MOD(\sigma)$ e $\emptyset = MOD(\neg\sigma)$. Portanto $\emptyset$ e Σ-Str são (finitamente) axiomatizáveis.
2) $MOD(\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}) = MOD(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$, portanto "finitamente axiomatizável" equivale a "axiomatizável por uma sentença". ■

Proposição 3.5 $\mathcal{M}$ é axiomatizável sse $\mathcal{M} = MOD(Th(\mathcal{M}))$.

Demonstração: $\Leftarrow$) Óbvio.
$\Rightarrow$) Se $\mathcal{M}$ é axiomatizável, então $\mathcal{M} = MOD(\Gamma)$ para algum $\Gamma \subseteq SENT(\Sigma)$. Logo, pela Proposição 3.2 (v), aplicando $MOD(Th(\cdot))$ nos dois membros da igualdade acima, obtemos:

$$MOD(Th(\mathcal{M})) = MOD(Th(MOD(\Gamma))) = MOD(\Gamma) = \mathcal{M}.$$

■

Proposição 3.6 $MOD(Th(\mathcal{M}))$ é a menor classe axiomatizável que contém $\mathcal{M}$, isto é: se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_1$ é axiomatizável, então $MOD(Th(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{M}_1$.

Demonstração: Se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1$ então $Th(\mathcal{M}) \supseteq Th(\mathcal{M}_1)$, pela Proposição 3.2 (iv). Portanto $MOD(Th(\mathcal{M})) \subseteq MOD(Th(\mathcal{M}_1))$, pela Proposição 3.2 (iii). ■

Observação 3.7 $\mathcal{M}$ não é axiomatizável sse existe $\mathfrak{B}$ tal que: $\mathfrak{B} \models Th(\mathcal{M})$ e $\mathfrak{B} \notin \mathcal{M}$ (isto é: $\mathcal{M} \subset MOD(Th(\mathcal{M}))$). ■

Proposição 3.8 Se $\mathcal{M} = MOD(\Gamma)$ e $\mathcal{M}$ é finitamente axiomatizável, então existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\mathcal{M} = MOD(\Gamma_0)$

Demonstração: Suponha que existe uma sentença σ tal que $\mathcal{M} := MOD(\Gamma) = MOD(\sigma)$. Logo, para toda $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \Gamma \text{ sse } \mathfrak{A} \models \sigma. \qquad (*)$$

Em particular (usando a parte "somente se") temos que $\Gamma \models \sigma$. Pelo teorema da compacidade, existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \models \sigma$ (é fácil provar que o Teorema da Compacidade *equivale a*: se $\Gamma \cup \{\sigma\}$ é um conjunto de sentenças e $\Gamma \models \sigma$, então existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \models \sigma$). Suponha que $\Gamma_0 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Se $\mathfrak{A} \models \sigma$ então, por $(*)$, $\mathfrak{A} \models \Gamma$; em particular $\mathfrak{A} \models \sigma_i$ para todo i, donde $MOD(\sigma) \subseteq MOD(\Gamma_0)$. Dado que $\Gamma_0 \models \sigma$ então $MOD(\Gamma_0) \subseteq MOD(\sigma)$, portanto $\mathcal{M} = MOD(\sigma) = MOD(\Gamma_0)$. ■

Corolário 3.9 "Corpo de característica 0" é axiomatizável mas não é finitamente axiomatizável.

Demonstração: Considere a assinatura Σ para a teoria de corpos (veja o Corolário 2.20). Seja Γ o conjunto de axiomas usuais de corpo na linguagem $\mathbb{L}_\Sigma$, e $\Gamma^* = \Gamma \cup \{\neg(p.1 \approx 0) \ : \ p \text{ é primo}, p > 0\}$. É claro que $\mathcal{M} := MOD(\Gamma^*) = \{\langle F, +, \cdot, 1, 0\rangle \ : \ F \text{ é corpo de característica } 0\}$.

Por outro lado, suponha que existe alguma sentença σ na linguagem dos corpos $\mathbb{L}_\Sigma$ tal que $\mathcal{M} = MOD(\sigma)$. Pela Proposição 3.8 temos que existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma^*$ finito tal que $MOD(\Gamma_0) = \mathcal{M}$. Mas Γ_0 envolve finitos primos $p_1, \ldots, p_n$, portanto, se $p > p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, então $\langle \mathbb{Z}_p, +, \cdot, \overline{1}, \overline{0}\rangle \vDash \Gamma_0$. Mas $\langle \mathbb{Z}_p, +, \cdot, \overline{1}, \overline{0}\rangle \notin \mathcal{M}$, pois $\mathbb{Z}_p$ tem característica p, uma contradição. ■

Corolário 3.10 A propriedade de ser conjunto infinito é axiomatizável, mas não é finitamente axiomatizável.

Demonstração: Considere, para cada $n > 1$, a sentença

$$\varphi_n := \exists v_1 \ldots \exists v_n \bigwedge_{i \neq j} \neg(v_i \approx v_j)$$

na linguagem $\mathbb{L}_\Sigma$ com $\Sigma = \emptyset$. Logo, $\mathfrak{A} \vDash \varphi_n$ sse A tem mais de n elementos. Seja $\Gamma = \{\varphi_n \ : \ n > 1\}$. Então $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$ sse, para todo $n > 1$, A tem mais de n elementos, sse A é infinito. Portanto $\mathcal{M} := MOD(\Gamma) \simeq \{A \ : \ A \text{ é um conjunto infinito}\}$ (escrevemos "$\simeq$" no lugar de "$=$" porque, em rigor, as Σ-estruturas *não* são conjuntos, mas pares ordenados $\langle A, \emptyset\rangle$ tais que A é um conjunto não-vazio e $\emptyset$ é a função vazia). Se existisse uma sentença σ tal que $\mathcal{M} = MOD(\sigma)$ então, pela Proposição 3.8, existiria $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\mathcal{M} = MOD(\Gamma_0)$.

Suponha que $\Gamma_0 = \{\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}\}$, e seja $m > n_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Logo, $\mathfrak{A}_m = \langle\{1, \ldots, m\}, \emptyset\rangle$ é um modelo de Γ_0. Mas $|\mathfrak{A}_m|$ é finito, uma contradição. ■

Corolário 3.11 A propriedade de ser conjunto finito (e não-vazio) não é axiomatizável.

Demonstração: Suponha que existe um conjunto de sentenças Γ (na linguagem $\mathbb{L}_\Sigma$ com $\Sigma = \emptyset$) tal que $\mathcal{M} := MOD(\Gamma) \simeq \{A \ : \ A \text{ é um conjunto finito não-vazio}\}$. Seja $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{\varphi_n \ : \ n > 1\}$ (onde φ_n é como na prova do corolário anterior). Seja $\Gamma_0 \subseteq \overline{\Gamma}$ finito e seja $n = Max\{n \ : \ \varphi_n \in \Gamma_0\}$. Logo, $\mathfrak{A} = \langle\{1, \ldots, n+1\}, \emptyset\rangle$ é um modelo de Γ_0. Isto é, todo subconjunto finito de $\overline{\Gamma}$ tem modelo.

Pelo teorema da compacidade, existe um modelo $\mathfrak{A} = \langle A, \emptyset\rangle$ de $\overline{\Gamma}$. Logo, $\mathfrak{A} \in MOD(\Gamma) \cap MOD(\{\varphi_n \ : \ n > 1\})$. Assim, A é finito e A é infinito, uma contradição. ■

Observação 3.12 O leitor poderia novamente questionar os dois últimos resultados, na mesma linha de raciocínio da Observação 2.24. Ou seja, talvez se usassemos uma assinatura não-vazia então seria possível axiomatizar com uma única sentença os conjuntos infinitos e/ou axiomatizar os conjuntos finitos (não-vazios). De fato, o Axioma do Infinito da Teoria de Conjuntos ZF de

Zermelo-Fraenkel é uma sentença que, entre outras coisas, define os conjuntos infinitos! E também existem diversas caracterizações (em ZF) de conjuntos finitos!

Observe que esse raciocínio está errado. Os modelos de ZF *não são* conjuntos, mas pares $\langle A, E\rangle$ em que $E \subseteq A \times A$ interpreta a relação de pertinência no universo A. Ou seja, os modelos não são meramente conjuntos, mas *conjuntos munidos de uma estrutura adicional*.

Por outro lado, a própria noção de estrutura de primeira ordem nos força a considerar a assinatura vazia para poder falar apenas em *conjuntos*, pois justamente um conjunto é, por definição, um conjunto sem qualquer estrutura algébrico-relacional. ■

4 Omissão de Tipos e Teoremas de Interpolação

Nesta seção trabalharemos com conjuntos Γ de fórmulas nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, denotados por $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$. Isto significa: se $\varphi \in \Gamma$ então toda variável que ocorre livre em φ pertence ao conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Se φ é da forma $\varphi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, usaremos a notação $\varphi(c_1, \ldots, c_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ para $\varphi^{x_1}_{c_1} \ldots ^{x_m}_{c_m}$. Para simplificar a leitura, utilizaremos a seguinte notação adicional:

- $\vec{a}$ representará indistintamente uma seqüência finita $a_1 \ldots a_n$ em A ou uma n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$;
- $\vec{x}$ representará a n-upla de variáveis $(x_1, \ldots, x_n)$; por exemplo, escreveremos $\varphi(\vec{x})$ e $\Gamma(\vec{x})$ no lugar de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ e $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$;
- por outro lado, escreveremos $\exists\vec{x}$ e $\forall\vec{x}$ no lugar de $\exists x_1 \ldots \exists x_n$ e $\forall x_1 \ldots \forall x_n$, respectivamente.

Em todos os casos, o contexto servirá para desambiguar a expressão $\vec{x}$ e $\vec{a}$.

4.1 Omissão de Tipos

Definição 4.1 Seja $\Gamma = \Gamma(\vec{x}) \subseteq FOR(\mathbb{L}_\Sigma)$, e $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura. Dizemos que $\mathfrak{A}$ *realiza* Γ se existe $\vec{a} \in A^n$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$ para toda $\varphi \in \Gamma$. Dizemos que $\mathfrak{A}$ *omite* Γ se $\mathfrak{A}$ não realiza Γ; isto é, para toda $\vec{a} \in A^n$ existe $\varphi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\vec{a}]$. Dizemos que Γ *é satisfatível em* $\mathfrak{A}$ se $\mathfrak{A}$ realiza Γ. Finalmente, dizemos que Γ *é consistente* se Γ é satisfatível em alguma $\mathfrak{A}$. ■

Exemplo 4.2 Seja T a aritmética de Peano de primeira ordem, e $\Gamma(x)$ o conjunto $\Gamma(x) = \{\neg(0 \approx x), \neg(S(0) \approx x), \neg(S(S(0)) \approx x), \ldots\} \cup T$. Dada uma estrutura $\mathfrak{A}$, temos que $a \in A$ é um número natural não-standard se a realiza $\Gamma(x)$ (isto é, $\mathfrak{A}$ realiza $\Gamma(x)$ com $x \mapsto a$). ■

Exemplo 4.3 Seja T a teoria de corpos ordenados (ver Definição 2.21), e considere $\Gamma(x) = \{(1 \leq x), (1 + 1 \leq x), (1 + 1 + 1 \leq x), \ldots\} \cup T$. Dada $\mathfrak{A}$, então

$a \in A$ é *infinito positivo* se a realiza $\Gamma(x)$. Um corpo ordenado $\mathfrak{A}$ omite $\Gamma(x)$ sse é arquimediano (lembre que, de acordo com o Corolário 2.23, a classe COA não é expressável em primeira ordem, logo "$\mathfrak{A}$ omite $\Gamma(x)$" não é expressável em primeira ordem). Observe que $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ e $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ omitem $\Gamma(x)$ (pois são arquimedianos). ■

Exemplo 4.4 Seja T a teoria de grupos abelianos, e $\Gamma(x) = \{\neg(x \approx 0), \neg(2.x \approx 0), \neg(3.x \approx 0), \ldots\} \cup T$. Dado um grupo abeliano G, então $a \in G$ realiza $\Gamma(x)$ sse a tem *ordem infinita*. Os grupos abelianos que omitem $\Gamma(x)$ são os grupos de torsão. Assim, se G é de torsão então, para todo $a \in G$, a tem um múltiplo finito que vale zero. ■

Exemplo 4.5 Seja T a teoria de ordem parcial, $(x < y)$ a fórmula denotando $(x \leq y) \wedge \neg(x \approx y)$, e $\Gamma = \{(x_1 < x_0), (x_2 < x_1), (x_3 < x_2), \ldots\} \cup T$ (Γ usa infinitas variáveis). Uma ordem parcial $\mathfrak{A}$ omite Γ sse $\mathfrak{A}$ é uma ordem bem fundada. Uma ordem linear (isto é, total) omite Γ sse é uma boa ordem. ■

Definição 4.6 Por um *tipo* $\Gamma(\vec{x})$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ entendemos um conjunto maximal consistente de fórmulas de $\mathbb{L}_\Sigma$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Dados $\mathfrak{A}$ e $\vec{a} \in A^n$, o conjunto $\Gamma(\vec{x}) = \{\varphi(\vec{x}) \ : \ \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]\}$ é um tipo, de fato o único tipo realizado por $\vec{a}$ em $\mathfrak{A}$ (exercício para o leitor). Este é chamado *o tipo de* $\vec{a}$ *em* $\mathfrak{A}$. ■

Exemplo 4.7 Seja $\mathfrak{A}$ o corpo ordenado dos números reais. Se $a \neq b$ então a e b tem diferentes tipos. Com efeito: Se $a < b$ então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$ (podemos supor que $r \neq 0$). Logo, a satisfaz $x < r$, mas b não. Daqui, $\mathfrak{A}$ realiza $2^{\aleph_0}$ tipos diferentes numa variável (um tipo para cada $a \in \mathbb{R}$). Com efeito: Se $a < r < b$, com $r \in \mathbb{Q}$, considere $\varphi_r(x)$ dada por:

$$\varphi_r(x) := \exists z((m.z \approx n.1) \wedge (x < z)) \text{ se } \ r = \frac{n}{m}, \ n, m > 0$$

ou

$$\varphi_r(x) := \exists z \exists w((m.z \approx n.1) \wedge (z + w \approx 0) \wedge (x < w)) \text{ se } \ r = \frac{-n}{m}, \ n, m > 0.$$

Daqui: $\mathfrak{A} \models \varphi_r[a]$ mas $\mathfrak{A} \not\models \varphi_r[b]$ ■

Queremos resolver a questão seguinte: em quais circunstâncias um conjunto de fórmulas é realizado por algum modelo de uma teoria T? Eis a resposta:

Proposição 4.8 Seja T uma teoria e $\Gamma = \Gamma(\vec{x})$. São equivalentes:
(i) T tem um modelo que realiza Γ;
(ii) todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito é realizado em algum modelo de T;
(iii) $T \cup \{\exists \vec{x}(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_m) \ : \ m \in \mathbb{N}, \ \sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \Gamma\}$ é consistente.

Demonstração: Usando o teorema da compacidade (Exercício). ■

Definição 4.9
1) Uma fórmula $\sigma(\vec{x})$ é *consistente com uma teoria* T se existe um modelo $\mathfrak{A}$ de T que realiza $\{\sigma\}$.
2) Um conjunto de fórmulas $\Gamma(\vec{x})$ é *consistente com* T se T tem um modelo que realiza Γ. ■

Logo, qualquer uma das condições (i)-(iii) da Proposição 4.8 equivale a Γ ser consistente com T. Agora queremos resolver a seguinte questão: em quais circunstâncias um conjunto $\Gamma(\vec{x})$ é omitido em *algum* modelo de T?

Agora não basta o teorema da compacidade. Observe que, se Γ é finito, então "Γ é omitido" é expressado por uma sentença. De fato, se $\Gamma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$, seja $\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_n(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_m)$. Então φ e $\neg\varphi$ expressam, respectivamente, que Γ é realizado ou omitido (logo, podemos usar a Proposição 4.8).

Definição 4.10 Seja $\Gamma(\vec{x})$ um conjunto de $\mathbb{L}$-fórmulas. Uma teoria T em $\mathbb{L}$ *realiza localmente* Γ se existe uma $\mathbb{L}$-fórmula $\varphi(\vec{x})$ tal que:

(i) φ é consistente com T;

(ii) Para toda $\sigma \in \Gamma$, $T \models \varphi \Rightarrow \sigma$ (isto é: toda seqüência finita $\vec{a}$ num modelo de T que satisfaz φ realiza Γ).

Dizemos que T *omite localmente* Γ se T não realiza localmente Γ. Isto equivale ao seguinte: para toda $\varphi(\vec{x})$ consistente com T, existe $\sigma \in \Gamma$ tal que $\varphi \wedge \neg\sigma$ é consistente com T. ■

Proposição 4.11 Seja T teoria completa em $\mathbb{L}$, e $\Gamma(\vec{x})$ um conjunto de $\mathbb{L}$-fórmulas. Se T tem um modelo que omite Γ, então T omite localmente Γ. Logo, se T realiza localmente Γ então não existe um modelo de T que omita Γ.

Demonstração: Provaremos: se T realiza localmente Γ, então todo modelo de T realiza Γ. Assim, assuma que T realiza localmente Γ, e seja $\mathfrak{A}$ um modelo de T. Seja $\varphi(\vec{x})$ satisfazendo os items (i) e (ii) da Definição 4.10.

Como T é completa e φ é consistente com T, então $T \models \exists\vec{x}\varphi$. Caso contrário, isto é, se $T \not\models \exists\vec{x}\varphi$, então $T \models \neg\exists\vec{x}\varphi$, pois T é completa, donde

$$T \models \forall\vec{x}\neg\varphi. \qquad (*)$$

Como $\varphi(\vec{x})$ é consistente com T, existe $\mathfrak{B}$ e $\vec{b}$ e B^n tal que $\mathfrak{B} \models T$ e $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}]$. Mas, por $(*)$, como $\mathfrak{B} \models T$, então $\mathfrak{B} \models \forall\vec{x}\neg\varphi$, donde $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[\vec{b}]$ isto é, $\mathfrak{B} \not\models \varphi[\vec{b}]$, uma contradição.

Portanto, $T \models \exists\vec{x}\varphi$. Como $\mathfrak{A} \models T$, então existe $\vec{a} \in A^n$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Dado que φ satisfaz o item (ii) da Definição 4.10, temos que $\vec{a}$ satisfaz toda $\sigma \in \Gamma$, isto é, $\vec{a}$ realiza Γ em $\mathfrak{A}$. ■

O Teorema de Omissão de Tipos é uma recíproca da proposição anterior.

Teorema 4.12 *(Teorema de Omissão de Tipos)* Seja T uma teoria consistente numa linguagem enumerável $\mathbb{L}$, e seja $\Gamma(\vec{x})$ um conjunto de $\mathbb{L}$-fórmulas. Se T omite localmente Γ, então T tem um modelo enumerável que omite Γ.

Demonstração: Provaremos o caso $\Gamma = \Gamma(x)$, por simplicidade de notação. Assuma que T omite localmente $\Gamma(x)$.

Seja $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$ um conjunto enumerável de constantes novas, e $\mathbb{L}'$ a linguagem obtida de $\mathbb{L}$ acrescentando o conjunto C de constantes; logo $\mathbb{L}'$ é enumerável.

Seja $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ uma enumeração das sentenças de $\mathbb{L}'$; construiremos uma seqüência de teorias

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_m \subseteq \ldots \quad (m \in \mathbb{N})$$

tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$:

(1) T_m é uma teoria de $\mathbb{L}'$ consistente, sendo uma extensão finita de T;

(2) $\varphi_m \in T_{m+1}$ ou $\neg\varphi_m \in T_{m+1}$;

(3) Se $\varphi_m = \exists x \psi(x)$ e $\varphi_m \in T_{m+1}$, então $\psi(c_p) \in T_{m+1}$ onde c_p é a primeira constante que não ocorre em T_m nem em φ_m;

(4) Existe $\sigma_m(x) \in \Gamma(x)$ tal que $\neg\sigma_m(c_m) \in T_{m+1}$.

Construção de T_{m+1}: Assuma T_m já definido ($m \geq 0$), onde $T_0 := T$. Suponha que $T_m = T \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ com $r > 0$ e cada θ_i sendo uma sentença (se $m = 0$, tome $\theta_1 \in T$ e $r = 1$; se $T = \emptyset$, o resultado é óbvio).

Seja $c_0, \ldots, c_n$ a lista das primeiras $n+1$ constantes de C contendo todas as constantes de $\theta := \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_r$. Seja $\theta'(x_0, \ldots, x_n) := \theta^{c_0}_{x_0} \ldots ^{c_n}_{x_n}$, isto é, a fórmula de $\mathbb{L}$ obtida de θ substituindo c_i por x_i (e renomeando as ocorrências limitadas de x_i tais que c_i ocorre no escopo de $\forall x_i$). Por exemplo

$$\ldots \forall x_i(\ldots P(x_i, \ldots, c_i)\ldots) \mapsto \ldots \forall v_j(\ldots P(v_j, \ldots, c_i)\ldots)$$

$$\mapsto \ldots \forall v_j(\ldots P(v_j, \ldots, x_i)\ldots).$$

$$Seja\ \theta''(x_m) = \begin{cases} \exists x_0 \ldots \exists x_{m-1} \exists x_{m+1} \ldots \exists x_n \theta' & \text{se } m \leq n \\ \\ \exists x_0 \ldots \exists x_n \theta' & \text{se } m > n \text{ (um sentença)} \end{cases}.$$

É possível provar que $\theta''(x_m)$ é consistente com T (exercício para o leitor).

Logo, por hipótese (T omite localmente Γ), existe $\sigma_m(x) \in \Gamma$ tal que $\theta''(x_m) \wedge \neg\sigma_m(x_m)$ é consistente com T. Defina $T^0_{m+1} := T_m \cup \{\neg\sigma_m(c_m)\}$.

Observe que T^0_{m+1} é consistente (satisfaz (1)), e satisfaz (4). Se φ_m é consistente com T^0_{m+1}, defina $T^1_{m+1} := T^0_{m+1} \cup \{\varphi_m\}$; caso contrário, defina $T^1_{m+1} := T^0_{m+1} \cup \{\neg\varphi_m\}$. Note que T^1_{m+1} satisfaz (1),(2) e (4). Agora temos dois casos para analizar:

Caso 1: Se φ_m é da forma $\exists x\psi(x)$, e $\varphi_m \in T^1_{m+1}$. Isto é, $\varphi_m = \exists x\psi(x)$ é consistente com T^0_{m+1}. Seja c_p a primeira constante que não ocorre em $T_m \cup \{\varphi_m\}$ (notar que são finitas as constantes ocorrendo em $T_m \cup \{\varphi_m\}$). Defina neste caso $T_{m+1} := T^1_{m+1} \cup \{\psi(c_p)\}$.
Caso 2: Se $\varphi_m \neq \exists\psi(x)$ ou $\varphi_m = \exists x\psi(x) \notin T^1_{m+1}$. Então defina $T_{m+1} := T^1_{m+1}$.
Observe que, nos dois casos, T_{m+1} satisfaz os requerimentos (1)-(4).
Fim da construção de T_{m+1}.

Seja $T_\omega := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} T_m$.

Como $T_i \subseteq T_{i+1}$ e cada T_i é consistente, por (1), então T_ω é consistente. Por outro lado, se φ é uma sentença de $\mathbb{L}'$ tal que $\varphi \notin T_\omega$, seja m tal que $\varphi = \varphi_m$. Logo $\varphi_m \notin T_i$ para todo i, em particular $\varphi_m \notin T_{m+1}$; por (2), $\neg\varphi_m \in T_{m+1}$, donde $\neg\varphi \in T_\omega$. Daqui T_ω é completa.

Seja $\mathfrak{B}' = \langle \mathfrak{B}; b_0, b_1, \ldots\rangle$ um modelo enumerável de T_ω (existe, pois T_ω é consistente e $\mathbb{L}'$ é enumerável). Note que, em particular, $\mathfrak{B}'$ poderia ser finito.

Seja $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}; b_0, b_1, \ldots\rangle$ o submodelo de $\mathfrak{B}'$ gerado por $\{b_0, \ldots, b_n \ldots\}$, isto é: $\mathfrak{A}' = Min\{\mathfrak{B}'' \subseteq \mathfrak{B}' \ : \ \{b_0, b_1, \ldots\} \subseteq |\mathfrak{B}''|\}$. Provaremos que $|\mathfrak{A}'| = \{b_0, b_1, \ldots\}$. Para isso, basta provar que $f|_{\{b_0,b_1,\ldots\}^n} : \{b_0, b_1, \ldots\}^n \to \{b_0, b_1, \ldots\}$ para toda $f \in \mathcal{F}_n$ e para todo $n \geq 1$.

Seja então $f \in \mathcal{F}_n$ e $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \in \{b_0, b_1, \ldots\}^n$. Considere $\psi(x)$ como sendo a fórmula $(f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \approx x)$. Dado que $\vdash \exists x(f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \approx x)$, então $T_\omega \vDash \exists x\psi(x)$. Por outro lado, existe m tal que $\varphi_m = \exists x\psi(x)$.

Se $\varphi_m \notin T_{m+1}$ então, por (2), $\neg\varphi_m \in T_{m+1}$, donde $\neg\varphi_m \in T_\omega$. Daqui $\neg\varphi_m, \varphi_m \in T_\omega$, uma contradição (lembre que T_ω é consistente). Portanto $\varphi_m = \exists x\psi(x)$ pertence a T_{m+1} donde, por (3), $\psi(c_p) \in T_{m+1}$ para algum p. Isto é: $(f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \approx c_p) \in T_{m+1}$, logo $\mathfrak{B}' \vDash (f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \approx c_p)$. Daqui $f^{\mathfrak{B}'}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) = b_p \in \{b_0, b_1, \ldots\}$. Portanto $|\mathfrak{A}'| = \{b_0, b_1, \ldots\}$.

Por indução na complexidade da sentença $\varphi \in \mathbb{L}'$, provaremos a seguir:

1) $\mathfrak{A}' \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{B}' \vDash \varphi$, isto é:

$$(\mathfrak{A}' \vDash \varphi \text{ e } \mathfrak{B}' \vDash \varphi) \text{ ou } (\mathfrak{A}' \nvDash \varphi \text{ e } \mathfrak{B}' \nvDash \varphi) \qquad (*)$$

2) $\mathfrak{B}' \vDash \varphi$ sse $T_\omega \vDash \varphi$.

Prova de 1): Só provaremos o caso $\varphi = \exists x\psi(x)$ (os outros casos são deixados como exercício). Suponhamos que $\varphi = \varphi_m = \exists x\psi(x)$. Logo, temos dois casos para analizar:

1.1) $\varphi_m \in T_{m+1} \subseteq T_\omega$.
Temos que $\mathfrak{B}' \vDash T_\omega$, logo $\mathfrak{B}' \vDash \varphi_m$. Por (3), $\psi(c_p) \in T_{m+1}$ para algum c_p, portanto $\mathfrak{B}' \vDash \psi(c_p)$ (pois $\mathfrak{B}' \vDash T_\omega$) donde, por hipótese de indução, $\mathfrak{A}' \vDash \psi(c_p)$. Logo $\mathfrak{A}' \vDash \varphi_m$. Daqui: $\mathfrak{B}' \vDash \varphi_m$ e $\mathfrak{A}' \vDash \varphi_m$, logo $\mathfrak{B}' \vDash \varphi_m$ sse $\mathfrak{A}' \vDash \varphi_m$, por $(*)$.

1.2) $\varphi_m = \exists x\psi(x) \notin T_{m+1}$. Logo, por (2), $\neg\varphi_m = \neg\exists x\psi(x) \in T_{m+1} \subseteq T_\omega$. Portanto $\mathfrak{B}' \nvDash \varphi_m$ (pois $\mathfrak{B}' \vDash \neg\varphi_m$). Se $\mathfrak{A}' \vDash \varphi_m$ então existe b_i tal que

$\mathfrak{A}' \models \psi(x)[b_i]$, logo $\mathfrak{A}' \models \psi(c_i)$ e então, usando a hipótese de indução, $\mathfrak{B}' \models \psi(c_i)$. Logo $\mathfrak{B}' \models \varphi_m$, uma contradição. Daqui inferimos que $\mathfrak{A}' \not\models \varphi_m$, portanto $\mathfrak{B}' \not\models \varphi_m$ e $\mathfrak{A}' \not\models \varphi_m$. Por $(*)$ obtemos $\mathfrak{B}' \models \varphi_m$ sse $\mathfrak{A}' \models \varphi_m$.

Prova de 2): Suponha que $T_\omega \models \varphi$; logo $\mathfrak{B}' \models \varphi$, pois $\mathfrak{B}' \models T_\omega$. Por outro lado, se $T_\omega \not\models \varphi$ então $T_\omega \models \neg\varphi$, pois T_ω é completa. Logo $\mathfrak{B}' \models \neg\varphi$ (pois $\mathfrak{B}' \models T_\omega$), portanto $\mathfrak{B}' \not\models \varphi$. Logo, obtemos o resultado desejado: $T_\omega \models \varphi$ sse $\mathfrak{B}' \models \varphi$.

De 1) e 2) inferimos:

$$\mathfrak{A}' \models \varphi \text{ sse } \mathfrak{B}' \models \varphi \text{ sse } T_\omega \models \varphi \qquad (**)$$

para toda sentença φ de $\mathbb{L}'$. Mas $T_\omega \models \varphi$ para toda $\varphi \in T_\omega$, logo $\mathfrak{A}' \models T_\omega$. Daqui $\mathfrak{A}$, o reduto de $\mathfrak{A}'$ a $\mathbb{L}$, é um modelo de T. Mais ainda, $\mathfrak{A}$ omite Γ. Com efeito: por (4), para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $\sigma_m(x) \in \Gamma(x)$ tal que

$$\neg\sigma_m(c_m) \in T_{m+1}. \qquad (***)$$

Provaremos o seguinte: para todo $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} \not\models \sigma_m[b_m]$. Isto é: $\mathfrak{A}$ omite $\Gamma(x)$. Suponha então que $\mathfrak{A} \models \sigma_m[b_m]$ para algum m. Logo $\mathfrak{A}' \models \sigma_m(c_m)$, portanto $T_\omega \models \sigma_m(c_m)$, por $(**)$. Logo $\neg\sigma_m(c_m) \notin T_\omega$, pois T_ω é consistente; em particular, $\neg\sigma_m(c_m) \notin T_{m+1}$, o que contradiz $(***)$. Daqui $\mathfrak{A} \not\models \sigma_m[b_m]$ para todo m, donde $\mathfrak{A}$ omite $\Gamma(x)$ (pois $\mathfrak{A} = \{b_0, b_1, \ldots\}$). ■

Logo, se $\mathbb{L}$ é enumerável e T é completa, então T omite localmente $\Gamma(\vec{x})$ sse T tem um modelo omitindo Γ. Em geral:

Corolário 4.13 Seja $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\Sigma)$ enumerável. Uma teoria T tem um modelo (enumerável) omitindo $\Gamma(\vec{x})$ sse alguma extensão completa de T omite localmente $\Gamma(\vec{x})$.

Demonstração: $\Rightarrow$) Seja $\mathfrak{A}$ modelo (enumerável) de T tal que $\mathfrak{A}$ omite Γ. Seja $T' = Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in SENT(\Sigma) \ : \ \mathfrak{A} \models \varphi\}$. Logo T' é uma extensão completa de T. Dado que $\mathfrak{A}$ é um modelo de T' que omite Γ, então T' omite localmente Γ, pela Proposição 4.11.
$\Leftarrow$) Seja T' extensão completa de T tal que T' omite localmente $\Gamma(\vec{x})$. Pelo Teorema de Omissão de Tipos 4.12, existe um modelo enumerável $\mathfrak{A}$ de T' tal que $\mathfrak{A}$ omite $\Gamma(\vec{x})$. Logo, $\mathfrak{A}$ é um modelo enumerável de T que omite Γ. ■

Definição 4.14 Seja $\mathbb{L}_\Sigma$ a linguagem da aritmética onde Σ contém apenas os símbolos $\mathcal{F}_1 = \{S\}$, $\mathcal{F}_2 = \{+, \cdot\}$, e $\mathcal{C} = \{0\}$. O termo $\overbrace{S \ldots S}^{m \text{ vezes}}(0)$ é denotado por $\overline{m}$; por definição $\overline{0} := 0$. Definimos um *ω-modelo* como sendo um Σ-modelo $\mathfrak{A}$ onde $A = \{\overline{m}^{\mathfrak{A}} \ : \ m \in \mathbb{N}\}$. Dizemos que uma Σ-teoria é *ω-consistente* se não existe $\varphi(x)$ em $\mathbb{L}_\Sigma$ tal que:

$$T \models \varphi(\overline{0}), \ T \models \varphi(\overline{1}), \ldots, \ T \models \varphi(\overline{n}), \ldots$$

mas $T \models \exists x \neg\varphi(x)$. Finalmente, dizemos que T é ω-*completa* se, para toda $\varphi(x)$ de $\mathbb{L}_\Sigma$:

$$T \models \varphi(\overline{0}),\ T \models \varphi(\overline{1}), \ldots,\ T \models \varphi(\overline{n}), \ldots$$

implica $T \models \forall x \varphi(x)$. ■

Observe que $\mathfrak{A}$ é um ω-modelo sse $\mathfrak{A}$ omite o conjunto

$$\Gamma(x) = \{\neg(x \approx \overline{0}), \neg(x \approx \overline{1}), \neg(x \approx \overline{2}), \ldots\}.$$

Com efeito: se $\mathfrak{A}$ é um ω-modelo e $\overline{m}^{\mathfrak{A}} \in A$ então existe $\varphi(x) := \neg(x \approx \overline{m}) \in \Gamma(x)$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\overline{m}^{\mathfrak{A}}]$. Logo $\mathfrak{A}$ omite $\Gamma(x)$. Reciprocamente, se $\mathfrak{A}$ omite o conjunto $\Gamma(x)$ e $a \in A$ então existe $\neg(x \approx \overline{m}) \in \Gamma(x)$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \neg(x \approx \overline{m})[a]$, portanto $a = \overline{m}^{\mathfrak{A}}$ para algum m.

Proposição 4.15 Seja T teoria consistente em $\mathbb{L}_\Sigma$ (Σ como acima).
(i) Se T é ω-completa, então T tem um ω-modelo.
(ii) Se T tem um ω-modelo, então T é um ω-consistente.

Demonstração: (i) Suponha que T é ω-completa. Provaremos que T localmente omite $\Gamma(x) = \{\neg(x \approx \overline{0}), \neg(x \approx \overline{1}), \neg(x \approx \overline{2}), \ldots\}$.

Seja então $\theta(x)$ consistente com T; logo $T \not\models \forall x \neg\theta(x)$, donde existe n tal que $T \not\models \neg\theta(\overline{n})$, por ω-completude. Daqui $\theta(\overline{n})$ é consistente com T, e então $\theta(x) \wedge \neg\neg(x \approx \overline{n})$ é consistente com T. Ou seja, existe $\neg(x \approx \overline{n}) \in \Gamma(x)$ tal que $\theta(x) \wedge \neg\neg(x \approx \overline{n})$ é consistente com T, donde T omite localmente $\Gamma(x)$.

Pelo teorema de omissão de tipos, T tem um modelo $\mathfrak{A}$ que omite Γ, isto é, um ω-modelo.
(ii) Seja $\varphi(x)$ tal que $T \models \varphi(\overline{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que T tem um ω-modelo $\mathfrak{A}$. Logo $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{n})$ para todo n, donde $\mathfrak{A} \models \forall x \varphi(x)$, isto é: $\mathfrak{A} \not\models \exists x \neg\varphi(x)$. Daqui $T \not\models \exists x \neg\varphi(x)$. ■

Definição 4.16 A ω-*regra* é a regra de inferência infinitária

$$\frac{\varphi(\overline{0}),\ \varphi(\overline{1}), \ldots\ \varphi(\overline{n}), \ldots}{\forall x \varphi(x)}$$

onde $\varphi(x)$ é uma $\mathbb{L}_\Sigma$-fórmula.

A ω-*lógica* é obtida da lógica de primeira ordem acrescentando a ω-regra como uma regra de inferência, e permitindo provas infinitamente compridas. ■

Provaremos a seguir que a ω-lógica é completa para ω-modelos.

Proposição 4.17 *(Completude da ω-lógica)* Uma teoria T em $\mathbb{L}$ é consistente na ω-lógica sse T tem um ω-modelo.

Demonstração: Seja $T' = \{\varphi \in SENT(\Sigma)\ :\ T \vdash_\omega \varphi\}$, onde $T \vdash_\omega \varphi$ significa que φ é demonstrável na ω-lógica a partir de T.

Fato 1: T é consistente na ω-lógica sse T' é (classicamente) consistente.
Fato 2: T' omite localmente $\Gamma(x) = \{\neg(x \approx \overline{0}), \neg(x \approx \overline{1}), \neg(x \approx \overline{2}), \ldots\}$.

Demonstração dos **Fatos:** (1) Suponha que T' é inconsistente (na lógica clássica). Logo, existe uma sentença φ tal que $T' \vdash \varphi$ e $T' \vdash \neg\varphi$ (na lógica clássica). Seja Π uma prova (na lógica clássica) de φ a partir de T'. Se substituimos em Π cada ocorrência de uma premissa ψ pertencente a T' por alguma demonstração Π_ψ (na ω-logica) de ψ a partir de T, obteremos uma prova Π' de φ (na ω-logica) a partir de T. Logo $T \vdash_\omega \varphi$. Analogamente, considerando agora uma prova Π" de $\neg\varphi$ (na lógica clássica) a partir de T', obtemos que $T \vdash_\omega \neg\varphi$. Daqui inferimos que T é inconsistente na ω-lógica.

Reciprocamente, suponha que existe uma sentença φ tal que $T \vdash_\omega \varphi$ e $T \vdash_\omega \neg\varphi$. Daqui $\varphi, \neg\varphi \in T'$, portanto T' é inconsistente na lógica clásica.

(2) Seja $\varphi(x)$ consistente com T'. Suponha que

$$T \vdash_\omega \neg(\varphi(x) \wedge \neg\neg(x \approx \overline{n})) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Então $T \vdash_\omega \forall x \neg(\varphi(x) \wedge \neg\neg(x \approx \overline{n}))$ para todo n, donde $T \vdash_\omega \psi(\overline{n})$ para todo n, onde $\psi(y) := \forall x(x \approx y \Rightarrow \neg\varphi(x))$. Pela ω-regra, obtemos $T \vdash_\omega \forall y \psi(y)$, isto é: $T \vdash_\omega \forall y \forall x(x \approx y \Rightarrow \neg\varphi(x))$. Dado que $\vdash (x \approx x)$, então $T \vdash_\omega \forall x \neg\varphi(x)$.

Mas $\varphi(x)$ é consistente com T', logo existe $\mathfrak{A}$ e $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models T'$ e $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$. Como $T \vdash_\omega \forall x \neg\varphi(x)$, então $\forall x \neg\varphi(x) \in T'$, donde $\mathfrak{A} \vdash \forall x \neg\varphi(x)$; em particular $\mathfrak{A} \vdash \neg\varphi[a]$, uma contradição.

Portanto$(*)$ é falso, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T \nvdash_\omega \neg(\varphi(x) \wedge \neg\neg(x \approx \overline{n}))$. Daqui inferimos que $T' \nvdash \neg(\varphi(x) \wedge \neg\neg(x \approx \overline{n}))$ (pois $T' \vdash \psi$ implica $T \vdash_w \psi$ para toda ψ; a prova deste fato é deixada como exercício).

Portanto $T' \cup \{\varphi(x) \wedge \neg\neg(x \approx \overline{n})\}$ é consistente, para alguma fórmula $\neg(x \approx \overline{n}) \in \Gamma(x)$. Isto prova que T' omite localmente $\Gamma(x)$, e conclui a prova dos **Fatos**.

Suponha então que T é consistente na ω-lógica. Pelo **Fato 1**, T' é consistente (na lógica clássica). Pelo **Fato 2**, T' omite localmente $\Gamma(x)$. Logo, pelo Teorema de Omissão de Tipos 4.12, T' tem um modelo enumerable $\mathfrak{A}$ que omite $\Gamma(x)$. Como $T \subseteq T'$, então $\mathfrak{A}$ é um ω-modelo de T.

Reciprocamente, suponha que T tem um ω-modelo. Pelo Corolário 4.13 e o teorema de omissão de tipos, existe uma extensão completa T_1 de T que omite $\Gamma(x)$, isto é, com um ω-modelo. Pela proposição 4.15 (ii), vemos que T_1 é ω-consistente.

Fato 3: Se T_1 é ω-consistente e completo então, para toda fórmula φ: $T_1 \vdash_\omega \varphi$ implica $T_1 \models \varphi$.
A prova é realizada por indução transfinita no comprimento λ de uma prova Π de φ na ω-lógica a partir de T_1. Observe que basta provar o caso em que $\varphi = \forall x \psi(x)$ obtida de $\{\psi(\overline{0}), \psi(\overline{1}), \psi(\overline{2}), \ldots\}$ pela ω-regra.

Nesse caso, $\psi(\overline{n})$ é provado a partir de T_1 em $\mu_n < \lambda$ passos (para todo $n \in \mathbb{N}$), logo $T_1 \models \psi(\overline{n})$ para todo n (por hipótese da indução). Como T_1 é ω-consistente, então $T_1 \not\models \exists x \neg\psi(x)$. Como T_1 é completo e $\exists x \neg\psi(x)$ é sentença, então $T_1 \models \neg\exists x \neg\psi(x)$, isto é, $T_1 \models \forall x \psi(x)$, ou seja, $T_1 \models \varphi$. Isto conclui a prova do **Fato 3**.

Dado que T_1 é ω-consistente e completo, então, pelo **Fato 3**: $T_1 \vdash_\omega \varphi$ implica $T_1 \models \varphi$ para toda fórmula φ. Suponha que T_1 é inconsistente na ω-lógica; então existe uma sentença φ tal que $T_1 \vdash_\omega \varphi$ e $T_1 \vdash_\omega \neg\varphi$. Portanto $T_1 \models \varphi$ e $T_1 \models \neg\varphi$, uma contradição. Daqui inferimos que T_1 é consistente na ω-lógica. Como $T \subseteq T_1$, então T é consistente na ω-lógica. ■

Exercício 4.18 *Seja* $\mathfrak{A}$ *um modelo para a linguagem* $\mathbb{L}$ *da aritmética, isto é,* $\mathbb{L}$ *é como na proposição anterior tal que* $\mathfrak{A} \models \forall x((x \approx 0) \vee \exists y(x \approx S(y)))$.

a) *Provar que, se* $a \in A = |\mathfrak{A}|$, *então* $a = 0^{\mathfrak{A}}$ *ou* $a = S^{\mathfrak{A}}(b)$ *para algum* $b \in A$.

b) *Como seria um "número natural não-standard" de* $\mathfrak{A}$*?*

4.2 Teoremas de Interpolação

O principal resultado a ser provado nesta seção é o seguinte:

Teorema 4.19 *(Teorema de Interpolação de Craig)* Seja $\langle\varphi, \psi\rangle$ um par de sentenças tais que $\varphi \models \psi$. Então existe uma sentença θ tal que:
(i) $\varphi \models \theta$ e $\theta \models \psi$;
(ii) todo símbolo de relação, de função ou constante (excluindo a identidade "$\approx$") que ocorre em θ ocorre em φ e ψ, simultaneamente. (O símbolo "$\approx$" pode ocorrer em θ.)

Definição 4.20 A sentença θ no Teorema 4.19 é dita um *Interpolante de Craig* do par $\langle\varphi, \psi\rangle$. ■

Exemplos 4.21 Nos seguintes exemplos, $\varphi \models \psi$ e o símbolo "$\approx$" ocorre *no máximo* em *uma* das duas sentenças; porêm, *todo* interpolante de Craig leva o símbolo "$\approx$":
(a) φ é $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x))$, ψ é $\exists x Q(x)$;
(b) φ é $\exists x Q(x)$, ψ é $\exists x(P(x) \vee \neg P(x))$;
(c) φ é $\forall x \forall y(x \approx y)$, ψ é $\forall x \forall y(P(x) \Leftrightarrow P(y))$. ■

Demonstração do Teorema 4.19: Suponha que $\langle\varphi, \psi\rangle$ é um par de sentenças que não possui interpolante de Craig. Provaremos que $\varphi \not\models \psi$, isto é, $\varphi \wedge \neg\psi$ tem um modelo.

Sem perda da generalidade, nos concentraremos na linguagem enumerável $\mathbb{L}$ gerada pela assinatura $\Sigma = \langle\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ que contém apenas os símbolos de $\{\varphi, \psi\}$. Seja $\Sigma_1 = \langle\mathcal{P}^1, \mathcal{F}^1, \mathcal{C}^1\rangle$ a assinatura de φ, $\Sigma_2 = \langle\mathcal{P}^2, \mathcal{F}^2, \mathcal{C}^2\rangle$ a assinatura de ψ, e $\Sigma_0 = \langle \mathcal{P}^0, \mathcal{F}^0, \mathcal{C}^0 \rangle$ a assinatura comum, isto é:

$$\left.\begin{array}{lllll} \mathcal{P}_n & = & \mathcal{P}_n^1 \cup \mathcal{P}_n^2, & \mathcal{P}_n^0 & = & \mathcal{P}_n^1 \cap \mathcal{P}_n^2; \\ \mathcal{F}_n & = & \mathcal{F}_n^1 \cup \mathcal{F}_n^2, & \mathcal{F}_n^0 & = & \mathcal{F}_n^1 \cap \mathcal{F}_n^2; \\ \mathcal{C} & = & \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2, & \mathcal{C}^0 & = & \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2, \end{array}\right] (\boxtimes)$$

para todo $n \geq 1$. Sejam $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ e $\mathbb{L}_0$ as respectivas linguagens (todas enumeráveis). Considere $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de novas constantes, e $\mathbb{L}'$, $\mathbb{L}'_1$, $\mathbb{L}'_2$ e $\mathbb{L}'_0$ as linguagens obtidas respectivamente das anteriores acrescentando em cada uma delas o conjunto C de novas constantes.

Definição: Seja T uma teoria em $\mathbb{L}'_1$ e U uma teoria em $\mathbb{L}'_2$. Dizemos que $\theta \in SENT(\mathbb{L}'_0)$ *separa* T e U se $T \vDash \theta$ e $U \vDash \neg\theta$. Dizemos que T e U são *inseparáveis* se não existe uma sentença θ separando T e U.

Com esta definição, podemos provar o seguinte:

(1) $\{\varphi\}$ e $\{\neg\psi\}$ são inseparáveis.

Caso contrário, se $\theta(c_1, \ldots, c_n)$ separa $\{\varphi\}$ e $\{\neg\psi\}$, então sejam $x_1, \ldots, x_n$ variáveis que não ocorrem em $\theta(c_1, \ldots, c_n)$. Logo $\varphi \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \theta(x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg\psi \vDash \neg\theta(c_1, \ldots, c_n)$, donde $\theta(c_1, \ldots, c_n) \vDash \psi$, e então $\forall x_1 \ldots \forall x_n \theta(x_1, \ldots, x_n) \vDash \psi$. Isto é, $\forall x_1 \ldots \forall x_n \theta(x_1, \ldots, x_n) \in SENT(\Sigma_0)$ é um interpolante para $\langle \varphi, \psi \rangle$, contradição. Isto prova (1).

Agora considere $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ e $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ enumerações de todas as sentenças de $\mathbb{L}'_1$ e $\mathbb{L}'_2$, respectivamente. Construiremos duas seqüências de teorias:

$$\{\varphi\} = T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots,$$

$$\{\neg\psi\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$$

em $\mathbb{L}'_1$ e $\mathbb{L}'_2$, respectivamente, tais que:

(2) T_m e U_m são conjuntos finitos de sentenças inseparáveis;

(3) se $T_m \cup \{\varphi_m\}$ e U_m são inseparáveis, então $\varphi_m \in T_{m+1}$; se T_{m+1} e $U_m \cup \{\psi_m\}$ são inseparáveis, então $\psi_m \in U_{m+1}$;

(4) se $\varphi_m = \exists x \sigma(x)$ e $\varphi_m \in T_{m+1}$, então $\sigma(c) \in T_{m+1}$ para algum $c \in C$ tal que c não ocorre em $T_m \cup U_m \cup \{\varphi_m, \psi_m\}$; se $\psi_m = \exists x \delta(x)$ e $\psi_m \in U_{m+1}$, então $\delta(d) \in U_{m+1}$ para algum $d \in C$ tal que d não ocorre em $T_m \cup U_m \cup \{\varphi_m, \psi_m\}$.

Dados T_me U_m, construimos T_{m+1} e U_{m+1} de maneira óbvia. Assim,

$$T_{m+1} = \begin{cases} T_m & \text{se } T_m \cup \{\varphi_m\} \text{ e } U_m \text{ são separáveis} \\ T_m \cup \{\varphi_m\} & \text{se } T_m \cup \{\varphi_m\} \text{ e } U_m \text{ são inseparáveis} \\ & \text{e } \varphi_m \neq \exists x \sigma(x) \\ T_m \cup \{\varphi_m, \sigma(c)\} & \text{se } T_m \cup \{\varphi_m\} \text{ e } U_m \text{ são inseparáveis,} \\ & \varphi_m = \exists x \sigma(x) \text{ e } c \text{ é nova} \end{cases}.$$

Analogamente, U_{m+1} é da forma: U_m, $U_m \cup \{\psi_m\}$ ou $U_m \cup \{\psi_m, \delta(d)\}$. Defina $T_\omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} T_m$, $U_\omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$. Deixamos como exercício para o leitor provar o seguinte:

Fato 1: T_m e U_m são inseparáveis.

Fato 2: T_ω e U_ω são inseparáveis.

Fato 3: T_ω e U_ω são consistentes.

Provaremos agora o seguinte:

(5) T_ω é uma teoria maximal consistente em $\mathbb{L}_1'$, e U_ω é uma teoria maximal consistente em $\mathbb{L}_2'$.

De fato: T_ω é teoria consistente, pelo **Fato 3**. Suponha que $\varphi_m \notin T_\omega$ e $\neg\varphi_m \notin T_\omega$. De $\varphi_m \notin T_\omega$ inferimos que $\varphi_m \notin T_{m+1}$ donde, por (3), obtemos que $T_m \cup \{\varphi_m\}$ e U_m são separáveis. Logo, existe uma sentença $\theta \in \mathbb{L}_0'$ tal que $T_m \cup \{\varphi_m\} \vDash \theta$ e $U_m \vDash \neg\theta$. Daqui $T_\omega \cup \{\varphi_m\} \vDash \theta$ e $U_\omega \vDash \neg\theta$ e então, pelo *Teorema da Dedução*,

$$T_\omega \vDash (\varphi_m \Rightarrow \theta) \text{ e } U_\omega \vDash \neg\theta. \qquad (*)$$

Seja k tal que $\neg\varphi_m = \varphi_k$. Como $\varphi_k \notin T_\omega$ então $\varphi_k \notin T_{k+1}$ donde, por (3), $T_k \cup \{\varphi_k\}$ e U_k são separáveis. Usando o mesmo método utilizado para provar $(*)$ obtemos que existe uma sentença θ' de $\mathbb{L}_0'$ tal que $T_\omega \vDash (\varphi_k \Rightarrow \theta')$ e $U_\omega \vDash \neg\theta'$, isto é,

$$T_\omega \vDash (\neg\varphi_m \Rightarrow \theta') \text{ e } U_\omega \vDash \neg\theta'. \qquad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ inferimos que $T_\omega \vDash \theta \vee \theta'$ e $U_\omega \vDash \neg(\theta \vee \theta')$, uma contradição (pois T_ω e U_ω são inseparáveis). Daqui, $\varphi_m \in T_\omega$ ou $\neg\varphi_m \in T_\omega$, isto é, T_ω é maximal consistente. Analogamente provamos que U_ω é maximal consistente. Logo, (5) é verdadeira.

Provaremos agora:

(6) $T_\omega \cap U_\omega$ é uma teoria maximal consistente em $\mathbb{L}_0'$.

De fato: $T_\omega \cap U_\omega$ é consistente em $\mathbb{L}_0'$, pois T_ω e U_ω são consistentes. Seja $\sigma \in SENT(\Sigma_0')$; por (5), $\sigma \in T_\omega$ ou $\neg\sigma \in T_\omega$, e $\sigma \in U_\omega$ ou $\neg\sigma \in U_\omega$. Como T_ω e U_ω são inseparáveis (pelo **Fato 2**), não poderiamos ter $\sigma \in T_\omega$ e $\neg\sigma \in U_\omega$ (ou vice-versa). Daqui $\sigma \in T_\omega \cap U_\omega$ ou $\neg\sigma \in T_\omega \cap U_\omega$, provando (6).

Podemos finalmente construir um modelo de $\varphi \wedge \neg\psi$. Seja $\mathfrak{B}_1' = \langle \mathfrak{B}_1; b_0, b_1, \ldots \rangle$ um modelo de T_ω (em que $\mathfrak{B}_1$ é uma estrutura em $\mathbb{L}_1$). Por (4) e (5), vemos que $\mathfrak{A}_1' = \langle \mathfrak{A}_1; b_0, b_1, \ldots \rangle$ (onde $A_1 := |\mathfrak{A}_1| = \{b_0, b_1, \ldots\}$) é submodelo de $\mathfrak{B}_1'$ e $\mathfrak{A}_1' \vDash T_\omega$. A prova deste fato é idêntica à prova realizada no Teorema de

Omissão de Tipos 4.12. Similarmente, U_ω tem um modelo $\mathfrak{A}_2' = \langle \mathfrak{A}_2; d_0, d_1, \ldots \rangle$ com universo $A_2 := |\mathfrak{A}_2| = \{d_0, d_1, \ldots\}$. Seja $\mathfrak{A}_i''$ o reduto de $\mathfrak{A}_i'$ a Σ_0' $(i = 1, 2)$. Observe que

$$\mathfrak{A}_1'' \models T_\omega \cap U_\omega \ \text{ e } \ \mathfrak{A}_2'' \models T_\omega \cap U_\omega. \qquad (***)$$

Considere $h : A_1 \to A_2$ dada por $h(b_i) = d_i$ (para todo $i \in \mathbb{N}$).

Fato 4: $h : \mathfrak{A}_1'' \to \mathfrak{A}_2''$ é um isomorfismo de $\mathbb{L}_0'$-estruturas.
Com efeito: seja P um símbolo de predicado n-ário de $\mathbb{L}_0'$, e $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \in A_1^n$. Por (6) e $(***)$ temos que $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \in P^{\mathfrak{A}_1''}$ sse $\mathfrak{A}_1'' \models P(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ sse $P(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \in T_\omega \cap U_\omega$ sse $\mathfrak{A}_2'' \models P(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ sse $(h(b_{i_1}), \ldots, h(b_{i_1})) \in P^{\mathfrak{A}_2''}$. Seja c uma constante de $\mathbb{L}_0'$. Então $c^{\mathfrak{A}_1''} = b_i$ sse $\mathfrak{A}_1'' \models (c \approx c_i)$ sse $(c \approx c_i) \in T_\omega \cap U_\omega$ sse $\mathfrak{A}_2'' \models (c \approx c_i)$ sse $c^{\mathfrak{A}_2''} = h(b_i)$. Daqui $h(c^{\mathfrak{A}_1''}) = h(b_i) = c^{\mathfrak{A}_2''}$. Finalmente, seja f um símbolo de função n-ário de $\mathbb{L}_0'$, e $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \in A_1^n$. Então $f^{\mathfrak{A}_1''}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) = b_k$ sse $\mathfrak{A}_1'' \models (f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \approx c_k)$ sse $(f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \approx c_k) \in T_\omega \cap U_\omega$ sse $\mathfrak{A}_2'' \models (f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \approx c_k)$ sse $f^{\mathfrak{A}_2''}(h(b_{i_1}), \ldots, h(b_{i_n})) = h(b_k)$. Daqui $h(f^{\mathfrak{A}_1''}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) = h(b_k) = f^{\mathfrak{A}_2''}(h(b_{i_1}), \ldots, h(b_{i_n}))$. Isto conclui a prova do **Fato 4**.

Daqui podemos identificar b_n com d_n, e então os redutos de $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ a Σ_0 coincidem (pois os redutos $\mathfrak{A}_1''$ e $\mathfrak{A}_2''$ de $\mathfrak{A}_1' = \langle \mathfrak{A}_1; b_0, b_1, \ldots \rangle$ e $\mathfrak{A}_2' = \langle \mathfrak{A}_2; b_0, b_1, \ldots \rangle$ a Σ_0' coincidem, pelo **Fato 4**). Seja $\mathfrak{A}$ o modelo para $\mathbb{L}$ cujo reduto a Σ_i é $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$. Usando (⊠) acima, vemos então que $\mathfrak{A}$ está bem definido. Além disso, como $\varphi \in T_\omega$ então $\mathfrak{A} \models \varphi$. De fato: $\varphi \in T_\omega$, logo $\mathfrak{A}_1' \models \varphi$; mas $\varphi \in SENT(\Sigma_1)$, logo $\mathfrak{A}_1 \models \varphi$, donde $\mathfrak{A} \models \varphi$. Como $\neg\psi \in U_\omega$ então, analogamente, provamos que $\mathfrak{A} \models \neg\psi$. Daqui $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \neg\psi$. Isto conclui a demonstração. ■

Veremos a seguir duas aplicações do Teorema de Interpolação de Craig.

A primeira analisa as maneiras de definir uma nova relação. Sejam P e P' dois novos símbolos de relação n-ários, que não pertencem a $\mathbb{L}$, e considere a assinatura Σ_P obtida de Σ acrescentando P a $\mathcal{P}_n$. Analogamente definimos $\Sigma_{P'}$ a partir de Σ pelo acréscimo de P', assim como a assinatura $\Sigma_{P,P'}$ que incorpora ambos símbolos P e P'.

Definição 4.22 Seja $\Gamma(P)$ um conjunto de sentenças em $\mathbb{L}(\Sigma_P)$, e $\Gamma(P')$ o correspondente conjunto de sentenças de $\mathbb{L}(\Sigma_{P'})$ (trocando P por P'). Dizemos que $\Gamma(P)$ *define implicitamente* P se

$$\Gamma(P) \cup \Gamma(P') \models \forall x_1 \ldots \forall x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P'(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (DI)$$

em $\mathbb{L}(\Sigma_{P,P'})$. ■

Proposição 4.23 $\Gamma(P)$ define P implicitamente sse: se $\langle \mathfrak{A}, R \rangle$ e $\langle \mathfrak{A}, R' \rangle$ são modelos de $\Gamma(P)$, então $R = R'$.

Demonstração: $\Rightarrow$) Assuma (DI), e sejam $\langle \mathfrak{A}, R \rangle$, $\langle \mathfrak{A}, R' \rangle$ dois modelos de $\Gamma(P)$. Daqui $\mathfrak{A}' := \langle \mathfrak{A}, R, R' \rangle$ é um $\Sigma_{P,P'}$-modelo de $\Gamma(P) \cup \Gamma(P')$, portanto

$\langle \mathfrak{A}, R, R' \rangle \models \forall \vec{x}(P(\vec{x}) \Leftrightarrow P'(\vec{x}))$, por (DI). Logo, $\vec{a} \in P^{\mathfrak{A}'}$ sse $\vec{a} \in P'^{\mathfrak{A}'}$, isto é: $\vec{a} \in R$ sse $\vec{a} \in R'$, donde $R = R'$.
$\Leftarrow$) Seja $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, R, R' \rangle$ uma $\Sigma_{P,P'}$-estrutura, e suponha que $\mathfrak{A}' \models \Gamma(P) \cup \Gamma(P')$; logo $\langle \mathfrak{A}, R \rangle$ e $\langle \mathfrak{A}, R' \rangle$ são modelos de $\Gamma(P)$, donde $R = R'$ (por hipótese). Daqui $\vec{a} \in R$ sse $\vec{a} \in R'$, isto é, $\vec{a} \in P^{\mathfrak{A}'}$ sse $\vec{a} \in P'^{\mathfrak{A}'}$. Logo $\mathfrak{A}' \models \forall \vec{x}(P(\vec{x}) \Leftrightarrow P'(\vec{x}))$, e então vale (DI). ■

Definição 4.24 Dizemos que $\Gamma(P)$ *define explicitamente* P se existe uma fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{L}$ tal que

$$\Gamma(P) \models \forall x_1 \ldots \forall x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \text{ em } \mathbb{L}(\Sigma_P).$$

■

Usando as regras da lógica de primeira ordem vemos que, se $\Gamma(P)$ define P explicitamente, então $\Gamma(P)$ define P implicitamente. Daqui, se $\Gamma(P)$ não define P implicitamente, então $\Gamma(P)$ não define P explicitamente. Logo, pela proposição anterior, para provar que $\Gamma(P)$ não define P explicitamente basta arranjar dois modelos $\langle \mathfrak{A}, R \rangle$ e $\langle \mathfrak{A}, R' \rangle$, com o mesmo reduto $\mathfrak{A}$ para $\mathbb{L}$, tais que $R \neq R'$. Este é o chamado *método de Padoa*. Provaremos a recíproca:

Teorema 4.25 *(Teorema de Beth)* $\Gamma(P)$ define P implicitamente sse $\Gamma(P)$ define P explicitamente.

Demonstração: Provaremos apenas a parte difícil, "somente se".
Suponha que $\Gamma(P)$ define P implicitamente. Seja $\{c_1, \ldots, c_n\}$ um conjunto de n novas constantes. Considere as seguintes assinaturas:

- Σ_P, $\Sigma_{P'}$ e $\Sigma_{P,P'}$ como antes.
- Σ' obtida de Σ acrescentando $\{c_1, \ldots, c_n\}$ como novas constantes.
- Σ'_P obtida de Σ' acrescentando o símbolo de predicado P.
- $\Sigma'_{P'}$ obtida de Σ' acrescentando o símbolo de predicado P'.
- $\Sigma'_{P,P'}$ obtida de Σ' acrescentando os símbolos de predicado P e P'.

Como $\Gamma(P) \cup \Gamma(P') \models \forall \vec{x}(P(\vec{x}) \Leftrightarrow P'(\vec{x}))$ em $\mathbb{L}(\Sigma_{P,P'})$, então

$$\Gamma(P) \cup \Gamma(P') \models (P(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow P'(c_1, \ldots, c_n)) \text{ em } \mathbb{L}(\Sigma'_{P,P'}).$$

Pelo teorema da compacidade, existem $\Delta \subseteq \Gamma(P)$ e $\Delta' \subseteq \Gamma(P')$ finitos tais que $\Delta \cup \Delta' \models (P(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow P'(c_1, \ldots, c_n))$ em $\mathbb{L}(\Sigma'_{P,P'})$. Suponha que $\Delta = \{\varphi_1(P), \ldots, \varphi_r(P)\}$ e $\Delta' = \{\psi_1(P'), \ldots, \psi_s(P')\}$, e seja

$$\psi(P) := \bigwedge_{i=1}^{r} \varphi_i(P) \wedge \bigwedge_{j=1}^{s} \psi_j(P).$$

Logo $\psi(P) \wedge \psi(P') \vDash (P(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow P'(c_1, \ldots, c_n))$. Daqui

$$\underbrace{\psi(P) \wedge P(c_1, \ldots, c_n)}_{\text{em } \mathbb{L}(\Sigma'_P)} \vDash \underbrace{\psi(P') \Rightarrow P'(c_1, \ldots, c_n)}_{\text{em } \mathbb{L}(\Sigma'_{P'})}.$$

Pelo teorema de interpolação de Craig, existe uma sentença $\theta(c_1, \ldots, c_n)$ de $\mathbb{L}(\Sigma')$ tal que:

(1) $\psi(P) \wedge P(c_1, \ldots, c_n) \vDash \theta(c_1, \ldots, c_n)$ em $\mathbb{L}(\Sigma'_P)$, e

(2) $\theta(c_1, \ldots, c_n) \vDash (\psi(P') \Rightarrow P'(c_1, \ldots, c_n))$ em $\mathbb{L}(\Sigma'_{P'})$.

Se $\langle \mathfrak{A}, R' \rangle$ é um modelo para $\mathbb{L}(\Sigma'_P)$, então $\langle \mathfrak{A}, R \rangle$ é modelo para $\mathbb{L}(\Sigma'_{P'})$ (interpretando P' por R). Logo, de (2) obtemos:

(3) $\theta(c_1, \ldots, c_n) \vDash (\psi(P) \Rightarrow P(c_1, \ldots, c_n))$ em $\mathbb{L}(\Sigma'_P)$.

De (1) e (3) obtemos:

(4) $\psi(P) \vDash (P(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow \theta(c_1, \ldots, c_n))$ em $\mathbb{L}(\Sigma'_P)$.

Como nenhuma das constantes $c_1, \ldots, c_n$ ocorre em $\psi(P) \in SENT(\Sigma_P)$, então $\psi(P) \vDash \forall \vec{x}(P(\vec{x}) \Leftrightarrow \theta(\vec{x}))$ para $x_1, \ldots, x_n$ não ocorrendo em $\theta(c_1, \ldots, c_n)$. Mas, pela definição de $\psi(P)$, temos finalmente que: $\Gamma(P) \vDash \forall \vec{x}(P(\vec{x}) \Leftrightarrow \theta(\vec{x}))$. ■

A segunda aplicação do teorema de interpolação de Craig é o seguinte e importante resultado de Teoria de Modelos:

Teorema 4.26 *(Teorema da Consistência de Robinson)* Para $i = 1, 2$ considere uma assinatura $\Sigma_i = \langle \mathcal{P}^i, \mathcal{F}^i, \mathcal{C}^i \rangle$, e seja $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ a interseção de Σ_1 e Σ_2, isto é:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_n & = & \mathcal{P}^1_n \cap \mathcal{P}^2_n, \\ \mathcal{F}_n & = & \mathcal{F}^1_n \cap \mathcal{F}^2_n, \\ \mathcal{C} & = & \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2. \end{array}$$

Analogamente definimos Σ' como sendo a união de Σ_1 e Σ_2. Sejam $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}$ e $\mathbb{L}'$ as linguagens correspondentes. Suponha que T é uma teoria completa em $\mathbb{L}$, e $T_1 \supseteq T$, $T_2 \supseteq T$ são teorias consistentes em $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$, respectivamente. Então, $T_1 \cup T_2$ é consistente em $\mathbb{L}'$.

Demonstração: Assuma as hipóteses do teorema, e suponha que a conclusão é falsa, isto é, $T_1 \cup T_2$ é inconsistente em $\mathbb{L}'$.

Pelo teorema da compacidade, existem $\Gamma_1 \subseteq T_1$ e $\Gamma_2 \subseteq T_2$ finitos tais que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ é inconsistente. Seja σ_i a conjunção das fórmulas de Γ_i ($i = 1, 2$). Como $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é inconsistente, então $\sigma_1 \vDash \neg\sigma_2$. Pelo teorema de interpolação de Craig, existe uma sentença θ contendo os símbolos em comum de σ_1 e σ_2 tal que $\sigma_1 \vDash \theta$, $\theta \vDash \neg\sigma_2$; daqui θ é uma sentença de $\mathbb{L}$.

Como $T_1 \models \sigma_1$, então $T_1 \models \theta$. Logo, $T_1 \not\models \neg\theta$, pois T_1 é consistente, donde $T \not\models \neg\theta$ (pois $T \subseteq T_1$).

Por outro lado, $T_2 \models \sigma_2$ e $\sigma_2 \models \neg\theta$ (pois $\theta \models \neg\sigma_2$), portanto $T_2 \models \neg\theta$. Como T_2 é consistente, então $T_2 \not\models \theta$, donde $T \not\models \theta$ (pois $T \subseteq T_2$).

Assim, existe uma sentença θ em $\mathbb{L}$ tal que $T \not\models \theta$, $T \not\models \neg\theta$. Isto contradiz a completude de T em $\mathbb{L}$. ■

5 Cadeias de Modelos

5.1 Extensões Elementares e Cadeias Elementares

Dados dois modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ para $\mathbb{L}$, temos definidas as seguintes noções:

- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são elementarmente equivalentes);
- $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ é sub-modelo de $\mathfrak{B}$).

Combinando as duas, obtemos a noção de modelos que são sub-modelos ou extensões de um modelo elementarmente equivalentes (imersão elementar). Como vimos na Observação 1.23, os modelos $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N} - \{0\}, < \rangle$ e $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ são isomorfos (via $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $h(x) := x - 1$) e $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, mas $\mathfrak{A} \models \forall x(y < x)[1]$ e $\mathfrak{B} \not\models \forall x(y < x)[1]$. Isto é, $\mathfrak{A} \not\prec \mathfrak{B}$.

A noção de *Submodelo elementar* é mais forte: um modelo de um modelo dado no qual os elementos em comum satisfazem as mesmas propriedades de primeira ordem com relação aos dois modelos (lembre da Definição 1.19).

Agora responderemos às seguintes questões:

1. Como podemos determinar se um modelo $\mathfrak{A}$ é (isomorfo a) um submodelo elementar de outro modelo $\mathfrak{B}$?
2. Existem restrições às cardinalidades de submodelos elementares e extensões de um modelo $\mathfrak{A}$ dado?
3. Quando é que dois ou mais modelos têm uma extensão elementar em comum?
4. A noção de extensões elementares pode ser iterada transfinitamente?

Lembremos que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ denota que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ é sub-modelo elementar. Dado $X \subseteq A$, então $\langle \mathfrak{A}; a \rangle_{a \in X}$ ou $\mathfrak{A}_X$ denota a expansão natural de $\mathfrak{A}$ à linguagem $\mathbb{L}_X$ (veja o parágrafo após a Definição 2.17).

Proposição 5.1
(i) Se $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.
(ii) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}$
(iii) Se $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$, então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.
(iv) Se $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ e $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Demonstração: Deixamos como exercício para o leitor. ■

Definição 5.2 Uma *imersão elementar* de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ é um isomorfismo h de $\mathfrak{A}$ num sub-modelo elementar de $\mathfrak{B}$, denotado $h : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. A notação $\mathfrak{A} \tilde{\subset} \mathfrak{B}$ indica que existe uma imersão de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$, isto é, existe $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \underset{h}{\cong} \mathfrak{B}|_{h(A)}$. Finalmente, a notação $\mathfrak{A} \tilde{\prec} \mathfrak{B}$ indica que $\mathfrak{A}$ é elementarmente imersível em $\mathfrak{B}$, isto é, existe uma imersão elementar $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, ou seja, $\mathfrak{A} \underset{h}{\cong} \mathfrak{B}|_{h(A)} \prec \mathfrak{B}$. ■

Definição 5.3 Seja $\mathfrak{A}$ com $|\mathfrak{A}| = A$, e seja $\mathbb{L}_A$ definida como no parágrafo prévio à Definição 2.17. O *diagrama elementar* de $\mathfrak{A}$ é a teoria $Th(\mathfrak{A}_A)$ de todas as sentenças de $\mathbb{L}_A$ que valem no modelo $\mathfrak{A}_A = \langle \mathfrak{A}; a \rangle_{a \in A}$ (lembre que $\Delta_{\mathfrak{A}}$, o diagrama de $\mathfrak{A}$, é o conjunto das sentenças atômicas ou negação de sentenças atômicas de $\mathbb{L}_A$ que valem em $\mathfrak{A}_A$). ■

Proposição 5.4 Seja Γ_A o diagrama elementar de $\mathfrak{A}$. Então:
(a) $\mathfrak{A} \tilde{\prec} \mathfrak{B}$ sse alguma expansão $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$ é um modelo de Γ_A.
(b) Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ sse $\langle \mathfrak{B}; a \rangle_{a \in A} \models \Gamma_A$.

Demonstração: (a) Separamos a prova em duas partes.
$\Rightarrow$) Assuma $h : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ e seja $\mathfrak{B}' = \langle \mathfrak{B}; h(a) \rangle_{a \in A}$ modelo de $\mathbb{L}_A$.
Seja $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \in \Gamma_A$, logo:

$$\langle \mathfrak{A}; a \rangle_{a \in A} \models \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \text{ implica } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n] \text{ implica}$$

$$\mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1) \ldots h(a_n)] \text{ implica } \mathfrak{B}' \models \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}).$$

Logo, $\mathfrak{B}' \models \Gamma_A$.
$\Leftarrow$) Seja $\mathfrak{B}' = \langle \mathfrak{B}; h(a) \rangle_{a \in A}$ uma expansão de $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B}' \models \Gamma_A$. Provaremos que $h : A \to \mathfrak{B}$ é imersão elementar.

(i) Seja P símbolo de predicado n-ário, e $a_1, \ldots, a_n \in A$. Então

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \text{ sse } \mathfrak{A}_A \models P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \text{ sse}$$
$$\mathfrak{B}' \models P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \text{ sse } (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}.$$

(ii) Seja c uma constante, e assuma que $c^{\mathfrak{A}} = a$. Logo $\mathfrak{A}_A \models (c \approx c_a)$ donde $\mathfrak{B}' \models (c \approx c_a)$, isto é: $c^{\mathfrak{B}} = h(a) = h(c^{\mathfrak{A}})$.

(iii) Seja f símbolo de função n-ário, $a_1, \ldots, a_n \in A$ e seja $a := f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. Logo $\mathfrak{A}_A \models (f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \approx c_a)$ donde $\mathfrak{B}' \models (f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \approx c_a)$, isto é: $f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = h(a) = h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))$.

Daqui provamos que $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é uma imersão, isto é: $\mathfrak{A} \underset{h}{\cong} \mathfrak{B}|_{h(A)}$. Provaremos que $\mathfrak{B}|_{h(A)} \prec \mathfrak{B}$. Para isso, pela Proposição 1.24, basta provar que $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x; \vec{x})[h(a_1) \ldots h(a_n)]$ implica que $\mathfrak{B} \models \varphi(x; \vec{x})[h(a); h(a_1) \ldots h(a_n)]$ para algum $a \in A$, para toda $\varphi(x; \vec{x})$.

Assim, seja $\varphi(x;\vec{x})$ tal que $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi(x,\vec{x})[h(a_1)\ldots h(a_n)]$. Logo,

$$\mathfrak{B}' \models \exists x\varphi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}).$$

Se tivessemos que $\mathfrak{A}_A \not\models \exists x\varphi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ então $\mathfrak{A}_A \models \neg\exists x\varphi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, donde $\mathfrak{B}' \models \neg\exists x\varphi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, contradição. Logo, $\mathfrak{A}_A \models \exists x\varphi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, e então $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi(x;\vec{x})[a_1 \ldots a_n]$. Daqui obtemos que

$$\mathfrak{B}|_{h(A)} \models \exists x\varphi(x;\vec{x})[h(a_1)\ldots h(a_n)],$$

pois $\mathfrak{A} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{B}|_{h(A)}$. Isto conclui a prova de (a).

(b) Sai da prova do item (a), tomando h como sendo a inclusão. ■

Proposição 5.5 Seja $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ uma família de modelos elementarmente equivalentes. Então existe um modelo $\mathfrak{B}$ tal que todo modelo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$ está elementarmente imerso em $\mathfrak{B}$.

Demonstração: Para cada $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$ seja Γ_A o seu diagrama elementar. Assumamos que, se $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}'$, então $\{c_a : a \in A\} \cap \{c_{a'} : a' \in A'\} = \emptyset$. Seja $\mathbb{L}_{\mathfrak{F}}$ a linguagem obtida da união das assinaturas Σ_A (para $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$), e seja $\Delta = \bigcup_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{F}} \Gamma_A$. Provaremos que Δ é um conjunto consistente de sentenças de $\mathbb{L}_{\mathfrak{F}}$.

Seja $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Delta$ finito; podemos supor que $\varphi_i \in \Gamma_{A_i}$, e $\mathfrak{A}_i \neq \mathfrak{A}_j$ se $i \neq j$ (se tivessemos várias $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_m} \in \Gamma_{A_i}$, podemos substituí-las pela conjunção $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_m}$). Podemos assumir que, para algum $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_i = \varphi'_i(c_{a_{i_1}}, \ldots, c_{a_{i_k}})$ para alguma fórmula $\varphi'_i(x_1, \ldots, x_k)$ de $\mathbb{L}$ nas variaveis $x_1, \ldots, x_k$, onde $a_{i_j} \in A_i$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k)$.

Dado que $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, e $\mathfrak{A}_i \models \exists x_1 \ldots \exists x_k \varphi'_i$, então

$$\mathfrak{A}_1 \models (\exists x_1 \ldots \exists x_k \varphi'_1) \wedge (\exists x_1 \ldots \exists x_k \varphi'_2) \wedge \ldots \wedge (\exists x_1 \ldots \exists x_k \varphi'_n).$$

Se $b_{i_j} \in A_1$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k)$ são os elementos de A_1 que realizam a sentença acima, então

$$\langle \mathfrak{A}_1; b_{i_j} \rangle_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,k} \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n.$$

Isto prova que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ tem modelo.

Pelo teorema da compacidade, Δ tem modelo $\mathfrak{B}'$. Seja $\mathfrak{B}$ o reduto de $\mathfrak{B}'$ à assinatura original Σ. Como $\mathfrak{B}$ tem uma expansão (o reduto de $\mathfrak{B}'$ a Σ_A) que é modelo de Γ_A, então $\mathfrak{A} \tilde{\prec} \mathfrak{B}$ para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$, pela Proposição 5.4 (a). Isto conclui a prova. ■

Teorema 5.6 Todo modelo infinito $\mathfrak{A}$ tem extensões elementares arbitrariamente grandes.

Demonstração: Seja Γ_A o diagrama elementar de $\mathfrak{A}$. Dado que $\mathfrak{A}_A$ é um modelo infinito de Γ_A, então Γ_A tem modelos arbitrariamente grandes, pelo teorema (ascendente) de Löwenheim-Skolem-Tarski. O resultado segue da Proposição 5.4 (a). Com efeito, basta observar que todo modelo de Γ_A é da forma $\langle\mathfrak{B}, a\rangle_{a\in A}$ tal que $\mathfrak{A}\tilde{\prec}\mathfrak{B}$. ■

Provaremos a seguir um resultado um pouco mais forte que o teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski:

Teorema 5.7 Seja $\mathfrak{A}$ um modelo de cardinalidade α e seja β um cardinal tal que $\|\mathbb{L}\| \leq \beta \leq \alpha$. Então $\mathfrak{A}$ tem um sub-modelo elementar de cardinalidade β. Mais ainda, dado $X \subseteq A$ de cardinalidade $\leq \beta$, então $\mathfrak{A}$ tem um sub-modelo elementar de cardinalidade β contendo X.

Demonstração: Podemos assumir, sem perda de generalidade, que X tem cardinalidade β.

Para cada fórmula $\varphi(x;\vec{x})$ e para cada $\vec{a} \in X^n$ tal que $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\vec{a}]$, escolha $b \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[b;\vec{a}]$.

Considere X_1 o conjunto obtido de X acrescentando os b escolhidos (um b para cada $\varphi(x;\vec{x})$ e cada $\vec{a} \in X^n$ tais que $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\vec{a}]$). Dado que $\overline{\overline{X}} = \beta$ e $\|\mathbb{L}\| \leq \beta$ então $\overline{\overline{X_1}} = \beta$.

Reitere o processo, tomando agora X_1 no lugar de X. Isto é, para para cada fórmula $\varphi(x;\vec{x})$ e para cada n-upla $\vec{a} \in X_1^n$ tais que $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\vec{a}]$, escolha $b \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[b;\vec{a}]$, e defina X_2 como sendo X_1 acrescentando os b obtidos (um b para cada φ e $\vec{a}$ tal que $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\vec{a}]$). Como antes, obtemos que $\overline{\overline{X_2}} = \beta$.

Iterando o processo, definimos uma cadeia

$$X \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Seja $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Fato: B é fechado pelas funções de $\mathbb{L}$.
Com efeito, seja $f \in \mathcal{F}_r$ e $\vec{a} \in B^r$. Suponha que $a_j \in X_{i_j}$ (para $j = 1,\ldots,r$) e seja $k = Max\{i_j \ : \ j \leq r\}$. Logo, $\vec{a} \in X_k^r$. Como $\mathfrak{A} \models \exists x(f(x_1,\ldots,x_r) \approx x)[\vec{a}]$, então $f^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \in X_{k+1}$. Daqui $f^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \in B$. Isto prova o **Fato**.

Pelo **Fato**, a estrutura $\mathfrak{B}$ dada por $\mathfrak{A}|_B$ é um submodelo de $\mathfrak{A}$. Cada X_n tem cardinalidade β, logo B tem cardinalidade β (pois β é infinito).

Provaremos agora que $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$. Para isto, basta provar: se $\vec{a} \in B^n$ e $\varphi(x;\vec{x}) \in FOR(\Sigma)$, então $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\vec{a}]$ implica que $\mathfrak{A} \models \varphi[b;\vec{a}]$ para algum $b \in \mathfrak{B}$. Assim, seja $\vec{a} \in B^n$ e $\varphi(x;\vec{x})$ uma fórmula tal que $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\vec{a}]$. Como antes, existe k tal que $\vec{a} \in X_k^n$; logo, existe $b \in X_{k+1}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[b;\vec{a}]$. Mas $X_{k+1} \subseteq B$, logo $b \in B$. Daqui $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{B}$ tem cardinalidade β e $X \subseteq B$. ■

Corolário 5.8 Se T tem um modelo $\mathfrak{A}$ de cardinalidade α que omite um conjunto $\Gamma(x)$, e se $\|\mathbb{L}\| \leq \beta < \alpha$, então T tem um modelo $\mathfrak{B}$ de cardinalidade β que omite $\Gamma(x)$.

Demonstração: Seja $\beta < \alpha$; pela proposição anterior, existe $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ de cardinalidade β. Como T é um conjunto de sentenças e $\mathfrak{A} \models T$, então $\mathfrak{B} \models T$, pois $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Fixe $a \in B$; logo $a \in A$. Como $\mathfrak{A}$ omite $\Gamma(x)$, existe $\varphi(x) \in \Gamma(x)$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[a]$. Como $a \in B$ e $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[a]$. Daqui vemos que $\mathfrak{B}$ também omite $\Gamma(x)$. ■

Definição 5.9 Seja α um cardinal. Uma teoria T é *α-categórica* se, dados $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ dois modelos de T com $\overline{\overline{A}} = \alpha = \overline{\overline{B}}$, então $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. ■

Proposição 5.10 *(Teste de Łoś-Vaught)* Suponha que uma teoria consistente T tem somente modelos infinitos, e suponha também que T é α-categórica para algum cardinal infinito $\alpha \geq \|\mathbb{L}\|$. Então T é completa.

Demonstração: É suficiente provar (assumindo as hipóteses do enunciado) que dois modelos quaisquer de T são equivalentes.
Com efeito, se φ é uma sentença tal que $T \not\models \varphi$, então $T \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente, logo existe uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models T \cup \{\neg\varphi\}$. Analogamente, se $T \not\models \neg\varphi$, então existe uma estrutura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models T \cup \{\varphi\}$. Logo: $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{B} \models T$ e $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$ (pois $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ mas $\mathfrak{B} \models \varphi$). Ou seja: se T não é completa, então existem modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ de T tais que $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$. Portanto, se dois modelos quaisquer de T são equivalentes então T é completa.

Sejam então $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ dois modelos de T. Logo $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são infinitos, por hipótese. Considere a teoria de $\mathfrak{A}$

$$\Gamma := Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in SENT(\Sigma) \ : \ \mathfrak{A} \models \varphi\}.$$

Como Γ tem um modelo de cardinalidade infinita (no caso, $\mathfrak{A}$), então, por Löwensteim-Skolem-Tarski (ascendente ou descendente) existe um modelo $\mathfrak{A}'$ de Γ de cardinalidade α.
Mas $\mathfrak{A}' \models \Gamma$ sse, para todo $\varphi \in SENT(\Sigma)$, se $\mathfrak{A} \models \varphi$ então $\mathfrak{A}' \models \varphi$. E isto equivale a dizer que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$. Daqui vemos que existe um modelo $\mathfrak{A}'$ de T tal que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$ e $\overline{\overline{A'}} = \alpha$. Da mesma maneira, existe um modelo $\mathfrak{B}'$ de T tal que $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}'$ e $\overline{\overline{\mathfrak{B}'}} = \alpha$.
Como T é α-categórica, então $\mathfrak{A}' \simeq \mathfrak{B}'$, donde $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}'$. Daqui $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Isto completa a prova. ■

Exemplos 5.11 As seguintes teorias são categóricas em algum cardinal infinito, e não tem modelos finitos. Logo, são completas.

1. A teoria de ordem total densa sem máximo nem mínimo é ω-categórica.
2. A teoria de álgebras de Boole sem átomos é ω-categórica.
3. A teoria de corpos de característica 0 (ou p, com p primo positivo) algébricamente fechados é ω_1-categórica.
4. A teoria de grupos abelianos infinitos com elementos de ordem p é α-categórica para todo α infinito.

5. A teoria $\{\neg(c_n \approx c_m) \ : \ n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}\}$ é ω_1-categórica. ■

Estudaremos a seguir cadeias de modelos.

Definição 5.12 Uma *cadeia de modelos* é uma seqüência crescente de modelos

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_\beta \subseteq \ldots \quad (\beta \in \alpha)$$

de comprimento um ordinal α. ■

Definição 5.13 Seja

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_\beta \subseteq \ldots \quad (\beta \in \alpha)$$

uma cadeia de modelos. A *união da cadeia* é o modelo $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{\beta \in \alpha} \mathfrak{A}_\beta$ definido como segue:

- $|\mathfrak{A}| = \bigcup\limits_{\beta \in \alpha} A_\beta$;
- Se R é um predicado n-ário de Σ, então $R^{\mathfrak{A}} = \bigcup\limits_{\beta \in \alpha} R^{\mathfrak{A}_\beta}$;
- Se f é função n-ária de Σ, então $f^{\mathfrak{A}} = \bigcup\limits_{\beta \in \alpha} f^{\mathfrak{A}_\beta}$;
- se c é uma constante de Σ, então $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}_\beta}$ para $\beta \in \alpha$ arbitrário. ■

Observe que $f^{\mathfrak{A}}$ está bem definida, pois a cadeia é crescente; logo, $f^{\mathfrak{A}_\beta}|_{A_\beta \cap A_\xi} = f^{\mathfrak{A}_\xi}|_{A_\beta \cap A_\xi}$ para todo $\beta, \xi \in \alpha$. Analogamente, $c^{\mathfrak{A}}$ está bem definido.

Lema 5.14 Dada uma cadeia de modelos $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta \in \alpha}$, então $\bigcup\limits_{\beta \in \alpha} \mathfrak{A}_\beta$ é o único modelo com universo $\bigcup\limits_{\beta \in \alpha} A_\beta$ que contém todo $\mathfrak{A}_\beta$ como sub-modelo.

Demonstração: Claramente, $\mathfrak{A}$ é modelo com domínio $A := \bigcup\limits_{\beta \in \alpha} A_\beta$ que contém todo $\mathfrak{A}_\beta$ como sub-modelo.

Seja $\mathfrak{A}'$ um modelo com domínio A que contém cada $\mathfrak{A}_\beta$ como sub-modelo. Para cada símbolo de predicado n-ário R e para todo $\beta \in \alpha$, temos que $R^{\mathfrak{A}_\beta} = R^{\mathfrak{A}'} \cap A_\beta^n$, logo

$$\begin{aligned} R^{\mathfrak{A}} &= \bigcup_{\beta \in \alpha} R^{\mathfrak{A}_\beta} = \bigcup_{\beta \in \alpha} (R^{\mathfrak{A}'} \cap A_\beta^n) = R^{\mathfrak{A}'} \cap (\bigcup_{\beta \in \alpha} A_\beta^n) \\ &= R^{\mathfrak{A}'} \cap (\bigcup_{\beta \in \alpha} A_\beta)^n = R^{\mathfrak{A}'} \cap A^n = R^{\mathfrak{A}'}, \end{aligned}$$

uma vez que provamos o seguinte

Fato: $\bigcup_{\beta\in\alpha} A_\beta^n = (\bigcup_{\beta\in\alpha} A_\beta)^n$.

Com efeito, $\bigcup_{\beta\in\alpha} A_\beta^n \subseteq (\bigcup_{\beta\in\alpha} A_\beta)^n$ (a prova é fácil). Por outro lado, se $\vec{a} \in (\bigcup_{\beta\in\alpha} A_\beta)^n$, então $a_i \in A_{\beta_i}$ para algum β_i; seja $\beta = Max\{\beta_i \ : \ i \leq n\}$. Logo $\vec{a} \in A_\beta^n \subseteq \bigcup_{\beta\in\alpha} A_\beta^n$, provando o **Fato**.

Portanto, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{A}'}$ para cada símbolo de relação R. Como $f^{\mathfrak{A}}$ e $f^{\mathfrak{A}'}$ são relações (para cada símbolo de função f), e $f^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{\beta\in\alpha} f^{\mathfrak{A}_\beta}$, provamos então que, em particular, $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}'}$. Finalmente, dado que $c^{\mathfrak{A}'} = c^{\mathfrak{A}_0} = c^{\mathfrak{A}}$ para toda constante c, então inferimos que $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$. ■

Iterando a noção de extensão elementar chegamos à noção de cadeia elementar.

Definição 5.15 Uma *cadeia elementar* é uma cadeia de modelos

$$\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2 \prec \ldots \prec \mathfrak{A}_\beta \prec \ldots \quad (\beta \in \alpha)$$

tal que $\mathfrak{A}_\xi \prec \mathfrak{A}_\beta$ para todo $\xi, \beta \in \alpha$ tal que $\xi \leq \beta$. ■

Exemplo 5.16 Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $\mathfrak{A}_n$ o corpo algebricamente fechado de característica 0 e grau de trascendência n sobre o corpo $\mathfrak{A}_0 := \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ dos racionais. Logo $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2 \prec \ldots$ é uma cadeia elementar. A união $\mathfrak{A}_\omega$ é um corpo algebricamente fechado de característica 0 e grau de trascendência ω sobre $\mathbb{Q}$. Mais ainda, $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{A}_\omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 5.17 *(Teorema da Cadeia Elementar)* Seja $(\mathfrak{A}_\xi)_{\xi\in\alpha}$ uma cadeia elementar de modelos. Então $\mathfrak{A}_\xi \prec \bigcup_{\xi\in\alpha} \mathfrak{A}_\xi$ para todo $\xi \in \alpha$.

Demonstração: Seja $\mathfrak{A} = \bigcup_{\xi\in\alpha} \mathfrak{A}_\xi$. Provaremos o teorema por indução na complexidade $l(\varphi)$ de uma fórmula φ: para toda $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, todo $\xi \in \alpha$ e toda $(a_1, \ldots, a_n) \in A_\xi^n$, $\mathfrak{A}_\xi \models \varphi[a_1 \ldots a_n]$ sse $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n]$.

Se φ for atômica ou $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ ou $\varphi = \neg\psi$ o resultado é fácil (exercício).

Seja $\varphi = \exists x_1 \psi$ uma fórmula nas variáveis $x_2, \ldots, x_n$; $\xi \in \alpha$ e $a_2, \ldots, a_n \in A_\xi$ tal que $\mathfrak{A}_\xi \models \varphi[a_2 \ldots a_n]$. Logo existe $a_1 \in A_\xi$ tal que $\mathfrak{A}_\xi \models \psi[a_1 a_2 \ldots a_n]$ donde, por hipótese de indução, $\mathfrak{A} \models \psi[a_1 a_2 \ldots a_n]$ e então $\mathfrak{A} \models \varphi[a_2 \ldots a_n]$.

Reciprocamente, suponha que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_2 \ldots a_n]$; logo, existe $a_1 \in \bigcup_{\xi\in\alpha} A_\xi$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[a_1 a_2 \ldots a_n]$. Portanto, existe $\beta \in \alpha$ tal que $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_\beta$ e $\mathfrak{A} \models \psi[a_1 a_2 \ldots a_n]$ (podemos assumir que $\xi \leq \beta$, pois $(\mathfrak{A}_\xi)_{\xi\in\alpha}$ é uma cadeia). Por hipótese de indução temos que $\mathfrak{A}_\beta \models \psi[a_1 a_2 \ldots a_n]$, donde $\mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_2 \ldots a_n]$. Como $\mathfrak{A}_\xi \prec \mathfrak{A}_\beta$, então $\mathfrak{A}_\xi \models \varphi[a_2 \ldots a_n]$ (pois $a_2, \ldots, a_n \in A_\xi$). Isto conclui a prova. ■

Exemplo 5.18 Não podemos substituir $\prec$ por $\equiv$ no teorema anterior. Com efeito, seja $\mathfrak{A}_0 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ a estrutura dos números naturais com a ordem usual. Para cada $n \geq 1$ seja $\mathfrak{A}_n = \langle \{-n, -(n-1), \ldots, -2, -1\} \cup \mathbb{N}, \leq \rangle$ ($\leq$ sendo a ordem usual). Então $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots$ é uma cadeia e, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\mathfrak{A}_n \equiv \mathfrak{A}_0$ (pois $\mathfrak{A}_n \simeq \mathfrak{A}_0$ via $x \mapsto x + n$). Seja $\mathfrak{A}_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_n$. Logo $\mathfrak{A}_\omega = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ é uma ordem sem primeiro elemento, donde $\mathfrak{A}_\omega \not\equiv \mathfrak{A}_0$. De fato: $\mathfrak{A}_0 \models \exists x \forall y (x \leq y)$ mas $\mathfrak{A}_\omega \not\models \exists x \forall y (x \leq y)$. ■

Uma construção similar à construção de cadeias elementares é a de uma cadeia elementar parcial. Esta noção é intermediária entre a noção de cadeia de modelos e a noção de cadeia elementar de modelos.

Definição 5.19 Fixemos $\mathbb{L}$. Uma fórmula φ de $\mathbb{L}$ é uma Π^0_0-fórmula (respectivamente, uma Σ^0_0-fórmula) se φ não contém quantificadores. Por indução, φ é uma Σ^0_{n+1}-fórmula (respectivamente, uma Π^0_{n+1}-fórmula) se $\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_m \psi$ (respectivamente, $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_m \psi$) onde ψ é uma Π^0_n-fórmula (respectivamente, uma Σ^0_n-fórmula). Claramente toda fórmula em forma normal prenexa é uma Σ^0_n ou Π^0_n fórmula. Uma Σ^0_n (respectivamente, uma Π^0_n) fórmula que é sentença e dita uma Σ^0_n-sentença (respectivamente, uma Π^0_n-sentença). ■

Exemplo 5.20

$\Pi^0_0 = \Sigma^0_0$: fórmulas φ sem quantificadores

$\Sigma^0_1 : \exists x_1 \ldots \exists x_m \varphi$, com φ sem quantificadores

$\Pi^0_1 : \forall x_1 \ldots \forall x_m \varphi$, com φ sem quantificadores

$\Sigma^0_2 : \exists x_1 \ldots \exists x_m \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$, com φ sem quantificadores

$\Pi^0_2 : \forall x_1 \ldots \forall x_m \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$, com φ sem quantificadores

$\Sigma^0_3 : \exists \vec{x} \forall \vec{y} \exists \vec{z} \varphi$, com φ sem quantificadores

$\Pi^0_3 = \forall \vec{x} \exists \vec{y} \forall \vec{z} \varphi$, com φ sem quantificadores. ■

Definição 5.21 Sejam $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ estruturas sobre a mesma assinatura. Dizemos que $\mathfrak{B}$ é uma Σ^0_n-*extensão de* $\mathfrak{A}$ se, para toda Σ^0_n-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ e todo $a_1, \ldots, a_m \in A$, se $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_m]$ então $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1 \ldots a_m]$. Uma Σ^0_n-*cadeia de modelos* é uma cadeia de modelos

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_\beta \subseteq \ldots \quad (\beta \in \alpha)$$

tal que, para $\beta, \xi \in \alpha$, se $\beta < \xi$ então $\mathfrak{A}_\xi$ é uma Σ^0_n-extensão de $\mathfrak{A}_\beta$. ■

Suponha que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e sejam $\vec{a} \in A^n$ e $\exists \vec{x} \varphi(\vec{x}; \vec{y})$ uma Σ^0_1-fórmula. É fácil provar que, se $\mathfrak{A} \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}; \vec{y})[\vec{a}]$ então $\mathfrak{B} \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}; \vec{y})[\vec{a}]$. Portanto, se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$

então $\mathfrak{B}$ é uma Σ_1^0-extensão de $\mathfrak{A}$. Logo, toda cadeia de modelos é uma Σ_1^0-cadeia.

Podemos provar um análogo do Teorema da Cadeia Elementar:

Proposição 5.22 Seja $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta\in\alpha}$ uma Σ_n^0-cadeia de modelos, e $\mathfrak{A} = \bigcup_{\beta\in\alpha}\mathfrak{A}_\beta$. Então:

(i) $\mathfrak{A}$ é uma Σ_n^0-extensão de cada $\mathfrak{A}_\beta$.

(ii) Toda Π_{n+1}^0-sentença que é verdadeira em todo $\mathfrak{A}_\beta$ é verdadeira em $\mathfrak{A}$.

Demonstração: Indução em n. O caso $n = 0$ sai do seguinte

Fato: Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e φ é uma Σ_0^0-fórmula, então $\varphi_{\mathfrak{A}} = \varphi_{\mathfrak{B}} \cap A^m$ onde, para toda $\mathfrak{A}$, $\varphi_{\mathfrak{A}} := \{\vec{a} \in A^m \ : \ \mathfrak{A} \vDash \varphi[\vec{a}]\}$.
Deixamos para o leitor a prova deste **Fato**.

Assim, como $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{A} = \displaystyle\bigcup_{\beta\in\alpha}\mathfrak{A}_\beta$, então $\mathfrak{A}$ é uma Σ_0^0-extensão de $\mathfrak{A}_\beta$ para todo $\beta \in \alpha$.

Por outro lado, seja $\varphi = \forall\vec{x}\psi(\vec{x})$ uma Π_1^0-sentença tal que $\mathfrak{A}_\beta \vDash \forall\vec{x}\psi(\vec{x})$ para todo $\beta \in \alpha$. Seja $\vec{a} \in A^m = (\displaystyle\bigcup_{\beta\in\alpha} A_\beta)^m$. Logo, $\vec{a} \in A_\beta^m$ para algum $\beta \in \alpha$.

Como $\mathfrak{A}_\beta \vDash \forall\vec{x}\psi(\vec{x})$, então $\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[\vec{a}]$, donde $\vec{a} \in \psi_{\mathfrak{A}_\beta} = \psi_{\mathfrak{A}} \cap A_\beta^m$, pelo **Fato**, e então $\vec{a} \in \psi_{\mathfrak{A}}$, isto é, $\mathfrak{A} \vDash \psi[\vec{a}]$. Portanto $\mathfrak{A} \vDash \forall\vec{x}\psi(\vec{x})$. Isto conclui a prova do caso $n = 0$.

Suponha que o resultado vale para $k < n$ (para $n > 0$). Seja

$$\psi = \exists x_1 \ldots \exists x_m \varphi(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_p)$$

uma Σ_n^0-fórmula. Logo, $\varphi(\vec{x}; \vec{y})$ é uma Π_{n-1}^0-fórmula. Suponha que $\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[\vec{b}]$, para $\vec{b} \in A_\beta^p$; queremos provar que $\mathfrak{A} \vDash \psi[\vec{b}]$.

De $\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[\vec{b}]$ inferimos que existem $a_1, \ldots, a_m \in A_\beta$ tais que $\mathfrak{A}_\beta \vDash \psi[\vec{a}; \vec{b}]$. Seja $Y = \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_p\}$, e considere a cadeia

$$(\mathfrak{A}_\beta)_Y \subseteq (\mathfrak{A}_{\beta+1})_Y \subseteq \ldots \subseteq (\mathfrak{A}_\lambda)_Y \subseteq \ldots \quad (\lambda \in \alpha,\ \lambda \geq \beta) \qquad (*)$$

lembrando que, de acordo com a notação introduzida no parágrafo após a Definição 2.17, $\mathfrak{B}_Y = \langle\mathfrak{B}; a\rangle_{a\in Y}$ é o modelo da linguagem $\mathbb{L}_Y$ que incorpora as novas constantes $\{c_a \ : \ a \in Y\}$ tal que $c_a^{\mathfrak{B}_Y} = a$, para cada estrutura $\mathfrak{B}$ para $\mathbb{L}$ e para todo $a \in Y$.

A cadeia $(*)$ é uma Σ_n^0-cadeia: com efeito, seja $\theta(\vec{x}; c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}; c_{b_1}, \ldots, c_{b_p})$ uma Σ_n^0-fórmula de $\mathbb{L}_Y$ tal que $(\mathfrak{A}_\xi)_Y \vDash \theta(\vec{x}; c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}; c_{b_1}, \ldots, c_{b_p})[\vec{u}]$ (para $\xi \in \alpha$ tal que $\beta \leq \xi$). Logo $\mathfrak{A}_\xi \vDash \theta(\vec{x}; \vec{y}; \vec{z})[\vec{u}; \vec{a}; \vec{b}]$ onde $\theta(\vec{x}; \vec{y}; \vec{z})$ é uma Σ_n^0-fórmula de $\mathbb{L}$. Portanto, se $\lambda \in \alpha$ tal que $\xi \leq \lambda$ então $\mathfrak{A}_\lambda \vDash \theta(\vec{x}; \vec{y}; \vec{z})[\vec{u}; \vec{a}; \vec{b}]$, pois $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta\in\alpha}$ é uma Σ_n^0-cadeia. Daqui $(\mathfrak{A}_\lambda)_Y \vDash \theta(\vec{x}; c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}; c_{b_1}, \ldots, c_{b_p})[\vec{u}]$ e então $(*)$ é uma Σ_n^0-cadeia em $\mathbb{L}_Y$. É claro que $\mathfrak{A}_Y$ é a união de $(*)$.

A Π^0_{n-1}-sentença $\varphi(c_{a_1},\ldots,c_{a_m};c_{b_1},\ldots,c_{b_p})$ (de $\mathbb{L}_Y$) vale em todo $(\mathfrak{A}_\xi)_Y$ de $(*)$, pois $\mathfrak{A}_\beta \vDash \varphi[\vec{a};\vec{b}]$. Logo $\varphi(c_{a_1},\ldots,c_{a_m};c_{b_1},\ldots,c_{b_p})$ vale em $\mathfrak{A}_Y$, por hipótese de indução aplicada à cadeia $(*)$. Daqui $\mathfrak{A} \vDash \exists x_1 \ldots \exists x_m \varphi[\vec{b}]$. Isto prova que $\mathfrak{A}$ é uma Σ^0_n-extensão de $\mathfrak{A}_\beta$.

Para provar (ii), seja $\forall x_1 \ldots \forall x_m \theta$ uma Π^0_{n+1}-sentença válida em todo $\mathfrak{A}_\beta$, onde θ é uma Σ^0_n-fórmula, e fixe $a_1,\ldots,a_m \in A$. Logo $a_1,\ldots,a_m \in A_\beta$ para algum $\beta \in \alpha$, e então $\mathfrak{A}_\beta \vDash \theta[\vec{a}]$. Como θ é uma Σ^0_n-fórmula e $\mathfrak{A}$ é uma Σ^0_n-extensão de $\mathfrak{A}_\beta$ (pela hipótese de indução), então $\mathfrak{A} \vDash \theta[\vec{a}]$. Logo $\mathfrak{A} \vDash \forall\vec{x}\theta$. ■

5.2 Teoremas de Preservação

Definição 5.23 Seja T uma teoria. Dizemos que:

1. T é *preservada por submodelos* se:
   $\mathfrak{A} \vDash T$ e $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ implica $\mathfrak{B} \vDash T$.

2. T é *preservada por união de cadeias* se, para toda cadeia

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_\beta \subseteq \ldots \quad (\beta \in \alpha)$$

   tal que $\mathfrak{A}_\beta \vDash T$ para todo $\beta \in \alpha$, então $\bigcup_{\beta\in\alpha} \mathfrak{A}_\beta \vDash T$.

3. T é *preservada por homomorfismos* se:
   $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{A} \vDash T$ implica $\mathfrak{B}|_{h(A)} \vDash T$. ■

Exemplos 5.24

	Preservada por		
Teoria	**submodelos**	**$\cup$ de cadeias**	**homomorfismos**
Ordem Parcial	sim	sim	não
Ordem total densa	não	sim	não
Álgebras de Boole	sim	sim	sim
Álgebras de Boole atômicas	não	não	não
Grupos	não	sim	sim
Grupos com símbolo para $-x$	sim	sim	sim
Anéis comutativos	não	sim	sim
Domínios de integridade	não	sim	não
Corpos	não	sim	não
Corpos algebricamente fechados	não	sim	não
Aritmética de Peano	não	não	não
ZF	não	não	não

■

Proposição 5.25 Seja T uma teoria consistente em $\mathbb{L}$, e seja Δ um conjunto de sentenças de $\mathbb{L}$ fechado por disjunções finitas. São equivalentes:

(i) T tem um conjunto de axiomas Γ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

(ii) Se $\mathfrak{A}$ é um modelo de T e $\mathfrak{B}$ é uma estrutura tal que

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ implica } \mathfrak{B} \models \varphi \text{ para toda sentença } \varphi \in \Delta$$

então $\mathfrak{B} \models T$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): óbvio.
(ii) $\Rightarrow$ (i): considere $\Gamma = \{\varphi \in \Delta \ : \ T \models \varphi\}$. Daqui $T \models \Gamma$. Provaremos que $\Gamma \models T$, logo $MOD(\Gamma) = MOD(T)$, donde $\Gamma \subseteq \Delta$ é um conjunto de axiomas para T.

Seja então $\mathfrak{B}$ um modelo de Γ, e considere

$$\Gamma' = \{\neg\sigma \in SENT(\Sigma) \ : \ \sigma \in \Delta \text{ e } \mathfrak{B} \models \neg\sigma\}.$$

Provaremos que $\Gamma' \cup T$ é consistente.

Se $\Gamma' \cup T$ fosse inconsistente então, pelo teorema da compacidade, existem $\neg\sigma_1, \ldots, \neg\sigma_n \in \Gamma'$ tais que $T \cup \{\neg\sigma_1, \ldots, \neg\sigma_n\}$ é inconsistente (e $n > 0$, pois T é consistente). Daqui $T \models \neg(\neg\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \neg\sigma_n)$, donde $T \models \sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_n$.

Como $\sigma_i \in \Delta$ e Δ é fechado por disjunções, então $\sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_n \in \Delta$. Daqui $\sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_n \in \Gamma$, donde $\mathfrak{B} \models \sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_n$ (pois $\mathfrak{B} \models \Gamma$). Por outro lado $\neg\sigma_i \in \Gamma'$, logo $\mathfrak{B} \models \neg\sigma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, uma contradição. Portanto $\Gamma' \cup T$ é consistente.

Seja $\mathfrak{A}$ um modelo de $\Gamma' \cup T$. Provaremos que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ satisfazem as hipóteses de (ii). Por um lado, $\mathfrak{A} \models T$. Por outro lado, suponha que $\sigma \in \Delta$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma$. Se $\mathfrak{B} \models \neg\sigma$ então $\neg\sigma \in \Gamma'$, donde $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$, contradição. Portanto $\mathfrak{B} \models \sigma$ e assim $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ satisfazem as hipóteses de (ii), logo $\mathfrak{B} \models T$. provamos então o seguinte: para toda Σ-estrutura $\mathfrak{B}$, se $\mathfrak{B} \models \Gamma$ então $\mathfrak{B} \models T$. Portanto $\Gamma \models T$, concluindo a demonstração. ■