ALBERTO LEOPOLDO BATISTA NETO

REPRESENTAÇÃO E COMBINAÇÃO DE LÓGICAS: QUESTÕES CONCEITUAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do(a) Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em
26 / 04 / 2007

BANCA

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio CLE-IFCH-Unicamp (orientador)

Prof. Dr. Hercules de Araujo Feitosa Depto. de Matemática-UNESP-Bauru (membro)

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano CLE-IFCH-Unicamp (membro)

Prof. Dr. Hugo Luiz Mariano Depto. de Matemática-IME-USP (suplente)

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli CLE-IFCH-Unicamp (suplente)

Abril/2007

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH – UNICAMP

Batista Neto, Alberto Leopoldo

B320r Representação e combinação de lógicas: questões conceituais / Alberto Leopoldo Batista Neto. - - Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Marcelo Esteban Coniglio.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Tarski, Alfred – 1901-1983. 2. Lógica simbólica e matemática. I. Coniglio, Marcelo Esteban. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Título em inglês: Representation and combination of logics: conceptual questions

Palavras-chave em inglês (Keywords): Tarski, Alfred – 1901-1983
Logic, Symbolic and mathematical

Área de concentração: Lógica

Titulação: Mestre em Filosofia

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (orientador)
Prof. Dr. Hercules de Araújo Feitosa
Profa. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano

Data da defesa: 26/04/2007

Programa de Pós-Graduação: Pós-graduação em Filosofia

Para Luciana

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, devo agradecimento ao meu orientador, Professor Marcelo E. Coniglio, por ter sugerido o tema, colaborado na elaboração do projeto e me introduzido ao tema das combinações entre lógicas, de onde nasceu este trabalho, além de não ter cessado de me ensinar e orientar desde que ingressei no Mestrado. Aos demais professores do CLE, especialmente os professores Ítala M. L. D'Ottaviano e Walter A Carnielli, por aulas, comentários, conselhos e constante solicitude. Aos colegas do CLE por críticas e sugestões.

À Professora Maria da Paz, que me iniciou no estudo da Lógica e me orientou no começo da minha vida acadêmica, e cuja intervenção acabou me trazendo à Unicamp. Aos demais professores do departamento de Filosofia da UFRN, em especial os do grupo de Lógica, pelos conhecimentos e inspiração que me passaram.

Agradeço à minha família pelo incondicional apoio e encorajamento. Em especial à minha mãe, Sheyla, minha avó, Ivete, minha tia Alberta e meu tio Sivam, sem cujo apoio eu jamais teria conseguido chegar a defender esta tese.

A todos aqueles que, desconhecendo o fato da minha existência, possibilitaram esta dissertação, pelos seus próprios estudos e idéias que povoam a lista de referências do trabalho.

Sobretudo agradeço à minha esposa, Luciana, a quem palavras jamais farão justiça. E a Deus, por tê-la posto em meu caminho

Resumo

Visando a atingir um esclarecimento sobre os conceitos fundamentais envolvidos no estudo das combinações entre lógicas, empreendemos uma análise do problema da representação geral de sistemas lógicos (com ênfase no conceito central de conseqüência lógica), juntamente com o do estabelecimento de uma noção apropriada de tradução ou morfismo entre os sistemas definidos de um determinado modo, com base em que podemos fundamentar algumas técnicas de combinação, especialmente a fibrilação algébrica. Tais técnicas são definidas e apresentadas em suas propriedades mais relevantes, sendo encontrados, no caso particular da fibrilação, problemas tais como o colapso e o anti-colapso. Para estes, a solução parece residir na escolha de formas adequadas de representar lógicas em geral e de traduzir lógicas umas nas outras. Uma apresentação modelo-teorética mostra-se apropriada para algumas representações de lógicas em geral (como, por exemplo, sistemas de Hilbert), embora não o seja para outras (como sistemas de conseqüências múltiplas). No entanto, duas das mais promissoras tentativas de solucionar, em particular, o problema do anti-colapso da fibrilação algébrica - as meta-traduções e os *transfers* elementares - podem ser definidas dentro desse arcabouço. Os *transfers* - incluindo os *transfers* elementares - foram definidos em [17] - e aqui apresentamos uma representação das meta-traduções como tipo específico de *transfer*.

Palavras-chave: traduções entre logicas, combinação de lógicas, lógicas abstratas, conseqüência lógica, Tarski, fibrilação.

Abstract

In order to accomplish an elucidation of the fundamental concepts involved in the study of the combinations between logics, we undertake an analysis of the problem of the general representation of logical systems (with an emphasis on the central concept of logical consequence) together with that of the establishment of an appropriate notion of translation or morphism between the logical systems defined in a certain fashion, on which basis we can ground some of the combination techniques, specially that of algebraic fibring. Such techniques are defined and presented in their most relevant features, and we find, in the particular case of fibring, problems such as collapsing and anti-collapsing. The solution for these seem to rest on the choice of adequate forms of representing logics in general and translating logics into others. A model-theoretic presentation shows itself appropriate for some representations of logics in general (such as Hilbert calculi), although they are not for some others (such as multiple-conclusion systems). Notwithstanding, two of the most promising attempts to solve, in particular, the problem of the anti-collapsing of algebraic fibring - meta-translations and elementary transfers -, are definable within that framework. Transfers - including elementary transfers - have been defined in [17] - and we here present a representation of meta-translations as an specific kind of transfers.

Key-words: translations between logics, combination of logics, abstract logics, logical consequence, Tarski, fibring.

Sumário

Introdução

O estudo da combinação de sistemas lógicos e dos métodos a serem utilizados para tal propósito engendra, para além de discussões meramente técnicas concernentes a estes, a discussão de diversas questões conceituais em um nível bastante elevado de abstração. À parte a motivação mesma do estudo, que requereria a avaliação dos métodos propostos em termos da sua adequação aos propósitos a que se destinam (e mesmo da questão referente a quais devem ser os critérios de adequação), especial ênfase deve ser colocada sobre as questões conceituais que possibilitam a própria inteligibilidade do assunto. Sobre estas nos debruçaremos, abordando os problemas da representação de sistemas lógicos, do estabelecimento de uma ou mais noções de tradução (ou *morfismo*, considerando um sistema lógico como estrutura matemática) e da definição dos métodos de combinação em si.

Partimos do problema, prioritário em ordem aos demais, da representação de sistemas lógicos. Esse problema, sozinho, leva a uma discussão conceitual que ocupa boa parte de nosso trabalho, além de permear fortemente o restante. Daremos ênfase particular à perspectiva de representar lógicas (proposicionais) como estruturas de Primeira Ordem, tratáveis através do ferramental da Teoria de Modelos. Com alguma noção de sistema lógico, podemos então proceder ao estudo de lógicas combinadas, passando antes, porém, pela importante noção de *tradução* entre sistemas lógicos. Todas as técnicas de combinação conhecidas envolvem alguma noção de tradução, uma vez que se deseja preservar propriedades essenciais e/ou *significado* das lógicas componentes à lógica combinada (ou da lógica composta às componentes). Nesse sentido, a questão da representação mostra-se decisiva, uma vez que *o que* se pode preservar em uma tradução depende do que se pode representar de uma lógica. Com isso em mente, pode-se então perguntar: o que deve uma (boa) noção de tradução entre lógicas preservar? Algumas definições gerais de tradução serão apresentadas e analisadas nesse contexto. Finalmente apresentaremos algumas das principais técnicas de combinação entre lógicas, com destaque para a *fibrilação* (ou *fibring*). Alguns problemas surgem na prática das combinações entre lógicas, em particular na fibrilação, como o *colapso* e o *anti-colapso.* Comentaremos sobre como considerações a respeito da representação geral de sistemas lógicos podem inspirar possíveis soluções para os referidos problemas.

Se queremos ter lógicas combinadas, com qualquer propósito que se tenha em mente, é fundamental que tenhamos uma definição precisa do objeto de nossos experimentos. O que se deveria entender, portanto, por um sistema de lógica? A resposta a uma tal indagação parece transcender o domínio de sistemas lógicos particulares para agrupar propriedades deles abstraídas numa noção essencial, generalizada, de lógica. Situamo-nos aqui no domínio da metalógica, em que se trata de definir e estudar os conceitos gerais da lógica de modo similar ao da metamatemática em relação às disciplinas da matemática. A metamatemática se ocupa da elucidação rigorosa (através de recursos da própria matemática) de conceitos como o de axioma, regra de inferência e demonstração formal (ou dedução), incluindo o estabelecimento, uma vez determinados os conceitos anteriores (relativamente aos sistemas formais escolhidos para representar os domínios pré-formais da matemática de que se pretende tratar), de resultados chamados metateóricos, ou metateoremas, tais como teoremas de dedução, de completude ou de interpolação, por intermédio da introdução de um ferramental apropriado (como o da Teoria de Modelos). Já a metalógica teria entre as suas tarefas o esclarecimento, através de recursos lógicos, de noções fundamentais da lógica - inclusive a própria noção de lógica - e portanto da metamatemática (entendido o termo no sentido que lhe conferia David Hilbert, que o cunhou), posicionando-se assim em um nível metateórico superior ao daquela disciplina. Enquanto na metamatemática conceitos como o de dedução e conseqüência lógica são tomados como pressupostos, na metalógica devem ser determinadas as propriedades fundamentais de conceitos dessa ordem. Uma questão primordial para a metalógica concerne a derivabilidade dos demais conceitos lógicos (ou, se se quiser, metamatemáticos) de algum subconjunto deles que se considere, argumentavelmente, fundamental. Quais seriam, então, essas noções fundamentais, e que resultados gerais obteríamos ao determinar suas propriedades?

Alfred Tarski foi um pioneiro na concepção de uma análise *geral* dos *sistemas lógicos* e na identificação das noções fundamentais que subjazem a qualquer coisa que caia sob esse conceito. Poder-se-ia dizer, com Tarski ([43], [54], [55], [56] e [57]), que o ponto comum a todo e qualquer sistema lógico, a própria noção que os define como tais, é única: a de conseqüência lógica. Um sistema lógico não é senão um expediente formal para a realização de inferências, e cada uma delas corresponde a uma instância dessa noção, partindo de um certo conjunto de pressupostos (premissas), possivelmente vazio. As coisas pressupostas e as coisas inferidas são membros de uma classe de coisas chamadas 'sentenças', que consistem em inscrições de forma bem definida e usualmente ditas providas de sentido. Na verdade, conforme observa Tarski em uma nota de rodapé ([56]), poderia ser mais conveniente considerar *tipos* de inscrições de forma bem definida como classes de equivalência determinadas pela 'equiformidade' a sentenças concretas, de modo a contornar dificuldades de ordem física à composicionalidade das entidades em questão. Outra possibilidade seria considerar as *proposições* representadas pelas sentenças, mas para afastar dificuldades teóricas (e possivelmente práticas) e por amor à concisão, consideremos apenas *sentenças*. Chamemos S o conjunto delas e denotemos por $Cn(X)$ o conjunto das conseqüências (lógicas) de um dado $X \subseteq S$. Trata-se, ele próprio, de um conjunto de elementos de S, único para cada $X \subseteq S$, de maneira que se pode chamar Cn de operador funcional, determinante da função $Cn : P(S) \longrightarrow P(S)$. Daí o fato de que o programa de estudo desenvolvido por Tarski para tratá-lo seja conhecido como 'teoria do operador de conseqüência'. É comum ver definida uma *lógica* como um par $\langle S, Cn \rangle$, com S e Cn como acima. Há que se observar, porém, que uma definição exata de ambos os conceitos só é efetivamente obtida, nas palavras de Tarski [56], "naqueles ramos da metamatemática nos quais o campo de investigação é uma disciplina formalizada concreta", o que pode ser interpretado (v. p. ex., [37]) como significando que a noção exata de sentença é dada, em cada sistema particular, partindo do vocabulário e das regras de formação de sentenças deste, assim como a noção exata de conseqüência será relativa às regras de inferência do mesmo sistema. Note-se igualmente que o que Tarski tinha em mente quando falava em "disciplina formalizada concreta" e que nós chamamos aqui de "sistema" é uma teoria axiomática de demonstração no sentido hilbertiano. Os princípios gerais que enunciaremos a seguir tratam-se de aspectos abstraídos da multiplicidade de teorias desse tipo então conhecidas, que lhes pertenceriam *enquanto tais*.

Os princípios identificados por Tarski (v. [43], [54], [55], e [56]) e cristalizados na forma dos axiomas da sua teoria do operador de conseqüência são até hoje utilizados para determinar uma lógica *tarskiana*. Mas Tarski foi adiante no estabelecimento das propriedades gerais da noção de conseqüência lógica e forneceu uma definição que transcende o domínio das teorias formais sintáticas, por meio da introdução da noção de *modelo*. Sua definição, apesar de não livre de críticas, tornou-se padrão, e forneceu novos elementos para o incremento da teoria da Semântica Científica, introduzida por ele, no seu desenvolvimento rumo à hodierna Teoria de Modelos (v. p. ex. [13]).

Avaliamos as duas etapas do estudo de Tarski sobre o conceito de conseqüência lógica: uma sintaticista, descritiva (v. [43], [54], [55], e [56], além de [2] e [50] para comentários), e outra semântica e crítica (v. [57] e [51] para comentários). Ambas parecem permitir, de acordo com considerações adicionais, a aceitação da existência de múltiplas noções de conseqüência lógica, uma para cada lógica distinta, porém cada uma satisfazendo um mesmo conjunto de critérios básicos, que apontaremos. Uma perspectiva recente que mantém uma conexão íntima com a tarskiana da primeira etapa é a apresentação estruturalista da Lógica Universal, introduzida por Jean-Yves Béziau [1]. Um desenvolvimento contemporâneo da segunda é apresentadao por Richard Epstein [25], que propõe uma definição geral de lógica (e de conseqüência lógica) baseada nos aspectos semânticos motivadores dos sistemas. Ambas as abordagens, não obstante distintas, possibilitam às lógicas ora definidas ser comparadas entre si, traduzidas umas nas outras, combinadas para dar origem a lógicas complexas ou interpretadas como a combinação de lógicas mais simples, de acordo com certos métodos conhecidos. Daremos, contudo, uma ênfase particular sobre a abordagem 'sintático'-estruturalista (que se trata, na verdade, de uma generalização da sua alternativa) quando examinarmos os ditos métodos em um panorama geral.

A noção usual de conseqüência lógica sozinha, porém, pode resultar muito fraca para determinar a definição geral de sistema lógico, especialmente se tivermos em vista certos contextos de combinações entre lógicas (um exemplo disso é o problema do *anti-colapso* da fibrilação). Algumas propriedades importantes não são preservadas através dos morfismos usuais, se considerarmos uma lógica caracterizada unicamente por sua relação (ou operador) de conseqüência. A dificuldade pode ser contornada mediante alguns expedientes. Podemos, por exemplo, incluir na definição de uma lógica a satisfação de uma classe determinada de meta-propriedades (argumentavelmente importantes), assim como apresentar as lógicas como sistemas de conseqüências múltiplas ou de seqüentes, cujos morfismos, preservando as regras usuais dos respectivos tipos de sistema, preservaria conseqüentemente as meta-propriedades desejadas (v. [18]).

Veremos que a Teoria de Modelos (v. [13]) nos fornece um instrumental apropriado para uma definição de lógica *em geral* (pelo menos nos casos de lógicas definidas como sistemas de conseqüência simples ou sistemas de Hilbert - v. [15])), se estivermos interessados nas características de lógicas *como estruturas*, conforme sugerido, como mencionado, por Béziau. Esta apresentação nos dá acesso a um fértil campo de intuições e nos permite tirar proveito de resultados úteis da própria Teoria de Modelos que venham a ter interesse em considerações sobre os principais métodos utilizados para a combinação entre lógicas. Ao permitir uma definição formal simples e precisa da noção de *atributo* de uma lógica, ela fornece uma pista para a obtenção de uma estratégia de preservação de propriedades específicas mediante traduções.

Mas o que caracteriza uma tradução entre duas lógicas? As primeiras traduções entre lógicas consistiam somente em mapeamentos das fórmulas de uma linguagem nas de uma segunda, sobre as quais, usando o aparato dedutivo desta, *provavam*-se resultados de preservação (v. [33], [34], [35], [36], [41] e [45]). Mas qualquer mapeamento de linguagens de lógicas diferentes constitui uma tradução entre elas? Quais os atributos de uma lógica que uma (boa) tradução deveria preservar (na lógica traduzida)? Apresentaremos algumas noções gerais de tradução entre lógicas e suas respectivas justificações (v., p. ex., [6][1], [19], [25], [28], [47], [59], e também [11], [16] e [45]). Conforme mencionamos, a perspectiva de representação de lógicas como estruturas tratáveis via Teoria de Modelos, introduzida por Marcelo Coniglio e Walter Carnielli [17], sugere uma promissora noção de tradução entre lógicas (susceptível de refinamentos) a ser abordada em discussões sobre combinações.

Toda essa discussão sobre representação de lógicas e traduções entre lógicas representadas de uma determinada maneira serve, em nosso trabalho, para fundamentar a teoria das combinações entre lógicas. Em que consiste (ou deveria consistir) a combinação entre dois ou mais sistemas lógicos? Deve haver uma noção única de combinação entre lógicas ou nos deve ser permitido combiná-las de maneiras variadas, de acordo com objetivos específicos? Em que sentido uma lógica L pode ser entendida como a combinação de duas lógicas L_1 e L_2? Analisaremos algumas das técnicas de combinação existentes na literatura (vistas em [9], [15] e [52]) com o objetivo de ensaiar respostas a essas questões. De acordo com noções determinadas sobre *o que é* lógica e *o que deve ser* a combinação entre lógicas (ou o resultado de utilizar uma dada técnica de combinação), aparecem problemas como o do colapso e do anti-colapso no caso da fibrilação. Fixando uma noção de combinação entre lógicas, qual a importância de noções apropriadas de representação e tradução de lógicas nos termos da preservação de resultados desejáveis? Sugerimos a citada abordagem modelo-teorética (apresentada em [17]) como uma perspectiva apropriada para enquadrar a questão.

[1] As definições apresentadas por Brown e Suszko não eram então chamadas traduções, mas antecipavam a definição com que veio a trabalhar, independentemente, o grupo de Campinas

Resumimos o propósito geral de nosso estudo do seguinte modo: através da análise conceitual do problema geral da representação de lógicas e da transmissibilidade de propriedades de uma lógica a outras por meio de traduções (apropriadas), buscamos encontrar um ambiente a um só tempo filosoficamente palatável e operacionalmente eficaz para as combinações entre lógicas.

Capítulo 1

Representação de lógicas

Começamos nosso estudo pela questão da representação geral de lógicas. O que buscamos aqui, de fato, é uma maneira de unificar em um tipo só de estrutura, construção ou mesmo uma dada classe de requisitos conceituais mínimos, todos aqueles objetos que desejamos considerar como *lógicas*. Neste ponto, afastamo-nos da perspectiva monista (v. [40]) e fundacionista que tradicionalmente é adotada em relação ao estudo da lógica. Ou seja: admitimos não apenas um, mas *diversos* objetos diferentes dignos da denominação "lógica" e, fazendo-o, desviamos o foco da compreensão de lógica como o fundamento dedutivo de todo o raciocínio para estudar diferentes lógicas como certos objetos dotados de determinadas propriadades que permitiriam distingui-los, por exemplo, de álgebras ou de espaços topológicos. Não estamos aqui fazendo uma *crítica* às concepções monista e fundacionista de lógica, mas apenas adotando um ponto de vista distinto, que se considera justificado pela profusão de sistemas que reivindicam para si o título de "lógicas" (e.g., lógica modal, lógica da relevância, lógica intuicionista, lógica paraconsistente, lógica linear - e, dentro de cada uma dessas linhas, inúmeros sistemas propriamente ditos). Para tanto, eles devem ter algo em comum.

Partindo do usual ponto de vista de que o "algo em comum" é fundamentalmente uma noção de *conseqüência lógica*, examinaremos os estudos pioneiros de Tarski sobre o dito conceito, que inspiraram desde então a disciplina da *meta-lógica* (o estudo lógico das teorias lógicas). Em seguida, apresentaremos algumas formas mais modernas de representação de sistemas lógicos (embora, de um modo geral, mantendo o espírito tarskiano).

1.1 A teoria do operador de conseqüência

Alfred Tarski é considerado um dos maiores lógicos da história. Dentre os seus maiores feitos, comumente se destaca a definição de verdade para a lógica de predicados, a partir de sua meta-teoria, inaugurando o campo de saber que ele mesmo denominou "semântica científica" (v. [58]) e que evoluiu, principalmente através de trabalhos do próprio Tarski, para a Teoria de Modelos, uma ferramenta indispensável para os avanços nos estudos lógicos desde então. Outro resultado importantíssimo obtido por Tarski foi a demonstração da indefinibilidade da verdade, numa linguagem, no nível dessa mesma linguagem (v. [58]). Trata-se de constatação, como aquela obtida por Kurt Gödel em seus teoremas de incompletude [37] (mas independente desta), da limitação intrínseca do método sintático em suas pretensões de abranger e exprimir os conceitos lógicos fundamentais. Mas antes mesmo da obtenção desses resultados, Tarski desenvolveu um estudo sistemático e pioneiro sobre a noção de conseqüência lógica, abrindo as portas à disciplina da *meta-lógica*.

A teoria do operador de conseqüência de Tarski foi inaugurada num artigo datado de 1928, redigido originalmente em francês sob o título "*Remarques sur les notions fondamentales de la methodologie des mathematiques*" [54] ("Notas sobre as noções fundamentais da metodologia das matemáticas"), que não traz um tratamento propriamente axiomático do conceito em questão, mas lista algumas propriedades que a noção de conseqüência lógica parece em geral satisfazer. No artigo de 1930, republicado em tradução inglesa com o título "*On some fundamental concepts of Metamathematics*" [56] ("Sobre alguns conceitos fundamentais da metamatemática") na coletânea *Logic, Semantics, Metamathematics*, esses mesmos princípios se transformam em axiomas (quando não resultam redundantes), e como tais são tratados nos artigos presentes na mesma coletânea sob os títulos "*Investigations into the sentential calculus*" [43] (em co-autoria com Jan Łukasievicz) e "*Fundamental concepts of the Methodology of the deductive sciences*" [55] (respectivamente "Investigações no cálculo sentencial" e "Conceitos fundamentais da metodologia das ciências dedutivas"). As propriedades gerais de Cn, segundo o texto de 1928, são determinadas pelas seguintes asserções, para quaisquer $X, Y \subseteq S$ (v. [54], [2] e [50]) :

1. $X \subseteq Cn(X)$ (reflexividade);

2. $X \subseteq Y \rightarrow Cn(X) \subseteq Cn(Y)$ (monotonicidade);

3. $CnCn(X) = Cn(X)$ (transitividade ou idempotência - a igualdade pode ser substituída sem prejuízo pela relação 'contido ou igual' , uma vez que $Cn(X) \subseteq CnCn(X)$ não é senão uma instância da reflexividade).

Esses três princípios/axiomas aparecem em todas as apresentações, primitiva ou derivadamente. São, ademais, aceitos como os princípios satisfeitos pelos sistemas (dados como pares $\langle S, Cn \rangle$) hoje denominados 'lógicas tarskianas'. Nos textos subseqüentes, adicionam-se, já definitivamente como axiomas, as seguintes afirmações:

(0) $\overline{S} = \aleph_0$ (S é enumerável - $\overline{S}$ denota a cardinalidade do conjunto S);

(3*) $Cn(X) = \bigcup\{Cn(Y) : Y \subseteq X \text{ e } \overline{Y} < \aleph_0\}$ (finitariedade ou "compacidade" - o conjunto das conseqüências de X é o conjunto de conseqüências dos subconjuntos finitos de X, considerando que uma demonstração não envolve senão um número finito de premissas);

(4*) Existe $x \in S$ tal que $Cn(\{x\}) = S$ (existe uma sentença trivializadora - o que usualmente denotamos '$\perp$' ou 'partícula *falsum*').

Note-se que a introdução desses axiomas torna supérflua a postulação da monotonicidade, que segue-se claramente da finitariedade. Pois, dado um determinado conjunto X de elementos de S contido num conjunto Z também de elementos de S, o conjunto $Cn(X)$ é dado por $\bigcup\{Cn(Y) : Y \subseteq X \text{ e } \overline{Y} < \aleph_0\}$. Portanto, tomando-se um x pertencente a $Cn(X)$, temos que, pela definição de união, $x \in Cn(Y)$ para algum $Y \subseteq X$ tal que $\overline{Y} < \aleph_0$. Mas como $X \subseteq Z$, temos pela transitividade da relação '$\subseteq$' que $x \in Cn(Y)$ para algum $Y \subseteq Z$ tal que $\overline{Y} < \aleph_0$, ou seja, $x \in Cn(Z)$, e então $Cn(X) \subseteq Cn(Z)$.

Considerando a 'lógica tarskiana' como uma definição razoável de *lógica*, esses últimos princípios, em especial o (3*) e o (4*) parecem demasiado restritivos, especialmente em se considerando a variedade de sistemas tidos como lógicos hoje em dia (embora uma questão interessante seja inquirir em que sentido geral poderíamos considerá-los propriamente como *lógicas*). E como Tarski nem mesmo os considerava entre os princípios básicos no texto em que apresenta os rudimentos da teoria do operador de conseqüência, eles costumam ser excluídos das considerações gerais sobre os axiomas de Tarski, e nós não faremos diferente.

Os axiomas de Tarski (em sua versão "enxuta") são satisfeitos igualmente por uma noção de conseqüência modelo-teorética conforme o próprio Tarski mais tarde oferece e pelo fecho algébrico de um conjunto por uma operação, na álgebra universal (v. [2]). Está claro, pelo momento histórico em que foi concebida a teoria do operador de conseqüência, que o tipo de construção a que se referem originalmente os axiomas tarskianos são os sistemas de demonstração sintáticos, de estilo hilbertiano. Posteriormente, a avaliação crítica empreendida por Tarski do conceito de conseqüência lógica [28], que apontava para ele certa divergência fundamental (extensional) entre o conceito de conseqüência sintática e a correspondente formulação de critérios intuitivos que uma noção apropriada de conseqüência lógica deveria seguir (como veremos à frente), levou-o a reservar à conseqüência de tipo semântico mais propriamente a denominação de conseqüência lógica, enquanto ao conjunto dado por $Cn(X)$ (na acepção inicial) restaria mais adequadamente o nome de *conjunto das sentenças derivadas do conjunto* X. A presença, no esquema tarskiano, de um axioma como o da finitariedade e uma observação posterior do próprio Tarski conduzindo ao entendimento de que este (axioma) é responsável pela incompletude do conceito de conseqüência sintática em relação ao conceito intuitivo de conseqüência lógica reforçam a interpretação da teoria tarskiana como referente fundamentalmente à noção sintática de derivabilidade. No entanto, de forma aparentemente involuntária, ao enunciar o núcleo básico de princípios no artigo de 1928 [54], Tarski lançou as bases de uma teoria bem mais geral e abstrata do que parecia ter em vista. Já vimos que, em considerações mais recentes, os axiomas (3*), (4*) e às vezes o (0) são excluídos da lista, por tornarem demasiado restrita a noção de sistema lógico. Para Jean-Yves Béziau [2], até mesmo os axiomas (1), (2) e (3) são dispensáveis, por excluírem sistemas de lógica não-monotônica e subestrutural, podendo-se pensar numa noção de conseqüência lógica e de sistema lógico completamente elástica, à semelhança do que ocorre com as álgebras em álgebra universal, donde a denominação, pelo próprio Béziau, de seu programa de estudo como *lógica universal*. Mas nos restringindo à versão primitiva da noção tarskiana de conseqüência, vemos que esta se amolda à definição explícita que se segue: uma sentença x é conseqüência de um conjunto de sentenças X se há uma demonstração de x a partir de X, ou seja, uma seqüência *finita* de sentenças, terminando em x, das quais cada uma é ou bem um axioma do sistema, ou bem um elemento de X, ou bem a conclusão de uma regra do sistema cujas premissas estão entre as sentenças que as precedem na seqüência e os axiomas. Não é difícil verificar que o conjunto das sentenças ora gerado atende os requisitos de transitividade, reflexividade e monotonicidade.

Vale notar que a noção de conseqüência lógica pode ser representada, com iguais resultados (embora assumindo uma perspectiva diferente), por uma *relação* de conseqüência entre conjuntos de fórmulas e fórmulas (v. [2], [15] e [16]). Isto é, uma relação, denotemo-la pelo símbolo fregeano '$\vdash$', tal que $\vdash \subseteq P(S) \times S$. Como usual, usaremos $X \vdash x$ no lugar de $\vdash (X, x)$. Temos que essa relação obedece ao seguinte conjunto de axiomas:

(r1) $x \in X$ implica em $X \vdash x$ (reflexividade*);

(r2) $X \vdash x$ e $X \subseteq Y$ implicam em $Y \vdash x$ (monotonicidade*);

(r3) $X \vdash x$ e $Y \vdash X$ (macro para '$Y \vdash z$, para todo z pertencente a X') implicam em $Y \vdash x$ (transitividade*).

O '*' em frente ao nome escolhido para cada axioma sugere a idéia (verdadeira) de que os axiomas (r1), (r2) e (r3) não correspondem, ponto a ponto, aos respectivos axiomas (1), (2) e (3), apesar de que a intuição por trás de cada um justifique a denominação análoga. De fato, demonstra-se que o axioma (r2) é supérfluo, sendo derivável dos dois restantes. Com efeito, suponha-se o antecedente da implicação, i.e., $X \vdash x$ e $X \subseteq Y$. Seja qualquer z pertencente a X. Como $X \subseteq Y$, $Y \vdash z$ (por (r1)). Portanto, para qualquer $z \in X$, $Y \vdash z$, ou seja, $Y \vdash X$. Juntando isso ao fato de que $X \vdash x$ (hipótese), temos uma instância do antecedente de (r3). Logo, $Y \vdash x$. Ou seja, assumindo $X \vdash x$ e $X \subseteq Y$, temos $Y \vdash x$, o que não é senão uma reformulação de (r2). Na Teoria de Conjuntos, podemos apontar o fato de que, para cada relação, há uma função correspondente, pela qual aquela pode ser substituída e, para cada função, uma relação com a mesma propriedade. Pela forma como consideramos o operador e a relação de conseqüência, estabelecemos o seguinte:

(E) $X \vdash x$ sse $x \in Cn(X)$

e então demonstramos a equivalência entre os dois conjuntos de axiomas apresentados (ou seja, o conjunto $\{(1), (2), (3)\}$ e o conjunto $\{(r1), (r3)\}$), mostrando que os dois cenários são de fato igualmente apropriados.

Assumamos, então, (1), (2) e (3).

Considere-se o antecedente de (r1), i.e., $x \in X$. Ora, esse é exatamente o mesmo antecedente do axioma (1) (considerando que $A \subseteq B$ é o mesmo que $x \in A \rightarrow x \in B$, para todo x). Logo, $x \in Cn(X)$, mas então, por (E), $X \vdash x$. Temos, então, (r1).

Tomando o antecedente de (r3), $X \vdash x$ e $Y \vdash X$. Por (E), $x \in Cn(X)$ e para todo z pertencente a X, $z \in Cn(Y)$, ou seja, $X \subseteq Cn(Y)$. Mas então, por (2), $Cn(X) \subseteq Cn(Cn(Y))$. Portanto, x, que pertence a $Cn(X)$, pertence também a $Cn(Cn(Y))$. Mas, por (3), $x \in Cn(Y)$. O que, por (E), equivale a dizer que $Y \vdash x$. Portanto, temos também (r3).

Por outro lado, assumindo (r1) e (r3) (e lembrando que (r2) é demonstrado a partir deles), teremos o seguinte.

Supondo o antecedente de (1), ou seja (como já vimos), $x \in X$, temos, por (r1), $X \vdash x$. E então, por (E), $x \in Cn(X)$. Ou seja, $X \subseteq Cn(X)$, ou seja, (1).

Para (2), assuma-se $X \subseteq Y$. Dado um x pertencente a $Cn(X)$, temos por (E) que $X \vdash x$. Mas então pelo já demonstrado (r2), $Y \vdash x$, ou seja, $x \in Cn(Y)$ (por (E)). Disso, $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$, e considerando a nossa hipótese, temos (2).

Em (3), uma das direções da igualdade, $Cn(X) \subseteq Cn(Cn(X))$, é conseqüência imediata de (1), já demonstrado (de fato, é uma instância dele, como já foi colocado). Para a outra direção, tomemos $x \in Cn(Cn(X))$. Logo, por (E), $Cn(X) \vdash x$. Como $z \in Cn(X)$ sse $X \vdash z$, podemos definir $Cn(X) = \{z : X \vdash z\}$. Ora, é imediato da definição que $X \vdash Cn(X)$. Logo, por (r3) ($Y = Cn(X)$), $X \vdash x$, donde tiramos (3).

Temos, portanto, um enfoque ligeiramente diferente do tarskiano e que pode sugerir heurísticas diferenciadas, e ao mesmo tempo ser mais conveniente para a expressão de certos conceitos, mas que no quesito 'poder demonstrativo' é equivalente ao dos axiomas tarskianos, e pode ser por isso interpretado, em relação à sua aplicabilidade, de forma idêntica.

Para José Seoane [50], a perspectiva inicial de Tarski sobre a relação de conseqüência (a ser seguida por uma postura metodologicamente bem diferente, em anos posteriores) é uma posição eminentemente *sintaticista* ("*sintactista*", no original) e *não elucidatória*. O que se quer dizer por isso é que o programa tarskiano consiste na elaboração de um *sistema* axiomático cujas conseqüências demonstradas sintaticamente revelariam propriedades da noção de conseqüência *tal como adotada nos sistemas sintáticos de demonstração* e que não lança qualquer esclarecimento próprio sobre o conceito de conseqüência, senão que se limita a extrair dos sistemas existentes as propriedades que suas noções correspondentes de conseqüência apresentam *em geral*. Mas pode-se perguntar por que uma tal empresa não se constituiria em legítima elucidação do referido conceito. Segundo Seoane, isso não se dá porque nenhum esforço é depreendido no sentido de *explicar* o conceito de conseqüência lógica, nem qualquer discussão é empreendida sobre o que uma noção correta de conseqüência lógica deve satisfazer para ser apropriadamente considerada como tal. O que se verifica, de fato, é um processo de *abstração* ou *generalização* do conceito tal como aparece nas teorias particulares.

Apesar do enfoque generalista, Tarski deixa claro que os conceitos exatos de sentença e conseqüência só podem ser dados no interior de cada teoria formalizada em particular. Portanto, como aponta Seoane, a abordagem tarskiana determina dois níveis 'limite', em termos de particularidade/generalidade: o nível de máxima particularidade, representado pelos sistemas de demonstração específicos, e, em contrapartida, o nível de máxima generalidade, que consiste na exposição dos axiomas já referidos (a que a noção de cada um dos sistemas considerados obedece). Considerando cada sistema particular como disciplina formalizada da matemática (no espírito hilbertiano), teríamos, segundo Seoane [50] , uma distinção entre dois planos: o matemático, dado por esses mesmos sistemas; e o metamatemático, que trata das noções (no caso, de sentença e conseqüência) abstraídas deles. No primeiro nível do plano metamatemático estariam as noções particulares de sentença e conseqüência, considerados em si (e, como vimos, definidos de maneira exata), que se 'condensariam', no nível mais alto, na teoria geral do operador de conseqüência dado pelos axiomas de Tarski. Os níveis intermediários de generalidade estariam ocupados pela agregação de princípios introduzidos para lidar com noções *menos fundamentais para a caracterização de um sistema como lógica*, tais como, exemplo dado pelo próprio Tarski, os conectivos lógicos. Cabe notar que, ao oferecer como 'adicionais' os axiomas que tratam dos conectivos lógicos e apresentar o cálculo sentencial como um tipo de sistema cujos princípios sistemas menos complexos poderiam não seguir, Tarski oferecia uma noção de lógica não somente em um sentido bastante 'abstrata' e abrangente, como fornecia a base para pensar uma lógica, mesmo a lógica proposicional (cálculo sentencial) clássica, como uma entidade decomponível. Isto inspirou diversos avanços recentes na área de combinação entre lógicas, com a permissão de considerar em separado, por exemplo, a lógica da negação e a lógica da disjunção, e a possibilidade de combiná-las e estudar o resultado em termos da preservação de propriedades e metapropriedades, e mesmo compará-las às da lógica proposicional como já conhecemos.

A propósito do 'sistema' tarskiano, de natureza patentemente metateórica, devemos considerar a questão de se pode ser entendido como um sistema axiomático formal no sentido em que se consideram os sistemas hilbertianos em geral ou se, como sugere Béziau [2], o enfoque axiomático não justifica um tratamento formalista das suas conclusões. Ao se considerarem os axiomas de Tarski inseridos num contexto puramente sintático, verificamos que são requeridas como previamente definidas noções de Teoria de Conjuntos (uma vez que lidamos com conjuntos de objetos, no caso sentenças) e do cálculo de predicados de primeira ordem, que lhe subjaz, além de certos conceitos de segunda ordem, uma vez que Cn, considerado como predicado, aplica-se a *conjuntos de sentenças* e a relação $\vdash$ é definida entre conjuntos de sentenças e sentenças (pode-se pensar numa reformulação dos axiomas de Tarski que mantenha características de primeira ordem, ou bem utilizando uma linguagem bissortida ou bem, mantendo o axioma de finitariedade - isto é, em lógicas *compactas* - considerando, ao invés de conjuntos de sentenças, n-uplas de sentenças, tornando, porém, necessário um conjunto de regras infinitárias para caracterizar a conseqüência; adiante descreveremos a primeira dessas possibilidades). Ora, é justamente para tratar de um modo geral as noções de sentença e conseqüência de sistemas como o cálculo de predicados (embora ainda se careça de uma definição dos axiomas que representem essas noções para teorias de primeira ordem, bem como de possíveis modelos para esses axiomas) que os axiomas tarskianos se prestam. Não se estaria então incorrendo em circularidade? Para Béziau [2], os axiomas de Tarski não constituem um sistema de demonstração, mas, uma vez que se situam em um nível metateórico superior ao dos sistemas lógicos (e metamatemáticos, como sugere o título do primeiro artigo de 1930 [56], entendido o termo no sentido que lhe conferia David Hilbert, como o estudo 'matemático' das demonstrações matemáticas), o que lhes vale a classificação de *metalógicos* (ou ainda *metametamatemáticos*), deveriam ser avaliados a partir de um ponto de vista informal ou tratados, ainda que anacronicamente, dentro do arcabouço da Teoria de Modelos (introduzida em grande medida pelo próprio Tarski como atualização de sua semântica científica, justamente com a intenção de tratar questões metateóricas de maneira formalmente satisfatória e contornando os riscos de circularidade).

No entanto, algumas considerações de Seoane [50] nos sugerem a possibilidade de um *approach* puramente sintático e ainda assim livre de circularidade. Uma vez que o conceito de conseqüência, assim como o de sentença, tratado pela teoria tarskiana, não é senão definido com exatidão *dentro* das teorias formalizadas específicas, que a abordagem geral axiomática não é senão o reflexo das propriedades compartilhadas pelas diversas noções de conseqüência definidas em cada sistema, e que os axiomas de Tarski não possuem caráter regulador (no sentido de excluir do escopo do conceito aquelas 'candidatas a instância' que não satisfazem determinados requisitos), parece coerente considerar que os mesmos *não* prescindem das teorias formais existentes, sendo de fato dependentes delas. Portanto, o cálculo sentencial clássico, por exemplo (ou a teoria de conjuntos, ou a lógica de segunda ordem), mesmo podendo ter seus conceitos metalógicos definidos implicitamente pela adjunção de certos axiomas ao 'sistema' (e aqui seriam dispensáveis as aspas) geral de Tarski, pode, consistentemente, ser utilizado como lógica subjacente às demonstrações dele (do sistema de Tarski ou do sistema de Tarski enriquecido), ainda que este seja empregado em nível metateórico superior (teríamos que reformular os axiomas, evidentemente, em alguma linguagem formal definida). Não se trata, como na introdução da 'semântica científica' pelo próprio Tarski, em que pesava a ausência de conceitos semânticos na definição de conceitos semânticos primitivos, de *definir* o conceito de conseqüência ou mesmo de elucidá-lo por meio de descrições ou do arrolamento de requisitos a serem satisfeitos, mas simplesmente de um processo de *abstração* de propriedades de conceitos já devidamente existentes e definidos, ou senão cuja definição é, de qualquer modo, alheia ao processo considerado. Portanto, um aporte puramente sintaticista não está necessariamente excluído de consideração, embora seja vulnerável, evidentemente, às limitações próprias do método sintático (axiomático, em particular), as quais, no entanto, não eram ainda claramente conhecidas à época em que Tarski publicou seus artigos referidos.

1.1.1 Estruturalidade e sistemas de Hilbert

Como já foi dito, Tarski considera as noções exatas de sentença e conseqüência lógica definidas apenas no interior dos sistemas particulares em que aparecem, sendo a tarefa de seus axiomas somente destacar algumas de suas propriedades gerais. O processo, porém, pode ser refinado (v. [15] e [16]). O conjunto S, então, pode ser dado com um grau menor de arbitrariedade (não mais somente como um conjunto qualquer de 'objetos' ou 'inscrições', chamados 'sentenças'), ao ser gerado por um conjunto de operadores (conectivos). Isso vem da idéia de considerar o conjunto de sentenças como uma *álgebra abstrata*, conforme preconizado por Adolf Lindembaum. Podemos tornar a idéia mais precisa, para lógicas proposicionais (para lógicas quantificadas, a tarefa apresenta complicações consideráveis, uma vez que só os conectivos não bastam para definir as sentenças - e em geral, as fórmulas - da linguagem), por meio da definição do conceito de *assinatura proposicional* (v. [15]).

Define-se uma *assinatura proposicional* como uma família $C = \{C^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em que cada C^n é um conjunto, disjunto dos demais, cujos elementos são chamados *conectivos n-ários*. Os elementos de C^0, em particular, são chamados *constantes*. Chama-se o *domínio* de C o conjunto $|C| = \bigcup\{C^n : n \in \mathbb{N}\}$ e diz-se que uma assinatura C_1 *está contida em* uma assinatura C_2 se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $C_1^n \subseteq C_2^n$.

Daqui, podemos definir o conjunto S de sentenças (ou de proposições, ou de fórmulas). Para isso usaremos, por facilidade de leitura, símbolos auxiliares como vírgulas e parênteses.

Seja $\mathcal{V} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto fixo tal que, para cada n, p_n é uma *variável proposicional*, e uma assinatura $C = \{C^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. O conjunto S das *sentenças geradas por C* é a interseção (o menor) dos conjuntos X que satisfazem:

- $\mathcal{V} \subseteq X$

- se $n \in \mathbb{N}$, $c \in C^n$ e $x_1, ..., x_n \in X$, então $c(x_1, ..., x_n) \in X$ (e em particular, $C_0 \subseteq X$).

Pode-se dizer que a denominação de *sentenças* aos elementos de S é arbitrária, já que o poderíamos considerar como um conjunto de *proposições* ou, até mais propriamente, de *fórmulas*, uma vez que admitimos variáveis, tornando seus elementos, por assim dizer, insaturados. Em particular, o apelo à noção de proposição poderia trazer certos problemas, especialmente de natureza conceitual. Usualmente se consideram proposições como os *significados* associados às sentenças, mas a discussão sobre a distinção entre os conceitos de sentença e proposição (e o motivo pela preferência de de um em relação ao outro) não é presentemente relevante e a escolha pela denominação *sentença* aos objetos mencionados se considerará justificada simplesmente por seguirmos a tendência tarskiana. O conjunto S ora definido é amiúde apresentado como a *linguagem gerada por C* e denotado $L(C)$.

Podemos dizer, em termos de *álgebra universal*, que S é uma álgebra de tipo C livremente gerada por $\mathcal{V}$, de modo que, dada $f : \mathcal{V} \longrightarrow A$ em que A é uma álgebra de tipo C (ou seja, a cada conectivo $c \in C^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, A apresenta uma operação n-ária $c^A : A^n \longrightarrow A$ associada), há somente uma extensão de f a uma função $\hat{f} : S \longrightarrow A$ que seja um homomorfismo de álgebras de tipo C, i.e., tal que para cada $c \in C^n$ e cada $x_1, ..., x_n \in S$ (para todo $n \in \mathbb{N}$), $\hat{f}(c(x_1, ..., x_n)) = c^A(\hat{f}(x_1), ..., \hat{f}(x_n))$. Que $\hat{f}$ é única é fácil demonstrar. Seja uma certa $f' : S \longrightarrow A$ tal que $f \subseteq f'$ e que seja homomorfismo de álgebras de tipo C. Seja $x \in \mathcal{V}$; logo, como f' é extensão de f, $f'(x) = f(x) = \hat{f}(x)$. Suponha-se agora que $f'(x_i) = \hat{f}(x_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$ (sendo que $x_0 = \emptyset$ e $c(\emptyset) = d$, em que d é uma constante). Logo, $f'(c(x_1, ..., x_n)) = c^A(f'(x_1), ..., f'(x_n)) = c^A(\hat{f}(x_1), ..., \hat{f}(x_n)) = \hat{f}(c(x_1, ..., x_n))$, ou seja, $f' = \hat{f}$. Portanto, $\hat{f}$ é única. Deste modo, considerando os elementos do conjunto S, i.e., as sentenças, como as unidades de uma linguagem passíveis de interpretação ou valoração (no sentido clássico, como verdadeiras ou falsas), dado que a uma função das variáveis proposicionais em uma álgebra corresponde apenas uma função de mesma imagem partindo do domínio das sentenças (conjunto S), podemos, por simplicidade, definir somente uma valoração no conjunto $\mathcal{V}$ das variáveis proposicionais para termos uma única atribuição no conjunto das sentenças. Isso vale igualmente para todos os casos em que pretendemos definir um homomorfismo entre álgebras de tipo C que tenham como domínio o conjunto S.

Podemos exemplificar algumas assinaturas, para facilitar a compreensão. Poder-se-ia pensar numa assinatura C_0 tal que $C_0^1 = \{\neg\}$, $C_0^2 = \{\vee\}$ e $C_0^n = \emptyset$ se $n \neq 1$, $n \neq 2$, de modo que $|C_0| = \{\neg, \vee\}$ e o conjunto S relacionado é o conjunto das fórmulas que utilizam somente a negação e a conjunção. Uma outra assinatura, chamemo-la C_1 poderia ser tal que $C_1^1 = \{\neg\}$, $C_1^2 = \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$ e $C_1^n = \emptyset$, se $n \neq 1$, $n \neq 2$, de modo que $|C_1| = \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow\}$ e o conjunto S associado é o conjunto das fórmulas que utilizam a negação, a disjunção, a conjunção e a implicação.

Uma tal perspectiva algébrica dos sistemas lógicos em geral permitiu a Jerzy Łoz e Roman Suszko, em 1958 [6], propor a formulação de um novo axioma que, adicionado ao conjunto previamente introduzido por Tarski, determina uma nova propriedade que sistemas lógicos podem ter, a saber, a *estruturalidade*. Para apresentá-lo, porém, é preciso introduzir primeiramente o conceito de *substituição*, definido como um endomorfismo σ em S, ou seja, um homomorfismo $\sigma : S \longrightarrow S$ que, como vimos, pode ser substituído por um homomorfismo $\hat{\sigma} : \mathcal{V} \longrightarrow S$. O axioma mencionado diz então o seguinte:

(4) $\hat{\sigma}(Cn(X)) \subseteq Cn(\hat{\sigma}(X))$.

ou, reformulado em termos da relação de conseqüência (via (E)):

(r4) se $X \vdash x$, então $\hat{\sigma}(X) \vdash \hat{\sigma}(x)$ para toda substituição σ.

Notando que $\hat{\sigma}(A)$ é uma abreviação para $\hat{\sigma}(a)$ para todo elemento a de A, sempre que A for um conjunto.

Outra observação importante é a de que duas assinaturas diferentes podem gerar o mesmo conjunto de sentenças, de modo que a propriedade expressa pelos axiomas (4) e (r4) poderia não estar bem definida, o que em si já justifica a compreensão do conceito de álgebra livre na *definição* de sistema lógico. Para enxergar esse fato, tomem-se duas assinaturas, C_1 e C_2. Para C_1, temos: $C_1^1 = \{\neg\}$, $C_1^2 = \{\vee\}$ e $C_1^n = \emptyset$, para $n \neq 1$, $n \neq 2$ ou seja, $|C_1| = \{\neg, \vee\}$ (de fato, C_1 é a assinatura C_0 dada acima). O conjunto S_1 relacionado a C_1 é dado então pelo menor conjunto X tal que $\mathcal{V} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ e que, dados x, x_1 e x_2 em X, $\neg(x) \in X$ e $\vee(x_1, x_2) \in X$. Seja a assinatura C_2 tal que $C_2^0 = S_1$, $C_2^1 = \{\neg\}$ e $C_2^n = \emptyset$ para todo $n \neq 1$, ou seja, $|C_2| = S_1 \cup \{\neg\}$, e seja o conjunto de sentenças associado, chamemo-lo S_2, dado pelo menor X tal que $\mathcal{V} \subseteq X$ e que, dado $x \in X$, $\neg(x) \in X$. Mas como o conjunto de variáveis proposicionais é o mesmo, e qualquer elemento de S_1 está presente em S_2, já que as constantes (neste caso, $\{c : c \in C_2^0\} = S_1$) contituem fórmulas (pela segunda cláusula definidora de um conjunto de sentenças a partir de assinaturas, quando $n = 0$), e qualquer outro elemento formado a partir da segunda cláusula definidora de S_2 está em S_1, pois satisfaz ao mesmo tempo a segunda cláusula definidora deste último, e estes são os únicos elementos de S_2, claro está que $S_1 = S_2$. No entanto, como vimos, $C_1 \neq C_2$. Ora, se temos duas álgebras diferentes, temos dois endomorfismos diferentes definidos sobre o mesmo universo de sentenças, de modo que $\hat{\sigma}(X) \vdash \hat{\sigma}(x)$ pode seguir de $X \vdash x$ em um deles mas não no outro. No caso do exemplo dado, teríamos em um caso um endomorfismo definido para duas operações, e outro definido só para uma, de modo que os resultados de ambas as operações diferem entre si.

Há que se observar também que Tarski havia proposto ([55] e [56]), para a introdução de cada conectivo, um axioma próprio, a ser incorporado pelos sistemas em que aparece, além de axiomas adicionais para tratar de suas propriedades. Em termos algébricos, isso corresponde a enriquecer estruturalmente o par $\langle S, Cn\rangle$ cujo fecho constituiria um sistema lógico no sentido tarskiano original, determinando uma $(n+2)$-upla $\langle S, c_1, c_2, ..., c_n, Cn\rangle$, em que c_i é tal que $1 \leq i \leq n$, no caso em que o número de conectivos introduzidos for finito (de outro modo teríamos, obviamente, uma seqüência infinita). Assim, além de constituir um refinamento do processo abstrativo tarskiano, destacando uma outra propriedade geral de sistemas lógicos (ou não tão geral, considerando o ponto de vista da Lógica Universal, mas ainda assim de ampla aplicabilidade), a introdução do axioma de estruturalidade traz uma considerável simplificação na representação formal de sistemas lógicos.

Os *sistemas de conseqüência* (v. [9]), como são chamadas as estruturas de tipo $\langle S, Cn\rangle$ ou $\langle S, \vdash\rangle$, em que S é um conjunto de sentenças ou fórmulas (gerado ou não por uma assinatura - no primeiro caso, como vimos, é preferível o uso de estruturas da forma $\langle C, Cn\rangle$ ou $\langle C, \vdash\rangle$, onde C é uma assinatura), são a apresentação mais simples de lógicas, assim como as mais gerais (toda apresentação de uma lógica que envolva fórmulas ou sentenças pode ser representada como sistema de conseqüência - se é o suficiente ou não é uma questão de interesse próprio). Tanto apresentações semânticas quanto sintáticas de uma lógica induzem sistemas de conseqüência (quando uma apresentação sintática e uma apresentação semântica de uma lógica induzem um só sistema de conseqüência, podemos considerar a dita lógica *completa*). Mas como vimos, a apresentação dos axiomas de Tarski tinha em vista a reprodução de propriedades de sistemas de dedução de estilo hilbertiano. Teríamos uma forma de caracterizar os ditos sistemas, de modo a distinguilos, por exemplo, de seus correlatos semânticos (ou fechos algébricos)?

Temos a seguinte definição (v. [9], [10], [15] e [52]): um sistema de Hilbert é um par $\mathcal{H} = \langle C, R\rangle$, onde C é uma assinatura (proposicional) e R um conjunto não vazio de *regras de inferência*. Uma regra de inferência é um par da forma $\langle\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \varphi\rangle$, tal que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi\} \subseteq L(C)$ (ou S), para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $n = \emptyset$, ou seja, se uma regra é da forma $\langle\emptyset, \varphi\rangle$, dizemos que a regra é um *axioma*. Seja $r = \langle\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \varphi\rangle$ uma regra de inferência. Se σ é uma substituição (endomorfismo) em $S = L(C)$, então o par $\langle\{\sigma(\varphi_1), ..., \sigma(\varphi_n)\}, \sigma(\varphi)\rangle$ é dito uma *instância* de r. Ao operarmos com regras de inferência, estaremos utilizando *instâncias* dessas regras (perceba-se que r é sempre uma instância de si mesma).

Denota-se usualmente uma regra de inferência da forma $\langle\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \varphi\rangle$ como:

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

As regras de inferência de um dado sistema de Hilbert $\mathcal{H}$ originam a noção de *prova* ou *demonstração* em $\mathcal{H}$. Uma prova de φ a partir de Γ em $\mathcal{H}$ ($\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq S$) é uma seqüência finita $\varphi_1, ..., \varphi_n$ de fórmulas de S com $\varphi_n = \varphi$ e tal que, para cada $1 \leq i \leq n$ vale o seguinte:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; ou

2. existe uma regra $\langle\{\delta_1, ..., \delta_k\}, \delta\rangle \in R$ e uma substituição σ tal que $\sigma(\delta) = \varphi$ e $\{\sigma(\delta_1), ..., \sigma(\delta_k)\} \subseteq \{\varphi_1, ..., \varphi_{i-1}\}$.

Se existe em $\mathcal{H}$ uma prova de φ a partir de Γ, dizemos que φ é *conseqüência sintática* de Γ, denotado $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \varphi$ (se $\Gamma = \emptyset$, escrevemos $\vdash_{\mathcal{H}} \varphi$ e dizemos que φ é *teorema* de $\mathcal{H}$). $\langle C, \vdash_{\mathcal{H}}\rangle$ com $\vdash_{\mathcal{H}}$ como acima é um sistema de conseqüência. Verifica-se que satisfaz os axiomas (r1)-(r4) (pode-se também, evidentemente, definir um sistema de conseqüência com $\vdash_{\mathcal{H}}$ substituída por um operador $Cn_{\mathcal{H}}$ mediante as modificações óbvias).

Um sistema de Hilbert para a lógica proposicional clássica pode ser definido como um par $HP = \langle C, R\rangle$, onde C é uma assinatura tal que $C^1 = \{\neg\}$, $C^2 = \{\rightarrow\}$ e $C^n = \emptyset$ para $n \neq 1$, $n \neq 2$ e R é constituído pelas seguintes regras (presentes em apresentações da lógica proposicional clássica como a de [46]):

$(r1)$ $\langle\emptyset, (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))\rangle$;

$(r2)$ $\langle\emptyset, ((p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)))\rangle$;

$(r3)$ $\langle\emptyset, (((\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1)) \rightarrow (((\neg p_2) \rightarrow p_1) \rightarrow p_2))\rangle$;

$(r4)$ $\langle \{p_1, (p_1 \to p_2)\}, p_2 \rangle$.

Pelo que foi dito acima, temos que $(r1), (r2)$ e $(r3)$ são *axiomas*. $(r4)$ é a regra de *Modus Ponens*.

Sabe-se que os demais conectivos (conjunção, disjunção, bicondicional - respectivamente simbolizados por $\wedge, \vee$ e $\leftrightarrow$) são definíveis, nesse contexto, a partir dos dois apresentados. No entanto, podemos representar os *fragmentos dedutivos* da lógica proposicional clássica que dizem respeito a cada um desses conectivos como sistemas de Hilbert independentes.

Por exemplo, a *lógica da implicação clássica* pode ser definida como o sistema de Hilbert $HI = \langle C_I, R_I \rangle$, com C_I dada como a assinatura tal que $C_I^2 = \{\to\}$ e $C_I^n = \emptyset$ para todo $n \neq 2$ e R_I dada pelas seguintes regras:

(r_I1) $\langle \emptyset, p_1 \to (p_2 \to p_1) \rangle$;

(r_I2) $\langle \emptyset, ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))) \rangle$;

(r_I3) $\langle \emptyset, (((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_1) \rangle$;

(r_I4) $\langle \{p_1, (p_1 \to p_2)\}, p_2 \rangle$.

Observe-se que $(r_I1), (r_I2)$ e (r_I4) são as mesmas já apresentadas $(r1), (r2)$ e $(r4)$, mas o axioma $(r3)$ jamais poderia integrar a lista, uma vez que contém o conectivo $\neg$, ou seja, a negação (constituindo, portanto, uma *lei de interação* entre esta e a implicação), e estamos lidando com uma lógica puramente implicativa. A presença de $(r3)$ no conjunto R dado acima, contudo, além das propriedades da negação (clássica), origina resultados *puramente implicativos* que $(r1), (r2)$ e $(r4)$ sozinhos não são capazes de gerar. Para isso precisamos da regra/axioma (r_I3) entre as regras da lógica da implicação (que, em HP, é um teorema, ou seja, há uma derivação dessa fórmula a partir do conjunto de regras - incluindo axiomas - de HP e nenhuma outra assunção exógena). A lógica da implicação é a única, dentre os fragmentos conectivos da lógica clássica (aqui representada por HP), que conta com axiomas e deriva teoremas (à excessão da lógica do bicondicional, que é uma "sub-lógica" sua). Todas as demais contêm somente regras para realizar inferências a partir de conjuntos de *hipóteses*.

A lógica da negação, $HN = \langle C_N, R_N \rangle$, onde C_N é a assinatura tal que

$C_N^1 = \{\neg\}$ e $C_N^n = \emptyset$ para todo $n \neq 1$, tem seu conjunto R_N de regras constituído por:

(r_N1) $\langle \{p_1\}, (\neg(\neg p_1)) \rangle$;

(r_N2) $\langle \{(\neg(\neg p_1))\}, p_1 \rangle$;

(r_N3) $\langle \{p_1, (\neg p_1)\}, p_2 \rangle$.

A lógica da conjunção clássica é dada por $HC = \langle C_C, R_C \rangle$, com C_C a assinatura tal que $C_C^2 = \{\wedge\}$ e $C_C^n = \emptyset$ para todo $n \neq 2$ e R_C formado pelas regras:

(r_C1) $\langle \{(p_1 \wedge p_2)\}, p_1 \rangle$;

(r_C2) $\langle \{(p_1 \wedge p_2)\}, p_2 \rangle$;

(r_C3) $\langle \{p_1, p_2\}, (p_1 \wedge p_2) \rangle$.

Já a lógica da disjunção clássica, seguindo o padrão das outras, é definida como um par $HD = \langle C_D, R_D \rangle$, sendo C_D a assinatura dada por $C_D^2 = \{\vee\}$ e $C_I^n = \emptyset$ para todo $n \neq 2$; no entanto, tem a peculiaridade de que o conjunto R_D consiste de uma quantidade *infinita* de regras, todas obedientes, contudo, a um mesmo esquema, a saber:

$(E_D)_{\varphi_1\varphi_2}$ $\langle \{\varphi_1\}, \varphi_2 \rangle \in R_D$ - onde φ_1 e φ_2 são dadas como *esquemas*, i.e., substituíveis por quaisquer fórmulas bem formadas - sempre que conjunto de variáveis proposicionais presentes em φ_1 seja contido ou igual ao das variáveis proposicionais em φ_2 (escrevemos: $Var(\varphi_1) \subseteq Var(\varphi_2)$).

Isso quer dizer que as regras de inferência da lógica (sistema de Hilbert) da disjunção clássica são *todos* os pares que satisfazem os esquemas $(E_D)_{\varphi_1\varphi_2}$. Note-se que não há constantes, uma vez que $C_D^0 = \emptyset$, de maneira que todas as fórmulas de $L(C_D)$ são constituídas exclusivamente por variáveis e ocorrências do símbolo $\vee$. Por exemplo:

- $\langle\{p\},(p \vee q)\rangle$;
- $\langle\{(p \vee p)\},p\rangle$;
- $\langle\{(p \vee (p \vee q))\},(p \vee q)\rangle$;

são regras de inferência da lógica HD. Assim como o são, em geral:

- $\langle\{\varphi_1\},(\varphi_1 \vee \varphi_2)\rangle$;
- $\langle\{(\varphi_1 \vee \varphi_1)\},\varphi_1\rangle$;
- $\langle\{(\varphi_1 \vee (\varphi_1 \vee \varphi_2))\},(\varphi_1 \vee \varphi_2)\rangle$;

em que φ_1 e φ_2 são *esquemas*, já que $Var(\varphi)$ permanece o mesmo em todas as ocorrências de φ, para toda fórmula φ.

É importante ressaltar que as referidas caracterizações dos fragmentos conectivos da lógica proposicional clássica, indicando o comportamento (leia-se 'propriedades dedutivas') das fórmulas construídas com ocorrências de um só conectivo (mais as variáveis proposicionais) não sugerem por si as interações expressas por axiomas como (r3). Isso constitui um ponto relevante no contexto das combinações entre lógicas, quando se tenta recuperar uma lógica proposicional (e.g. a lógica clássica) pela combinação de seus fragmentos. Não é, absolutamente, óbvio que tais interações devam de fato surgir ao combinarem-se entre si lógicas como as definidas acima (HI, HN, HC e HD).

1.2 A perspectiva semântica tarskiana

A abordagem tarskiana posterior à axiomática trouxe consigo uma reviravolta metodológica radical, motivada provavelmente pelas já mencionadas limitações do método sintático (postas a nu especialmente após o aparecimento dos resultados da incompletude demonstrados por Gödel [37]), juntamente com a disponibilidade do instrumental elaborado pelo próprio Tarski para a definição da teoria semântica (que originou, por modificações posteriores, a Teoria de Modelos). O artigo de 1936 publicado na coletânea *Logic, Semantics, Metamathematics* sob o título "*The concept of logical consequence*" [57] ("O conceito de conseqüência lógica") inicia-se com uma análise sobre a adequação dos correspondentes formais da noção de conseqüência lógica, ou seja, as 'versões' da conseqüência lógica adaptadas para teorias formalizadas, em relação ao conceito informal, da linguagem cotidiana, que é a sua fonte e inspiração. Ao contrário do que ocorre nos artigos anteriores, em que se apresenta a axiomática que procura representar os aspectos gerais da noção de conseqüência *já dentro do esquema dado pelas teorias formais de demonstração existentes*, o que se propõe aqui é uma avaliação crítica do próprio conceito de conseqüência lógica e da medida da adequação com a qual este é representado formalmente. Em outras palavras, trata-se de um esforço, aqui sim, *elucidatório*. Seoane [51] oferece, baseado nos trabalhos de Alberto Coffa (p. ex. [14]), uma explicação do significado de uma *elucidação matemática* (da modalidade tarskiana), que nós adotaremos. Segundo ele, o processo pelo qual se dá a elucidação (nominalmente o *processo elucidatório*) consiste no estabelecimento de uma determinada relação entre conceitos, a saber o *explicandum* e o *explicatum*. O primeiro é o conceito relevante de que partimos, ou seja, o conceito que pede elucidação. Sendo excessivamente vago ou ambíguo para o tratamento formal direto, é preciso estabelecer, com base no seu uso informal ou intuitivo, determinados critérios ou *condições de adequação* que um possível candidato a seu representante formal deve satisfazer para se provar digno da posição. O *explicatum*, por sua vez, é um conceito formal escolhido, 'tratável matematicamente', que conseguiu passar com sucesso pelo filtro das condições de adequação. A 'passagem' do *explicandum* ao *explicatum* não precisa ser um processo de um só passo, podendo se dar por meio de uma seqüência de diversos *momentos elucidatórios* diferentes, através de um refinamento formal e conceitual progressivo, culminando no *explicatum*, que coincide com o último desses momentos. O objetivo fundamental das condições de adequação é não legitimar senão aqueles candidatos a *explicata* que apresentem um grau desejável de coincidência intensional e extensional em relação a uma coleção de aspectos destacados do *explicandum* que se considerem essenciais para preservar o seu sentido. A opção por uma dentre as possíveis alternativas de conjuntos de condições de adequação não é matéria de demonstração; pressupondo sempre uma apreciação crítica dos meios empregados na elucidação em curso, o destaque das propriedades 'relevantes' do conceito informal não pode ser reduzido a mera dedução e por isso sempre envolve um grau maior ou menor de arbitrariedade. Observe-se que o *explicandum* fornece desde o início uma interpretação ao *explicatum*. O que se busca, de fato, é a justificação (por argumentação) de um bicondicional geral associando o *explicandum* ao *explicatum*, ou seja, da afirmação

(R) ϕ se, e somente se, φ

onde 'ϕ' corresponde a uma afirmação (qualquer, dentro do contexto visado) contendo o *explicandum* e φ a uma versão formalizada de ϕ, contendo o *explicatum*.

Em se considerando particularmente a noção de conseqüência lógica, a avaliação da noção de derivabilidade sintática segundo os critérios de adequação da noção intuitiva pressupõe a atribuição de uma semântica rudimentar dando conta dos termos que a constituem. Pressupõe-se que os elementos do conjunto de sentenças de uma linguagem qualquer sejam passíveis de valoração veritativa e que a noção de conseqüência representada corresponda a uma noção de *argumento* que preserva a verdade das premissas à conclusão, de modo que ou a conclusão é verdadeira ou pelo menos um dos elementos do conjunto de premissas é falso. Com efeito, essa parece ser uma propriedade essencial do conceito intuitivo de conseqüência lógica. Esta mesma propriedade, contudo, é condicionada pela posse de um caráter de *necessidade*. Não é imediatamente claro o *tipo* de necessidade a que nos referimos (v. [26]). Há pelo menos quatro versões de necessidade que podem ser consideradas aqui. Uma é a noção de *analiticidade*, segundo a qual a conclusão deve ser verdadeira porque o seu significado está contido no significado das premissas, que são afirmadas; outra é a noção de uma necessidade, ou de qualquer forma uma modalidade, de variedade *epistêmica*, que atestaria que o conhecimento das premissas levaria ao conhecimento das conclusões *a priori*; uma terceira é a noção de necessidade *metafísica*, que, no caso considerado, atestaria não haver situação ou estado de coisas *possível* ou *concebível* em que as *proposições* expressas pelas sentenças do conjunto de premissas sejam verdadeiras enquanto a proposição expressa pela conclusão seja falsa; e ainda uma noção de necessidade de tipo mais propriamente *lógico*, que não é senão uma versão restrita da de analiticidade, na qual os termos em cuja consideração o significado das expressões é dado são os termos propriamente lógicos, ou *constantes lógicas* da linguagem. A forma assumida pelo explicatum não é indiferente ao tipo de modalidade escolhida para o esclarecimento do *explicandum*.

De fato, como mostra John Etchemendy no livro *The Concept of Logical Consequence* [26], as duas últimas versões engendram concepções semânticas diferentes não apenas na perspectiva, mas também nos resultados, representadas, em um caso, pela *semântica representacional*, e no outro pela *semântica interpretacional*. Onde uma semântica representacional leria uma atribuição veritativa do valor designado a uma sentença como 'verdadeiro em W' - onde W representa o *mundo* ou atual *estado de coisas* (ou uma configuração possível do mundo ou uma dentre as diversas concebíveis alternativas entre estados de coisas) -, uma semântica *interpretacional* a leria como 'verdadeiro em L', onde L é a linguagem em que a sentença é construída (para alguma possível interpretação dos seus termos - e escolha de constantes lógicas). A opção de Tarski, ainda segundo Etchemendy, é por essa última. Com efeito, parece, à primeira vista, a mais palatável do ponto de vista matemático e a menos comprometida do ponto de vista filosófico. Ainda que remeta a uma noção de necessidade que não é senão uma versão da analiticidade (necessidade lógica), não padece das fraquezas gerais desta, como o apelo a noções de compreensão obscura como sinonímia e definibilidade (conforme notado por Willard Quine [48]). Parece apontar para um descompromisso ontológico em relação à realidade efetiva, como no caso de assumir uma modalidade metafísica. E por fim, prescinde de reformulações custosas para manter a forma cognoscível *a priori*, como sugeria Rudolf Carnap [8]. No entanto, para Etchemendy [26], a posição tarskiana (interpretacional) implica no deslocamento do referencial das noções semânticas do *mundo* para a *linguagem*, de modo que, para ele, essa escolha em si já obstrui a justificativa da semântica tarskiana do ponto de vista da intuição, tornando difícil a identificação do ponto de contato entre o conceito intuitivo e o formalizado e contrariando assim a motivação primordial de Tarski. Além do que, aponta para certos compromissos ontológicos questionáveis, como veremos mais à frente.

Mas antes de considerar propriamente a proposta de Tarski para o *explicatum* da noção de conseqüência lógica, devemos conhecer a restante característica essencial (conforme a análise tarskiana) desta, de modo a que possamos então julgar o conceito de conseqüência sintática pelo prisma do processo elucidatório empreendido. Uma noção de conseqüência lógica deve ser tal que *independa* do conteúdo empírico das proposições eventualmente expressas pelas sentenças de um argumento. Isto é, trata-se de uma noção *formal*, que determina uma 'derivação' meramente estrutural, dependente apenas da forma (podemos dizer da forma *lógica*, se assumimos uma modalidade desse tipo para a condição anterior) das sentenças envolvidas, de conclusões a partir de premissas. Em um certo sentido, esse requisito está contido no anterior, se considerarmos cada uma das formas de necessidade mencionadas. Na avaliação tarskiana, uma sentença segue logicamente de um conjunto de sentenças se a preservação da verdade das premissas à conclusão é *logicamente universal*, ou seja, preserva-se para *qualquer* possível instanciação (desde que os elementos instanciados pertençam às categorias semânticas adequadas, p. ex., indivíduos ocupam o lugar de indivíduos, predicados o de predicados etc.). Essa mera observação já preconiza no essencial a noção de *satisfação*, fundamental à elucidação tarskiana. Que as duas condições apresentadas são as únicas necessárias para caracterizar o conceito de conseqüência não é absolutamente óbvio. Para constatá-lo, basta que se pense, por exemplo, na controvérsia suscitada pelos lógicos da relevância sobre o conceito de implicação, intimamente conectado com o de conseqüência lógica. De fato, uma análise semântica baseada em algo mais do que valores de verdade e forma é o que, segundo Richard Epstein [25], separa as lógicas ditas alternativas (e complementares) da lógica clássica. Falaremos mais sobre isso adiante. Mas, ao nos restringirmos às duas condições mencionadas, estamos apoiados por forte tradição. Veremos que a própria definição *geral* de conseqüência lógica apresentada por Epstein não requer outras explicitamente, embora a análise das proposições sugira haver outras condições implícitas (específicas, contudo - mas ao admiti-las, já descartamos as condições tarskianas como universalmente necessárias e suficientes). De fato a relativização da noção de conseqüência lógica por Epstein tem a ver com a atribuição de *conteúdo* às proposições de uma determinada lógica. Mas sigamos com a noção tarskiana.

Pergunta-se agora se a noção de derivabilidade sintática satisfaz os dois requisitos. A resposta é positiva para qualquer noção de derivabilidade inserida em um sistema de demonstração correto e que satisfaça o axioma de estruturalidade (por exemplo, para uma conseqüência induzida por um sistema de Hilbert). Num sentido tarskiano (ou tarskiano estendido) de sintaxe lógica, isso corresponde a uma propriedade universal dessa noção. No entanto, só temos aqui garantido um dos lados do bicondicional (R), tomando ϕ como a afirmação das condições de adequação para a noção intuitiva de conseqüência lógica e φ como a sua correspondente para a noção de derivabilidade sintática, nominalmente '$\varphi \rightarrow \phi$'. Mas temos '$\phi \rightarrow \varphi$'?

A resposta de Tarski é negativa e se escora na identificação de um contra-exemplo. O exemplo fornecido por Tarski é o da ω-incompletude.

Supondo haver uma teoria em que seja demonstrável cada um dos seguintes teoremas:

(A_0) 0 possui a propriedade P,

(A_1) 1 possui a propriedade P,

.

.

e em geral, para qualquer número natural (expressão que denote um número natural em um dado sistema numérico) n:

(A_n) n possui a propriedade P.

Seja então (A) a seguinte sentença universal:

(A) Todo número natural possui a propriedade P.

Esta sentença não pode ser derivada sintaticamente em qualquer sistema em que as regras de inferência sejam de natureza finitária, ou seja, em qualquer sistema em que a noção de conseqüência (sintática) satisfaça o axioma (3*) do sistema tarskiano original. Isto é, a conclusão apontada está em contradição com a concepção de conseqüência como resultado de uma demonstração, se por isto se entende uma seqüência finita de sentenças das quais a última é obtida das restantes pela aplicação de regras de inferência da maneira como já definimos (v. o caso dos sistemas de Hilbert). Outro modo de colocar isso é dizer que a sentença (A) não é uma conseqüência derivável na teoria em questão através de procedimentos *efetivos*, passíveis em princípio de ser levados a cabo em um tempo finito.

Para Tarski [57], no entanto, (A) é uma evidente conseqüência *lógica* do conjunto de elementos da seqüência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e portanto a inferência é uma instância legítima do conceito considerado. O motivo para isso não é imediatamente claro a partir das condições de adequação apresentadas. Por que uma noção de conseqüência lógica que satisfaça os requisitos de preservação necessária da verdade e formalidade teria que incluir em seu escopo a derivação de (A) a partir do conjunto $\{(A_0), (A_1), ..., (A_n), ...\}$? A transmissão da verdade dos elementos da referida seqüência de sentenças a (A) teria que ser necessária e processada de maneira inteiramente formal (i.e., de maneira independente dos possíveis conteúdos não lógicos atribuíveis a partes das expressões envolvidas). Ora, vê-se claramente que a 'prova' de (A) a partir do conjunto de elementos da seqüência de $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ clama pela aceitação do princípio de indução matemática. Mas esse princípio não é válido universalmente, sendo uma assunção de teorias específicas, por exemplo alguma teoria formal da aritmética de primeira ordem. E então a afirmação da validade do argumento considerado estaria vinculada a uma afirmação substancial sobre *o mundo*, ainda que pudesse ser considerada em certo sentido, talvez metafísico, *necessária*. Isso, contudo, claramente não é coerente com a perspectiva de Tarski. Com efeito, uma teoria formalizada da aritmética admite, na Teoria de Modelos (que é uma aplicação direta da perspectiva tarskiana), interpretações não-*standard* do conjunto dos números naturais em que o princípio de indução matemática não é verdadeiro, por exemplo tomando um conjunto que extrapole o dos ordinais finitos como domínio de quantificação, enquanto definindo o princípio de indução para a constante 0 e a função 'sucessão' abrangendo o domínio dos ordinais pertencentes ao conjunto ω. Mas então como Tarski justifica a afirmação de que a inferência de (A) a partir do conjunto $\{(A_0), (A_1), ..., (A_n), ...\}$ é uma instância legítima do conceito de conseqüência lógica? Consideremos duas explicações propostas (respectivamente por Etchemendy [26] e Mario Gómez Torrente [39], v. também [51]): ele pode tomar como *fixos* os termos '0', '1', '2',..., com interpretação igualmente fixa, à maneira dos termos lógicos (de modo que os próprios termos numéricos deveriam estar incluídos nessa categoria), ou assumir uma perspectiva de inspiração *logicista* e dá-los como definíveis a partir de termos lógicos mais básicos. Mas essas saídas o expõem aos problemas ulteriores (mutuamente excludentes, porém), de justificação do logicismo, e de superar as possíveis alegações sobre a arbitrariedade da seleção das constantes lógicas. O primeiro problema impõe um compromisso filosófico sobre o qual não parece haver pronunciamentos do próprio Tarski que o endossem ou possam dar a entender até que ponto, se algum, Tarski estaria disposto a se comprometer com uma tal visão. Entretanto, Tarski estava plenamente ciente do segundo problema, e menciona que, por exemplo, a escolha de *todos* os termos de uma linguagem como constantes lógicas levaria à imediata fusão entre os conceitos de conseqüência lógica e conseqüência *material*, e as considerações tomadas sobre a delimitação do conjunto correto de constantes lógicas o levam a deixar o problema em aberto. Esse mesmo comentário torna ainda menos provável uma suposta adesão a um programa logicista. E considerando-o, pode-se ainda notar que, conforme assinala Etchemendy [26], algumas seleções de constantes lógicas, como, por exemplo, uma de que estejam excluídos os conectivos funcionais-veritativos (incluídos na linguagem como termos de interpretação variável), tendem a produzir resultados excessivamente afastados da intuição comum da conseqüência lógica, e portanto da motivação original de Tarski.

Tarski, no entanto, simplesmente admite a referida instância, e passa a buscar uma noção de conseqüência que a inclua. Primeiro, para tentar salvar *ad hoc* a conseqüência sintática, ele menciona a possibilidade de representar a inferência de (A) a partir do conjunto $\{(A_0), (A_1), ..., (A_n), ...\}$ através de uma nova regra de inferência sintática, mas de natureza infinitária. De fato, é o que acontece no caso da ω-lógica, onde, assumindo a possibilidade de representação, na linguagem da teoria, dos membros do conjunto dos números naturais, temos legitimada, a partir da demonstração (sintática) de sentenças do tipo ϕ_n (em que ϕ representa uma propriedade do número natural n ou, mais precisamente, em que a representação de n apareça como constante - e toda constante represente um natural), *para todo* n, a inferência de uma sentença da forma $\forall(x)\phi_x$ (perceba-se que os sistemas de Hilbert - v. seção 1.1.1 - como os definimos não permitem uma tal inferência, uma vez que as regras definidas são de natureza *finitária*). Para Tarski, porém, a elaboração de uma tal regra é bastante problemática, pois ela pressupõe, para a sua efetiva aplicabilidade, a demonstração de um número *infinito* de sentenças, tarefa impossível na prática. Tal exigência poderia, porém, ser substituída pela exigência de que, se para todo $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n é *demonstrável* (e não efetivamente demonstrada) *a partir das regras do sistema até o momento usadas*, então $\forall(x)\phi_x$ segue-se. No entanto, essa regra não pode ser diretamente expressa em símbolos do próprio sistema (teoria), por tratar-se de uma regra de natureza *metateórica*, em contraste com as regras de inferência usuais. Mas supondo que a linguagem da teoria considerada seja suficientemente expressiva para representar a aritmética dos números naturais, ela pode, através do método de aritmetização consagrado por Gödel (v. [37]), representar seus próprios enunciados metateóricos, e portanto formular a regra referida à semelhança das demais regras do sistema (embora de forma consideravelmente complicada). Contudo, mesmo esse recurso é sujeito a objeção, pois é definido em termos das regras do sistema *até o momento usadas*, conceito cuja extensão a aplicação da regra ora definida expande. Para essa extensão expandida, teríamos uma regra análoga e assim por diante, *ad infinitum.* Além disso, supondo ser uma tal regra definida recursivamente e efetivamente aplicável à teoria, temos à nossa frente o resultado demonstrado por Gödel de que qualquer teoria forte o bastante para representar a aritmética dos números naturais (pré-requisito para a formulação dessas regras segundo o método mencionado) é essencialmente incompleta (dedutivamente), ou seja, por mais que se acrescentem ao sistema novas regras estruturais de inferência, é sempre possível construir sentenças que seguem, conforme Tarski, dos axiomas dessa teoria "*no sentido usual*" (i.e., de acordo com a noção que Tarski considera intuitiva de conseqüência lógica), mas não podem ser demonstradas na mesma teoria (v. [37]).

Tais considerações levam Tarski à proposição de um novo *explicatum* para a noção de conseqüência lógica. Primeiro considera a seguinte afirmação:

(F)*Se, nas sentenças da classe K e na sentença X, as constantes - além daquelas puramente lógicas - são substituídas por quaisquer outras constantes (símbolos de um tipo sendo substituídos por símbolos do mesmo tipo) e se denotarmos a classe de sentenças assim obtida de K por 'K'' e a sentença obtida de X por 'X'', então a sentença X' deve ser verdadeira se todas as sentenças da classe K' forem verdadeiras.*

como candidata a explicatum de "a sentença X é conseqüência lógica da classe K de sentenças"[1]. Para verificar sua adequação, seria preciso mostrar que ela se trata de condição necessária e suficiente para a satisfação dos princípios estabelecidos como condições de adequação. Contudo, embora possa ser claramente vista como condição necessária (já que a preservação da verdade das premissas à conclusão deve ser mantida sob todas as possíveis substituições de símbolos não lógicos - os símbolos lógicos provêem a "moldura" formal que caracteriza a estruturalidade da relação), a proposição acima não tem força o bastante para se caracterizar como suficiente. Isso porque o escopo das possíveis substituições é essencialmente dependente da riqueza em conceitos da linguagem que se tem em mente. Dessa maneira, seriam incluídas como instâncias de conseqüência lógica diversos casos de

[1]A sentença (F) é um correlato preciso da definição de conseqüência lógica de Bernard Bolzano [5], embora, ao invés de sentenças e constantes, este trate de proposições e idéias componentes - para Bolzano, a idéia de conseqüência lógica, como a de verdade lógica, é *relativa* ao conjunto fixo assumido de idéias componentes, e algo similar pode ser dito de Tarski, considerando a possibilidade em aberto de considerar conjuntos alternativos de constantes lógicas

conseqüência puramente material. Poder-se-ia pensar, no entanto, que a condição seria suficiente se considerássemos somente linguagens em que designações de *todos os possíveis objetos* ocorressem. Mas a elaboração de uma linguagem desse tipo está além da factibilidade (e além do mais levantaria questões como "o que pode ser definido como um objeto?", de solução nada trivial).

A solução finalmente defendida por Tarski é uma que envolve conceitos da teoria por ele mesmo introduzida da "semântica científica", desenvolvida principalmente a partir do célebre artigo publicado originalmente em 1933 (cujo título foi traduzido, em inglês, como "*The concept of truth in formalized languages*" [58] - "O conceito de verdade em linguagens formalizadas"). Aí são introduzidos todos os conceitos semânticos fundamentais para a definição de verdade em uma classe abrangente de teorias formalizadas, e os quais são empregados aqui para a definição semântica de conseqüência lógica. Dentre essas noções está a de *satisfação* de uma fórmula por um objeto ou n-upla de objetos, definida recursivamente a partir de fórmulas atômicas (a definição precisa não será dada aqui - remetemos a [58] -, mas para que se a entenda, basta dizer que, por exemplo, a condição "x é homem" é satisfeita pelo objeto Sócrates, ou que a equação "x + y = z" é satisfeita pela tripla $\langle 3, 4, 7 \rangle$) e passível de ser estendida para classes de fórmulas e seqüências (possivelmente infinitas) de objetos (uma classe de fórmulas é satisfeita por uma seqüência dada de objetos se, e somente se, essa mesma seqüência satisfaz todas as fórmulas da classe). A partir do conceito de satisfação, Tarski define 'modelo'. Considerando uma classe L de sentenças, ao se substituírem todas as constantes extra-lógicas por variáveis correspondentes (de mesmo tipo), qualquer seqüência de objetos que satisfaça todos os elementos da classe de funções sentenciais assim obtida - chamemo-la "L'" - é chamada um *modelo* da classe L de sentenças. Em particular, se a classe L tem um único elemento, digamos a sentença X, falamos de 'modelo da sentença X'. E temos a seguinte definição de conseqüência lógica:

A sentença X segue logicamente das sentenças da classe K sse todo modelo da classe K é também um modelo da sentença X.

Nesse caso, a transmissão necessária da verdade das premissas à conclusão não depende da riqueza conceitual da linguagem assumida, pois os modelos lidam diretamente com objetos, e não estritamente com representações lingüísticas. E por isso também não há necessidade de haver símbolos na linguagem denotando os objetos, desde que se possa considerar, *in abstracto*, que *quaisquer que sejam* os objetos que 'modelem' as premissas, igualmente o façam com a conclusão. Evidentemente, a satisfação da condição (F) acima formulada pela noção de conseqüência tal como a definimos agora é um corolário dessa definição, pois considerando que símbolos extra-lógicos são interpretados como objetos de algum domínio, a substituição de símbolos que denotem certos objetos por símbolos que denotem outros (o caso em que símbolos diferentes denotem um só objeto não representa problema) em nada afeta a preservação da verdade. Obviamente, essa caracterização da conseqüência lógica está ancorada no dúbio conceito de *verdade*, mas Tarski se esquiva do problema pelo juízo de que esta encontra uma formulação adequada na sua semântica formal, em cujo corpo teórico se apresenta sua definição de conseqüência lógica [58].

O que de fato faz a definição de Tarski é apresentar o conceito de conseqüência lógica como noção *meta-teórica*, não necessariamente redutível à noção sintática. Mesmo que o contra-exemplo apresentado seja discutível, certos resultados como os teoremas de Incompletude de Gödel [37] e de indefinibilidade da verdade do próprio Tarski [58] mostram que considerações semânticas, i.e., de natureza meta-teórica (considerando uma teoria como contida numa sintaxe fechada) extrapolam os limites sintáticos das teorias. Com efeito, a função da meta-teoria é estabelecer resultados sobre a teoria que não são expressáveis no interior dela mesma. De fato, como se pode depreender da discussão acerca da condição (F) e de sua insuficiência para representar a noção de conseqüência lógica (perceba-se que (F), referindo-se a substituições dentro da linguagem, pode ser expressa como regra sintática), parece estar envolvido mais nesse conceito do que a sintaxe sozinha poderia expressar. Aliás, já o fato de as condições de adequação para o conceito de conseqüência envolverem a noção de verdade parece nos indicar que o conceito de conseqüência lógica viceja além dos feudos da sintaxe. Uma ressalva possível é que, se tomarmos o contra-exemplo da ω-incompletude como defectivo, a definição tarskiana aparenta nos posicionar em uma perspectiva *clássica*, onde as duas noções - sintática e semântica - efetivamente coincidem. Mas mesmo neste caso, a coincidência extensional não bastaria para identificar as duas noções, pois os conceitos em termos dos quais caracterizamos (via condições de adequação) a conseqüência lógica não são em geral expressáveis no nível da sintaxe. Além disso, podemos expandir a abrangência do conceito para abarcar teorias em que não dispomos de uma prova de completude (esta mesma uma meta-propriedade) e mesmo lógicas alternativas à clássica (como veremos ao apresentar a perspectiva de Epstein).

As noções mencionadas de modelo, satisfação e verdade (e portanto, a de conseqüência lógica ela mesma) podem ser apresentadas nos termos mais modernos da Teoria de Modelos (v. [13]). Consideraremos aqui tais conceitos definidos para linguagens de primeira ordem, para as quais a Teoria de Modelos de orientação tarskiana se tornou padrão e é vista como nitidamente adequada. Nossa apresentação dos conceitos da Teoria de Modelos tem dupla função: ilustrar a aplicação atual da semântica tarskiana e introduzir os conceitos e definições que usaremos na seção 1.4.

1.2.1 Linguagens de primeira ordem

Primeiro é preciso considerar o que se tem geralmente em mente quando se fala em 'linguagens de primeira ordem'. Estas são vistas como determinadas por *assinaturas de primeira ordem.* Uma assinatura Σ é uma tripla $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ tal que:

- $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que os elementos de $\mathcal{P}_n$ são *símbolos de predicados* n-ários; eventualmente $\mathcal{P}_n = \emptyset$;

- $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que os elementos de $\mathcal{F}_n$ são *símbolos de funções* n-ários; eventualmente $\mathcal{F}_n = \emptyset$;

- $\mathcal{C}$ é um conjunto de *constantes*; eventualmente $\mathcal{C} = \emptyset$.

Dizemos que uma assinatura $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ *está contida* em uma assinatura $\Sigma' = \langle \mathcal{P}', \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle$ se $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, e escreveremos $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

A *linguagem obtida de* Σ é a sêxtupla

$$L(\Sigma) = \langle \Sigma, \mathcal{V}, \neg, \wedge, \forall, \approx \rangle,$$

sendo $\mathcal{V} = \{v_n : n \in N\}$ um conjunto de *variáveis individuais*, $\wedge$ (conjunção) e $\neg$ (negação) *conectivos*, $\forall$ o *quantificador universal* e $\approx$ o *símbolo de igualdade*.

Observe-se que estamos considerando como parte integrante essencial de uma linguagem de primeira ordem uma seleção de *símbolos lógicos* fixos, i.e., estamos trabalhando com uma escolha definida de *constantes lógicas*. Perceba-se que escolhemos deliberadamente apenas dois conectivos e um quantificador, em vista de que os demais (os conectivos de disjunção, implicação, bicondicional e o quantificador existencial) podem ser definidos a partir deles.

Definimos, então, recursivamente, o conjunto $TER(\Sigma)$ dos *termos* de $L(\Sigma)$, da seguinte maneira:

1. $\mathcal{V} \cup \mathcal{C} \subseteq TER(\Sigma)$;

2. Se $f \in \mathcal{F}_n$ e $\tau_1, ..., \tau_n \in TER(\Sigma)$, então $f(\tau_1, ..., \tau_n) \in TER(\Sigma)$;

3. Não há em $TER(\Sigma)$ outros objetos além dos definidos pelas cláusulas (1) e (2).

E também por recursão definimos o conjunto $FOR(\Sigma)$ das *fórmulas* de $L(\Sigma)$, como a seguir:

1. Se $P \in \mathcal{P}_n$ e $\tau_1, ..., \tau_n \in TER(\Sigma)$, então $P(\tau_1, ..., \tau_n) \in FOR(\Sigma)$, e se $\tau_1, \tau_2 \in TER(\Sigma)$, então $(\tau_1 \approx \tau_2) \in FOR(\Sigma)$;

2. Se $\varphi, \psi \in FOR(\Sigma)$, então $(\varphi \wedge \psi) \in FOR(\Sigma)$ e $\neg\varphi \in FOR(\Sigma)$;

3. Se $\varphi \in FOR(\Sigma)$ e $x \in \mathcal{V}$, $\forall x(\varphi) \in FOR(\Sigma)$;

4. Não há em $FOR(\Sigma)$ outros objetos além dos definidos pelas cláusulas (1), (2) e (3).

Define-se a *cardinalidade de uma linguagem* $L(\Sigma)$, denotada $\|L(\Sigma)\|$ como a cardinalidade do conjunto:

$$\aleph_0 \uplus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \mathcal{P}_n) \uplus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \mathcal{F}_n) \uplus \mathcal{C}$$

em que '$\uplus$' denota a operação de *união disjunta*. $\|L(\Sigma)\|$ coincide com a cardinalidade do conjunto $FOR(\Sigma)$, de modo que a enumerabilidade de $\|L(\Sigma)\|$ corresponde à 'satisfação' do axioma (0) do esquema tarskiano, o único que se refere diretamente a características da linguagem (além do axioma de estruturalidade, no esquema tarskiano estendido, cuja aplicação, porém, é restrita às linguagens proposicionais). [2]

Uma vez delimitado o conceito de *linguagem de primeira ordem*, podemos chegar ao conceito de *modelo* pela definição de uma *estrutura de primeira ordem* como uma interpretação para uma dada linguagem do dito tipo. Dada $L(\Sigma)$, uma Σ-*estrutura* é dada por uma tupla $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{P}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}} \rangle$ em que A é um conjunto não vazio chamado *domínio de* $\mathcal{A}$ e:

1. $\mathcal{P}^{\mathcal{A}}$ possui, para cada $P \in \mathcal{P}^n$, um subconjunto $P^{\mathcal{A}}$ de A^n $(n \geq 0)$;

2. $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ possui, para cada $f \in \mathcal{F}_n$, uma função $f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$ $(n \geq 0)$;

3. $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ possui, para cada $c \in \mathcal{C}$, um elemento $c^{\mathcal{A}}$ de A.

Dadas duas Σ-estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$, dizemos que $\mathcal{A}$ é *subestrutura* de $\mathcal{A}'$, denotado $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ se:

[2] No caso das linguagens de primeira ordem, um substituto para o axioma de estruturalidade não será necessário se considerarmos as definições dos conceitos básicos da Teoria de Modelos; a assunção destes, ao abandonar a estruturalidade sintática, corresponde, num certo sentido, a passar da perspectiva substitucional de Bolzano à objetual de Tarski.

- $P^{\mathcal{A}} = P^{\mathcal{A}'} \cap A^n$ para todo $P \in \mathcal{P}_n$;

- $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}'}|_{A^n}$ para todo $f \in \mathcal{F}_n$ (logo, $f^{\mathcal{A}'}|_{A^n} : A^n \longrightarrow A$);

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}'}$ para toda $c \in \mathcal{C}$(logo, $c^{\mathcal{A}'} \in A$ para toda $c \in \mathcal{C}$).

Dizemos, nesse caso, que $\mathcal{A}$ é uma *restrição* de $\mathcal{A}'$ a A, e escrevemos $\mathcal{A} = \mathcal{A}'|_A$.

Definimos um *morfismo* entre duas Σ-estruturas $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{P}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}} \rangle$ e $\mathcal{A}' = \langle A', \mathcal{P}^{\mathcal{A}'}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}'}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}'} \rangle$ como uma função $h : A \longrightarrow A'$ tal que:

1. $(a_1, ..., a_n) \in P^{\mathcal{A}}$ implica em $h(a_1, ..., a_n) \in P^{\mathcal{A}'}$ para todo $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ e $P \in \mathcal{P}_n$;

2. $h(f^{\mathcal{A}}(a1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{A}'}(h(a_1), ..., h(a_n))$ para todo $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ e $f \in \mathcal{F}_n$;

3. $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}'}$, para toda $c \in \mathcal{C}$.

Se h é uma bijeção e substituímos "implica em" por "se, e somente se" na cláusula (1) acima, dizemos que h é um *isomorfismo* entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$. Se existe um isomorfismo entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'|_{h(A)}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é *imersível* ou *mergulhável* em $\mathcal{A}'$.

Passemos, então, à definição exata da noção modelo-teorética de *satisfação*. Para tal, consideremos primeiro a noção, definida por recursão, de *valor de um termo* τ em uma seqüência $\overrightarrow{a} = (a_1...a_n)$ em A ($\overrightarrow{a} \in A^n$), dado que o conjunto das variáveis de τ esteja contido no conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$, denotada por $\tau[\overrightarrow{a}]$, pelas seguintes cláusulas:

- τ é $x_i \in \mathcal{V}$; logo $\tau[\overrightarrow{a}] := a_i$;

- τ é $c \in \mathcal{C}$; logo $\tau[\overrightarrow{a}] := c^{\mathcal{A}}$;

- τ é $f(\tau_1, ..., \tau_k)$, com $f \in \mathcal{F}_k$; logo $\tau[\overrightarrow{a}] := f^{\mathcal{A}}(\tau_1[\overrightarrow{a}], ..., \tau_k[\overrightarrow{a}])$.

assumindo $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

E então seja φ uma fórmula com variáveis no conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$, $\mathcal{A}$ uma Σ-estrutura e $\overrightarrow{a} \in A^n$. Define-se a *satisfação de* φ *por* $\overrightarrow{a}$ *em* $\mathcal{A}$, denotado por $\mathcal{A} \vDash \varphi[\overrightarrow{a}]$ de acordo com as seguintes cláusulas:

- Se φ é $(\tau_1 \approx \tau_2)$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[\overrightarrow{a}]$ sse $\tau_1[\overrightarrow{a}] = \tau_2[\overrightarrow{a}]$;

- Se φ é $P(\tau_1, ..., \tau_n)$ atômica, $\mathcal{A} \vDash \varphi[\overrightarrow{a}]$ sse $(\tau_1[\overrightarrow{a}], ..., \tau_n[\overrightarrow{a}]) \in P^{\mathcal{A}}$;

- Se φ é $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[\overrightarrow{a}]$ sse $\mathcal{A} \vDash \psi_1[\overrightarrow{a}]$ e $\mathcal{A} \vDash \psi_2[\overrightarrow{a}]$;

- Se φ é $\neg\psi$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[\overrightarrow{a}]$ sse $\mathcal{A} \nvDash \psi[\overrightarrow{a}]$;

- Se φ é $\forall x(\psi)$ e y a primeira variável que não ocorre na fórmula $(\forall x(\psi))$ e não pertence a $\{x_1, ..., x_n\}$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[\overrightarrow{a}]$ sse $\mathcal{A} \vDash \psi^x_y[a; \overrightarrow{a}]$ para todo $a \in A$.

Um importante resultado da Teoria de Modelos, conhecido como Teorema do Isomorfismo, estabelece que, se $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ é um isomorfismo, então $\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ se, e somente se, $\mathcal{A}' \vDash \varphi[h(a_1), ..., h(a_n)]$, do que segue que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ satisfazem exatamente o mesmo conjunto de fórmulas. Por outro lado, se $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ é *imersão* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ se, e somente se, $\mathcal{A}' \vDash \varphi[h(a_1), ..., h(a_n)]$, diz-se que h é uma *imersão elementar* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}'$. Analogamente, se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ e $\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ se, e somente se, $\mathcal{A}' \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$, $\mathcal{A}$ é dita uma *subestrutura elementar de* $\mathcal{A}'$.

Definimos então a *verdade de uma fórmula* φ *em* $\mathcal{A}$ quando *para toda* $\overrightarrow{a}$ *em* A, $\mathcal{A} \vDash \varphi[\overrightarrow{a}]$. Em particular, se φ é uma *sentença*, ou seja, uma fórmula *sem variáveis livres* (e portanto representa uma asserção), φ é verdadeira quando existe *alguma* seqüência $\overrightarrow{a}$ em A tal que $\mathcal{A} \vDash \varphi[\overrightarrow{a}]$. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{A}$ é *modelo* de φ e, analogamente, se $\mathcal{A}$ é modelo de ψ para toda sentença (ou fórmula) ψ pertencente a um determinado conjunto Γ de sentenças (fórmulas), que $\mathcal{A}$ é modelo de Γ. De fato, para uma sentença, ou bem *todas* as seqüências a satisfazem em uma determinada estrutura, ou bem *nenhuma* o faz. Isso equivale a dizer que uma estrutura provê uma interpretação em que cada sentença da linguagem é efetivamente afirmada ou negada, isto é, dada imediatamente como verdadeira ou falsa. A extensão da propriedade de 'verdadeiro' a fórmulas pode ser concebido como um certo abuso lingüístico, sugerindo o fato de que todas as instanciações de variáveis de uma fórmula 'verdadeira' capazes de torná-la em uma sentença (ou mesmo o seu fecho universal, que igualmente produz uma sentença) originam somente sentenças verdadeiras. É uma noção que se aproxima da concepção tarskiana de *verdade lógica*, se consideramos o caso em que uma fórmula não tem qualquer constante não lógica como o resultado de substituir, em uma sentença, todas as constantes (não lógicas) por variáveis (em cujo caso a fórmula resultante será verdadeira se for satisfeita por todas as seqüências de objetos no domínio da estrutura). No entanto, aqui temos um domínio restrito, e portanto dificilmente identificaríamos verdade *em uma estrutura* com verdade *lógica*, e nem *conseqüência em uma estrutura* com conseqüência lógica. Mas já dispomos de recursos para definir as noções de verdade e conseqüência lógicas. Uma dada sentença (ou fórmula) φ *da linguagem* $L(\Sigma)$ é *lógicamente verdadeira* se, para toda $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}$ é estrutura para $L(\Sigma)$, $\mathcal{A}$ é modelo de φ. E, finalmente, diz-se que φ é *conseqüência lógica* de um conjunto Γ de sentenças (fórmulas) também da linguagem $L(\Sigma)$, se *toda* estrutura $\mathcal{A}$ que é modelo de Γ é também modelo de φ. Ou seja, para toda *interpretação* de φ e Γ, se essa interpretação declara cada sentença (ou fórmula) de Γ verdadeira, então também o deverá declarar φ, de modo que, *pela presente definição de verdade*, não pode acontecer de todas as premissas do argumento considerado serem verdadeiras e a conclusão falsa. Temos então uma perspectiva interpretacional e objetual de formalização da noção de conseqüência lógica. Com efeito, esta pode ser tida como mais fundamental que a de verdade lógica (mas não que a de *verdade* em geral), uma vez que esta última pode ser definida, para uma sentença (ou fórmula) em termos de conseqüência lógica, como seguindo logicamente a sentença (ou fórmula) considerada de *qualquer conjunto de sentenças* (ou fórmulas), e em particular do conjunto vazio. Há alguma mudança desta perspectiva em relação à original de Tarski. Como vimos, Tarski define *modelo* como uma *seqüência* de objetos que satisfaz uma determinada fórmula (construída a partir de uma sentença 'esvaziando-a' de conteúdo). Mas aqui nos remetemos à noção, um pouco mais complexa, de estrutura, dentro da qual estão as seqüências que vão satisfazer as fórmulas designadas. Isso porque a presença, na linguagem, de quantificadores torna necessária a referência aos respectivos *domínios de quantificação* para garantir que possa haver interpretações da linguagem em que esta não faça menção a *todos* os objetos, o que simultaneamente dificultaria para a Teoria de Modelos sua inteligibilidade filosófica e restringiria sua aplicabilidade prática. Vale lembrar que, assim como a noção semântica tarskiana original, a noção de conseqüência lógica da Teoria de Modelos satisfaz os três axiomas básicos da teoria do operador de conseqüência.

1.2.2 Algumas críticas (Etchemendy)

Alguns pretensos problemas da concepção tarskiana de conseqüência lógica (incluindo a modelo-teorética apresentada na última seção) são apontados por Etchemendy [26]. Ele argumenta, por exemplo, que a presença dos domínios de quantificação traz um problema à perspectiva tarskiana, pela exigência do que ele chama '*cross-term restrictions*'. Se consideramos um determinado domínio de quantificação, não podemos interpretar livremente os termos de uma única sentença ou conjunto de sentenças envolvidas numa inferência dentro da sua própria categoria semântica. Só podemos interpretá-los, conjuntamente, em um domínio de quantificação de cada vez. Por exemplo, considerando como domínio de quantificação o conjunto dos seres humanos, a conclusão "Algo é mortal" (possivelmente formalizado como $\exists x(Mx)$, se 'M' representa o predicado 'ser mortal') da asserção "Sócrates é mortal" (Ms, na mesma convenção, com s uma constante denotando o indivíduo Sócrates) é legítima se considerarmos uma estrutura cujo domínio seja o conjunto dos humanos, mas não o será se considerarmos como domínio o conjunto das fuinhas. Na verdade, esta última interpretação sequer é compatível, nos termos da Teoria de Modelos, com a sentença "Sócrates é mortal", a menos que 'Sócrates' denote uma fuinha. Ou seja, não podemos interpretar conjuntamente 'Sócrates' como um homem e o domínio de quantificação como o conjunto das fuinhas, numa mesma linguagem, ainda que ambos (o termo individual e o domínio a que se refere 'algo') sejam em princípio reinterpretáveis, i.e., não representam constantes lógicas. Ora, pode-se dizer que os quantificadores têm uma interpretação fixa, dada pela definição recursiva de satisfação para as fórmulas formadas com eles. Mas não se pode esvaziá-los absolutamente de conteúdo, pois o seu sentido é reinterpretado a cada escolha de um domínio diferente. Essa é a justificativa, aos olhos de Etchemendy, para considerar os quantificadores como termos variáveis e mostrar que a consideração das *cross-term restrictions* está em contradição com a formulação do princípio (F) enunciado por Tarski. Mas há algo de estranho nessa argumentação. O fato de considerarmos que da afirmação "Sócrates é mortal" deduzimos como conseqüência "Algo é mortal" está diretamente vinculado ao fato de considerarmos ambos 'Sócrates' e 'algo' como referentes a objetos de um mesmo tipo, ou, se se quiser, de um mesmo conjunto (ou classe). Essa não é uma exigência particular da perspectiva modelo-teorética, mas, ao que parece, da própria noção informal de conseqüência lógica. Se considerássemos que, a um só tempo, 'Sócrates' pudesse referir-se ao mestre de Platão e 'algo' ao conjunto das fuinhas, não teríamos uma instância legítima do conceito de conseqüência lógica, tal como informalmente o entendemos, assim como não a temos nos termos da teoria de modelos. Isso parece sugerir, ao contrário da conclusão de Etchemendy, que os quantificadores devem ter, de fato, uma interpretação fixa, à maneira dos conectivos lógicos. Por exemplo, o quantificador universal diria que *dado um domínio de objetos*, estamos nos referindo à sua totalidade (ao mudar de modelo, mudamos o domínio de objetos, mas não a interpretação do quantificador). Contudo, como dissemos anteriormente, o próprio Tarski considerava inconclusiva a tarefa de tentar justificar a escolha das constantes lógicas de uma linguagem [57]. Mas não podemos generalizar a partir disso, posto que pode se tratar de uma idiossincrasia do lógico polaco, que outrossim não foi capaz de fornecer uma justificativa clara para a sua escolha implícita de constantes lógicas no exemplo da ω-incompletude. E também já observamos que considerar como variavelmente interpretáveis os símbolos usualmente escolhidos para constantes lógicas gera resultados sobre a verdade e a conseqüência lógicas bastante, se não absolutamente, anti-intuitivos (veremos que para Epstein, por exemplo, uma interpretação fixa dos conectivos e operadores lógicos usuais é essencial para a definição de *lógica*).

O que talvez se possa considerar mais razoavelmente é que mudar o significado dos conectivos lógicos é o mesmo que *mudar de lógica*. E isso está em consonância com certos fatos conhecidos sobre as chamadas *lógicas heterodoxas*. Pode-se dizer, por exemplo, que as lógicas intuicionista e paraconsistente surgem de reinterpretações do sentido de conectivos como a negação e a disjunção (embora mais do que isso esteja envolvido em suas *motivações*).

Por outro lado, a interdefinibilidade dos conectivos e operadores é afetada, impondo a reinterpretação de todos os demais símbolos lógicos. Mas então parece razoável esperar que cada uma das lógicas ora obtidas seja provida de suas *próprias* noções de verdade e conseqüência lógica, e não que haja uma só versão dos atributos lógicos, aplicável a qualquer linguagem, sob qualquer especificação de constantes lógicas. Uma justificativa de uma escolha particular pode ser forjada da seguinte maneira: as constantes lógicas devem ser tais que permitam a caracterização das propriedades lógicas (verdade, conseqüência) como *clássicas* (ou intuicionistas, ou paraconsistentes, ou qualquer alternativa cuja adoção seja desejável).

Mas isso ainda não nos livra de todos os problemas. Não obstante a manuseabilidade formal e o aparente descompromisso ontológico aparecerem como pontos importantes em favor da noção tarskiana, o requisito de formalidade tal como interpretado por Tarski pede, como já indicamos, por uma interpretação objetual dos termos logicamente variáveis. Isto motiva Etchemendy [26] a interpretar a afirmação da *verdade lógica* de uma sentença, na perspectiva tarskiana, como o fecho universal sobre a fórmula derivada pelo 'esvaziamento' da mesma, de domínio de quantificação igual à classe de *todos os objetos* (das respectivas categorias semânticas dos termos de interpretação variável escolhidos como tais, de maneira a preservar gramaticalidade). Mas deste modo, a determinação da verdade lógica de uma sentença seria influenciada por fortes pressuposições de natureza ontológica. Vimos claramente, nas definições dos conceitos básicos da Teoria de Modelos acima, que um vocabulário conjuntista é sobejamente utilizado, e Etchemendy argumenta que a exclusão de certas sentenças da classe de verdades lógicas de acordo com a perspectiva modelo-teorética é dependente de certos 'fatos' conjuntistas, como a validade do axioma do infinito (embora o seu argumento se baseie numa interpretação de modelos como seqüências de objetos, como na definição tarskiana original). De qualquer forma, a semântica tarskiana de modo amplo, mesmo a realizada no *framework* da Teoria de Modelos parece se comprometer com fatos substanciais da Teoria de Conjuntos para manter sua coerência e a inteligibilidade de certos resultados, como a co-extensividade entre a classe das verdades lógicas da lógica de primeira ordem e a classe das verdades demonstráveis - ou seja, a completude. Além disso, a posição de Tarski, como se viu, requer (de acordo com Etchemendy) a assunção de uma semântica *interpretacional* ao invés de uma semântica representacional, o que já motiva o crítico a denunciar a sua ausência de apelo intuitivo. Ademais, a perspectiva tarskiana torna dúbia a definição de uma noção de conseqüência lógica para teorias como a lógica de segunda ordem (e mesmo a aritmética formal, como vimos, apesar das declarações do próprio Tarski sobre a derivação de (A) a partir de $((A_0), (A_1), ..., (A_n), ...)$), quando parece razoável supor que as sentenças de qualquer teoria disponham do seu próprio conjunto legítimo de conseqüências lógicas. Para Etchemendy, mesmo a adequação *meramente extensional* entre a noção intuitiva de conseqüência e a noção de conseqüência *para qualquer sistema que não disponha de uma prova de completude* é incerta, tornando supérfluos os esforços de Tarski de oferecer um conceito formal de conseqüência distinto do sintático (os detalhes da argumentação não apresentaremos aqui).

Entretanto, o próprio Etchemendy reconhece a utilidade da Teoria de Modelos para o estudo de estruturas algébricas (poderíamos acrescentar, 'algébrico-relacionais') e para o "entendimento das noções e técnicas da álgebra abstrata" [26]. Dada uma linguagem comum a uma classe de estruturas, determinamos uma classe de axiomas que expressam propriedades das álgebras que queremos estudar, e temos as próprias álgebras definidas como as estruturas dessa linguagem que satisfazem esses axiomas. A Lógica Universal de Béziau [1] é uma expressão dessa visão estruturalista da Lógica. O próprio Béziau, como vimos, sugeria que uma forma de entender a teoria tarskiana do operador de conseqüência poderia ser dada mediante o recurso aos conceitos da Teoria de Modelos. Uma empreitada dessa natureza é o tema da seção 1.4, em que se representam lógicas (proposicionais, em apresentação sintática) como estruturas (bissortidas) de primeira ordem. Como veremos, *nenhuma* condição é imposta sobre a relação de conseqüência, e portanto podemos representar uma multiplicidade de sistemas lógicos.

Levaremos em conta antes a proposta de Epstein [25] do que consideramos uma perspectiva tarskiana (semântica) *geral* sobre sistemas lógicos, fornecendo certas justificativas para a escolha de constantes lógicas (e suas respectivas interpretações) e para a utilização de ferramentas da teoria de conjuntos, além de proporcionar um certo método para a variação da interpretação dos conectivos lógicos (através de uma mudança *de lógica*).

1.2.3 Lógicas de Epstein

Para Epstein, o raciocínio com conceitos como o de conjunção e implicação é uma parte fundamental da própria noção de *lógica*, tanto quanto o é uma concepção de conseqüência lógica. Os conceitos de conjunção e implicação estão implícitos na própria definição de conseqüência lógica como a vimos. No sentido clássico, para um conjunto $K \cup \{X\}$ *finito* de sentenças (ou proposições ou fórmulas), dizer que X é conseqüência lógica de K é o mesmo que afirmar a validade da implicação $Z_1 \wedge ... \wedge Z_n \rightarrow X$, onde $Z_1, ..., Z_n$ são os elementos de K (constatação correspondente ao Teorema da Dedução). Para K infinito, a intuição é a mesma, embora não se possa efetivamente considerar a implicação como uma sentença, dada a restrição referente ao comprimento (essencialmente finito) dos objetos que reconhecemos como sentenças. Isso parece se relacionar intimamente com a nossa noção intuitiva [3] do conceito de conseqüência lógica. Intuições (ou concordâncias) similares justificariam a adoção de conceitos comuns de proposição e formalidade. A utilização de conceitos tomados de empréstimo à Teoria de Conjuntos ou outras teorias matemáticas para o estudo de sistemas lógicos se justificaria pelo fato de não haver fronteiras definidas entre lógica e matemática, uma vez que tanto a lógica é empregada em demonstrações matemáticas quanto é necessário o emprego de matemática na lógica para torná-la útil (para a própria matemática, por exemplo, assim como para outras ciências). Tanto quanto a lógica organiza e auxilia nossas intuições sobre a matemática, certas construções matemáticas podem nos auxiliar na compreensão de certas propriedades da(s) lógica(s).

Partindo dessas assunções gerais, entretanto, pode haver motivos para interpretar de mais de uma forma as chamadas constantes lógicas. Contudo, as reinterpretações não originam somente modelos diferentes determinantes de uma única noção de conseqüência, mas indicam uma *mudança de perspectiva* em relação à concepção de lógica (Quine [49] diria "uma mudança de assunto"). Em outras palavras, mudar a interpretação dos conectivos, como mencionamos, equivale a mudar de lógica. Outros conectivos ou operadores podem ser admitidos na linguagem, outras interações entre os conceitos assumidas, mas *alguma* interpretação dos conectivos lógicos tradicionais é pressuposta para uma lógica. Há uma justificativa, argumenta Epstein, para privilegiar, de certa maneira, a lógica clássica, e tomá-la como ponto de partida. A lógica clássica é o sistema mais simples obtido a partir de certas considerações gerais (na visão de Epstein) sobre o que é lógica. Por exemplo, é a única lógica onde a definição tarskiana de conseqüência lógica se vê satisfeita de forma irrestrita e imediatamente identificável (de acordo com noção de necessidade lógica como um tipo de analiticidade). É uma lógica de semântica simples, facilmente caracterizável a partir de tabelas de verdade, e em que uma axiomatização simples origina uma relação de conseqüência sintática equivalente à relação de conseqüência semântica. Além disso, as valorações das suas fórmulas são imediatamente definíveis a partir

[3]Epstein diria "concordância" (*agreement*) implícita.

de funções de verdade (de simples intuição). Portanto, partindo de uma perspectiva tarskiana e por meio de considerações sobre simplicidade (e talvez generalidade e eficácia), estabelecemos a lógica (proposicional) clássica como o nosso ponto de origem. Não trataremos aqui das lógicas de predicados, mas segundo o próprio Epstein, estas não gozam da universalidade de suas correlatas proposicionais, uma vez que, ao considerar os aspectos das proposições que determinam uma lógica, compromete-se com a assunção de que o mundo é composto de *coisas* (não de *processos*, por exemplo), que determinam os universos de quantificação[4]. Neste ponto, Epstein se aproxima das críticas de Etchemendy, que ataca a Teoria de Modelos tarskiana pelos seus compromissos ontológicos. No entanto, Epstein não chega ao extremo de afirmar que a noção de conseqüência lógica é inadequada, justamente porque está disposto a admitir a existência de uma *multiplicidade* de sistemas lógicos e, conseqüentemente, de noções de conseqüência lógica associadas. A definição de conseqüência lógica semântica (geral) de Epstein é a mesma de Tarski, mas os seus modelos são peculiares, uma vez que admitem a atribuição de conteúdo, além dos valores de verdade das partes, como determinante do valor de verdade das proposições.

Partindo da lógica proposicional clássica, como chegar a sistemas lógicos alternativos (ou complementares, conforme a célebre distinção de Susan Haack [40])? Primeiro temos que definir o que queremos dizer por "partindo da lógica proposicional clássica" (segundo a visão de Epstein). A semântica da lógica clássica (é por certas semânticas dos sistemas que Epstein os caracteriza) não precisa lidar com outros conceitos além dos valores de verdade e da forma das proposições. Epstein confere a essa assunção o nome de "Abstração Clássica", e sua efetividade (e regularidade) é garantida, para proposições complexas, pela chamada "Assunção Fregeana", baseada na concepção fregeana de função proposicional (considerando a referência de uma proposição como 'o verdadeiro' ou 'o falso'): O valor de verdade de uma proposição complexa é determinado por sua forma e pelas propriedades (semânticas) de seus componentes. Na lógica clássica, claro, essas propriedades resumem-se aos valores de verdade (verdadeiro e falso). Para garantir que nada de estranho a nossas assunções possa aparecer no decurso de um raciocínio (ao usarmos para isso a lógica), quando partimos para proposições progressivamente mais complexas, Epstein recorre ao que chama a "Consideração de Extensionalidade" que afirma que, se duas

[4]Perceba-se que o mesmo não ocorre com as lógicas proposicionais, que, mesmo definidas em termos conjuntistas, não se comprometem *elas mesmas* com quaisquer suposições acerca do mundo, embora dependam, como veremos, de quais aspectos da nossa visão de mundo gostaríamos de enfocar.

proposições possuem as mesmas propriedades semânticas, então elas são indistinguíveis em virtude de suas formas em qualquer análise semântica. Isso quer dizer que o valor de verdade de uma proposição complexa dependerá unicamente das suas componentes imediatas (aceita a Assunção Fregeana) e que proposições semanticamente equivalentes podem ser substituídas entre si em uma construção de proposição complexa por meio de um conectivo ou operador, sem induzir qualquer diferença na análise *semântica* (embora isso não necessariamente valide, na lógica em consideração, uma regra sintática de substituição). O conjunto dessas assunções nos provêem de uma versão do princípio de *estruturalidade*, que já apresentamos no contexto da teoria do operador de conseqüência, embora apenas uma estruturalidade semântica, e portanto metateórica. De fato, Epstein mostra que, em algumas lógicas, não há uma caracterização sintática da equivalência semântica de duas proposições (o que não é de surpreender em lógicas incompletas).

O princípio de Abstração Clássica pode ser generalizado para abranger o espectro de lógicas alternativas. Para tanto, admite-se um terceiro elemento, ao lado da forma e dos valores de verdade (estes permanecendo sempre restritos aos dois já consagrados): um certo *conteúdo* das proposições, relevante para o contexto a que a lógica se adequa. Para Epstein, o tipo de interpretação que damos aos símbolos lógicos e a lógica que adotamos para lhes dar conta depende do(s) aspecto(s) das proposições que queremos levar em consideração. A lógica clássica tem um escopo vasto e uma caracterização semântica simples (além de uma *neutralidade tópica*, como aponta Quine [49], que a torna argumentavelmente recomendável como teoria geral do raciocínio, de acordo com os moldes tradicionais que remetem a Aristóteles), mas apesar disso falha em representar tipos de inferência que fazemos nos mais variados contextos, dos mais simples aos mais elaborados. Precisamos então, em cada um desses contextos, suplementar a lógica clássica com a referência explícita aos conteúdos relacionados. A idéia da apresentação semântica geral para lógicas proposicionais de Epstein se baseia na sua concepção de que os princípios não clássicos *restringem* a aplicação dos princípios clássicos na análise semântica aos casos em que alguma relação determinada entre os conteúdos das proposições ou propriedade determinada do conteúdo de uma proposição são verificadas. A própria lógica clássica pode então aparecer como o caso particular em que as dadas relações e propriedades são *universais*, o que equivale, na prática, a eliminar as ditas restrições. Alguns dos aspectos de proposições que podem importar para uma lógica, segundo Epstein, são: o seu assunto, os possíveis modos em que poderiam ser verdadeiras e o seu conteúdo matemático construtivo. No primeiro caso, poderíamos tratá-las por meio de uma lógica da relevância ou do relacionamento (*relatedness*), que ele propõe. No segundo, por uma lógica modal. No terceiro, por uma lógica intuicionista. A idéia é generalizar o princípio para todo o espectro de lógicas não clássicas ou uma parcela significativamente vasta delas. Em certo sentido, poder-se-ia dizer que se trata de uma delimitação do próprio conceito de lógica, que excluiria certos sistemas comumente apresentados como lógicas de seu escopo. Como veremos, a definição geral de conseqüência lógica oferecida por Epstein satisfaz os axiomas tarskianos, de maneira que, por exemplo, as chamadas lógicas não monotônicas ficariam de fora.

Podemos empregar aqui (adaptando a apresentação original de Epstein) a mesma noção de linguagem gerada por assinatura $L(C)$ que já definimos, com a restrição de que $|C|$ é finito e a possível restrição de que $\{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\} \subseteq |C|$ ($\bot \in C_0, \neg \in C_1$ e $\wedge, \vee, \rightarrow \in C_2$). Dado um conectivo $c \in C_r$, definimos sua *função de verdade* como

$$f_c : \{T, F\}^r \longrightarrow \{T, F\}$$

onde $\{T, F\}$ é o conjunto de *valores de verdade*. As funções de verdade para os conectivos $\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ são dadas pelas suas tabelas de verdade para a lógica proposicional clássica.

Um *modelo de atribuição de conjuntos* para $L(C)$ com respeito a funções de verdade do conjunto $\{f_c : c \in |C|\}$ é dado por:

$$\mathcal{M} = \langle \mathrm{v}, \mathrm{s}, \mathrm{S}, \{\mathrm{R}_c : c \in |C|\} \rangle$$

onde:

- v é uma *valoração*, $\mathrm{v} : \mathcal{V} \longrightarrow \{T, F\}$;
- S é um conjunto (de *conteúdos*);
- $\mathrm{s} : L(C) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{S})$ é uma *atribuição*;

- $\mathrm{R}_c \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{S}^r)$ é a relação que governa a tabela de verdade de $c \in C_r$.

A valoração v é extensível indutivamente para todas as fórmulas de $L(C)$ da seguinte maneira (dado $c \in C_r$):

$$\mathrm{v}(c(\varphi_1, ..., \varphi_r)) = T \text{ sse } \mathrm{R}_c(\mathrm{s}(\varphi_1), ..., \mathrm{s}(\varphi_r)) \text{ e } f_c(\mathrm{v}(\varphi_1), ..., \mathrm{v}(\varphi_r)) = T$$

Se em todo modelo a relação R_c é a relação *universal* (ou seja, $\mathrm{R}_c(\mathrm{s}(\varphi_1), ...,$- $\mathrm{s}(\varphi_r))$ vale para toda seqüência $(\varphi_1, ..., \varphi_r) \in (L(C))^r)$, dizemos que c é *vero-funcional*, e se $\perp, \neg, \wedge, \vee$ ou $\rightarrow$ for vero-funcional, dizemos se tratar de um *conectivo clássico.*

Escrevemos $\mathcal{M} \models \varphi$ se $\mathrm{v}(\varphi) = T$ e $\mathcal{M} \models \Gamma$ se, para todo $\psi \in \Gamma$, $\mathrm{v}(\psi) = T$.

Uma *estrutura semântica de atribuição de conjuntos* para $L(C)$ é uma escolha de uma família de funções $\{f_c : c \in |C|\}$ para os conectivos da assinatura geradora da linguagem e uma coleção de modelos para ela com respeito às funções escolhidas. Denota-se uma estrutura desse tipo por $\mathbb{M}$.

Dada uma estrutura semântica $\mathbb{M}$ para $L(C)$, a classe de *tautologias com respeito a* $\mathbb{M}$ é o conjunto $\{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi$, para todo $\mathcal{M} \in \mathbb{M}\}$ e a *relação de conseqüência com respeito a* $\mathbb{M}$ é a relação $\models_{\mathbb{M}} \subseteq \mathcal{P}(L(C)) \times L(C)$ dada por: $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \varphi$ sse, para todo $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$, se $\mathcal{M} \models \Gamma$, então $\mathcal{M} \models \varphi$.

Se assumirmos certas propriedades semânticas gerais como definidoras do conceito de lógica, estaremos impondo certas restrições conceituais importantes sobre o que deve ser considerado uma lógica. Distanciamo-nos, aqui, da perspectiva tarskiana inicial, dado que estamos fornecendo uma justificativa crítica para a aceitação de certos critérios definidores da noção de lógica (ao invés de simplesmente abstrair certas propriedades gerais de sistemas ou estruturas conhecidas), o que aproxima, evidentemente, a presente abordagem do segundo momento da reflexão tarskiana apontado no início do trabalho. Mas talvez mais importante para o nosso trabalho seja a observação de que a abordagem de Epstein se distancia da abordagem estruturalista da Lógica Universal de Béziau, embora ambas apresentem pontos importantes em comum.

1.2.4 Semântica $\times$ estrutura

Em sua tese de doutorado, *Recherches sur la Logique Universelle* [1], Béziau apresenta a lógica universal como um arcabouço para a definição de lógicas como estruturas relacionais, sem imposições adicionais. Em seguida, agrupa as estruturas restritas por algumas condições (como a normalidade) e prova resultados gerais sobre estas (por exemplo: são caracterizáveis por semânticas bivalentes). Para Epstein, uma lógica não é definida como uma estrutura que satisfaz um conjunto de axiomas ou restrições formais, mas antes é definida como um expediente para representar certas intuições sobre como se devem dar o raciocínio e a derivação de resultados em dados contextos quando decidimos levar em conta um determinado aspecto das proposições e determinadas relações entre elas mediadas por esse aspecto. Assumidas certas concordâncias nesse ponto (dentre elas um vocabulário lógico comum, porém estendível, e uma noção comum de composicionalidade baseada nele), verificamos algumas condições que devem ser satisfeitas por tudo que deva ser considerado uma lógica. Então determinamos uma semântica (bivalente) de acordo com um molde geral, e a partir das considerações sobre essa semântica, e só então, definimos um sistema axiomático que aproxime o máximo possível as derivações sintáticas da conseqüência semântica. Há, portanto, fortes restrições para admitir uma relação como conseqüência lógica, as semânticas são bivalentes *por definição* e a normalidade (que equivale à conjunção dos axiomas de Tarski) aparece como propriedade comum à conseqüência sintática e semântica em todas as lógicas. Mas ambas as teorias admitem uma multiplicidade de lógicas e permitem o estabelecimento de uma forma de morfismos entre elas. As lógicas de Epstein (ou pelo menos a relação de conseqüência de cada uma delas) podem ser vistas como casos particulares das lógicas de Béziau (assumidas certas restrições), assim como o fecho de um conjunto de sentenças sob conseqüência semântica do segundo momento da reflexão tarskiana resulta em sistemas de conseqüência que satisfazem os axiomas da teoria do operador de conseqüência. Em certo sentido, a Lógica Universal de Béziau é herdeira da perspectiva sintaticista e abstrativa de Tarski e a generaliza, enquanto a teoria de lógicas de Epstein é herdeira da perspectiva semântica e crítica de Tarski e a generaliza. Um problema interessante pode ser a tentativa de relacionar as duas abordagens, investigando qual a extensão de lógicas abstratas da perspectiva de Béziau consiste de lógicas abstratas *admissíveis* pela apresentação de Epstein (consideradas como estruturas) e que propriedades estas compartilhariam na Lógica Universal.

As duas visões propõem visões diferentes sobre a natureza da(s) lógica(s), mas ambas justificam uma posição *pluralista* sobre a Lógica, i.e., não há uma lógica única, mas uma pluralidade delas, determinadas seja pela aplicação a uma esfera da realidade (Epstein), seja pela restrição por meio de axiomas ou princípios (Béziau). Uma e outra, portanto, provêem-nos com o material apropriado para considerarmos a empresa combinatória que orienta o nosso trabalho. No entanto, as particularidades de cada um apontam para uma direção diferente. As lógicas de Epstein formam um domínio bem mais restrito, com linguagem definida e (no mínimo parcialmente) compartilhada. Além disso, Epstein define suas lógicas a partir de fortes assunções sobre o significado atribuído aos símbolos lógicos, e desenvolve a partir disso uma noção de tradução entre lógicas que permite um refinamento considerável das elaborações sobre preservação de propriedades. A Lógica Universal admite muito maior liberdade no aparelhamento conceitual, mas por isso mesmo não nos equipa desde já com um mecanismo de preservação que alcance além da relação de derivabilidade (ou conseqüência de modo mais amplo). Veremos que a representação de lógicas abstratas na Teoria de Modelos que apresentaremos nos dá uma noção de morfismo entre lógicas com bons rendimentos e profícua para a solução de problemas específicos da combinação entre lógicas, como o anti-colapso da fibrilação (*fibring*), possivelmente mediante refinamentos. Mas nesse mesmo caso, estamos nos limitando à apresentação sintática de lógicas proposicionais. Quando preservamos, em uma tradução, a relação de derivabilidade, estamos preservando uma "boa" noção de conseqüência lógica? E se não lidamos com sistemas completos (ou se estamos combinando um sistema completo com um incompleto)? Há as apresentações de lógicas como *sistemas de interpretação*, que consideram suas características semânticas, e as apresentações híbridas, dos assim chamados "sistemas de lógica" (*logic systems* - v. [9]), em que se relacionam as noções sintática e semântica. Há alguma dessas apresentações que devemos priorizar para definir combinações entre lógicas? Que propriedades podemos representar em cada uma dessas apresentações, e quais podem ser preservadas efetivamente em uma lógica combinada? São questões que, no geral, deixaremos em aberto, uma vez que investigaremos em maior detalhe, doravante, somente métodos que envolvem uma apresentação sintática. Ademais podemos também nos questionar se noção de conseqüência, sintática ou semântica, é suficiente para a definição de um sistema lógico. Já vimos que, para Epstein, esse é o caso. No entanto, exigências muito fortes são feitas para qualificar um determinado sistema como lógica, e a caracterização desses sistemas envolve conceitos demasiado complexos para a adoção de uma postura estruturalista, que tem sido o padrão nas considerações sobre as combinações entre lógicas. Lógicas seriam, então, mais do que meras estruturas matemáticas, como poderia sugerir um enfoque bourbakiano. Isso dificultaria a abordagem categorial dos sistemas lógicos, que está na base da principal técnica de combinação conhecida, a fibrilação algébrica. Além disso (e pelo mesmo motivo), os requisitos da definição epsteiniana de lógica tornam inviável o emprego dos recursos da Teoria de Modelos para tratar das questões de representação, tradução e combinação entre lógicas, como enfocaremos a partir da seção 1.4. A seguir, veremos apresentações de lógicas como sistemas de conseqüências múltiplas e sistemas de seqüentes. São ambas ampliações da noção de lógicas como sistemas de conseqüência, enquadradas dentro de uma visão estruturalista, em que mais do que a mera relação de conseqüência é tomado como essencial.

1.3 Lógicas como sistemas de conseqüências múltiplas

Uma alternativa para a representação de sistemas lógicos às apresentadas requer uma concepção diferente de conseqüência lógica, contrapondo, a cada conjunto de fórmulas de uma linguagem (tomadas conjuntamente) um conjunto de fórmulas da mesma linguagem que segue dele (disjuntamente). Isso é feito, contudo, de forma sensivelmente distinta do que foi apresentado em casos anteriores, através das noções de *asserção* e *asserção geral*. Neste caso, as "unidades de sentido" não são fórmulas e conjuntos de fórmulas, mas afirmações sobre derivabilidade ou conseqüência de conjuntos de fórmulas disjuntas a partir de conjuntos de fórmulas conjuntas. Sistemas de conseqüência única ou singular (que seguem a intuição de uma fórmula, a conclusão, ser conseqüência de um conjunto de outras, as premissas), aparecem como o caso particular em que a cardinalidade do conjunto de conseqüências (disjuntas) é no máximo igual a 1 (i.e., pode haver uma fórmula ou nenhuma fórmula - mas nunca uma variável para conjunto de fórmulas [5]. Uma generalização dos sistemas de conseqüência múltipla consiste na apresentação de lógicas como *sistemas de seqüentes*, na qual não vale em geral a comutatividade de fórmulas entre as premissas e entre as conclusões, que são apresentadas como seqüências ou concatenações específicas das fórmulas em questão. Tal generalização se justifica se quisermos dar conta, em nossa

[5] O caso em que não há nenhuma fórmula indica normalmente (quando há alguma regra para explicitá-lo) que a asserção em apreço deriva todas as asserções formadas pelo acréscimo de uma fórmula - qualquer que seja ela - ao espaço vazio. Ver a seguir a definição de derivação e os exemplos das lógicas da conjunção e da disjunção clássicas.

apresentação, de lógicas subestruturais como a lógica linear. Em ambos os casos, as regras (normalmente dadas como as regras usuais de seqüentes) nos mostram não mais como passar de fórmulas a outras fórmulas, mas de asserções a outras asserções. Veremos mais adiante que a preservação de tais regras em oposição à preservação, por exemplo, das regras de inferência de sistemas de Hilbert, por meio de morfismos apropriados, fornece uma abordagem de notável utilidade para o tratamento do problema do *anti-colapso da fibrilação*. Limitar-nos-emos, em nosso trabalho, ao caso dos sistemas de conseqüências múltiplas, uma vez que não trataremos especificamente de lógicas subestruturais. No entanto, as definições, para os sistemas de seqüentes, dos conceitos correlatos àqueles relativos aos sistemas de conseqüências múltiplas, são bastante similares. Notamos também que, como os seqüentes generalizam os sistemas de conseqüências múltiplas, o que se 'modela' em termos destes pode ser expresso de forma equivalente nos termos daqueles. Baseamo-nos, aqui, em [18].

Para definir formalmente as noções de asserção geral e asserção (nos sistemas de conseqüências múltiplas), usaremos a mesma definição de assinatura proposicional empregada anteriormente. No entanto, empregaremos, além do conjunto $\mathcal{V}$ de variáveis proposicionais, um conjunto enumerável $\mathcal{X}$ de variáveis para conjuntos de fórmulas, que chamaremos simplesmente conjunto das *variáveis*. Dada uma assinatura $C = \{C^i : i \in \mathbb{N}\}$, temos, para todo i em $\mathbb{N}$, que $\mathcal{X} \cap \mathcal{V} = (\mathcal{X} \cup \mathcal{V}) \cap C^i = \emptyset$. A álgebra de tipo C livremente gerada por $\mathcal{V}$ é denotada por $L(C)$ e seus membros são *fórmulas*. Assim, uma *asserção geral* sobre uma assinatura C é uma expressão $\langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle$, onde Γ, Δ são subconjuntos finitos de $L(C)$ e A, B subconjuntos finitos de $\mathcal{X}$, tais que $\Gamma \cup \Delta \cup A \cup B \neq \emptyset$. Uma *asserção* sobre C é uma asserção geral saturada, ou seja, em que $A = B = \emptyset$, não havendo, portanto, variáveis para conjuntos de fórmulas, mas somente fórmulas especificadas. Denotamos uma asserção simplesmente $\langle \Gamma | \Delta \rangle$. Usamos também a notação alternativa $A; \Gamma \succ \Delta; B$ para asserções gerais do tipo apresentado e $\Gamma \succ \Delta$ para as asserções. Comumente usamos Γ, Γ' e Γ, φ nos lugares respectivos de $\Gamma \cup \Gamma'$ e $\Gamma \cup \{\varphi\}$, assim como X, Y no lugar de $\{X, Y\}$ e X no lugar de $\{X\}$. Chamamos o conjunto das asserções gerais sobre uma assinatura C, $GenA(C)$, enquanto o conjunto de asserções sobre a mesma é denotado $Asse(C)$.

Usamos aqui, como antes, a noção de uma substituição como uma função $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow L(C)$ extensível a um único homomorfismo $\hat{\sigma} : L(C) \longrightarrow L(C)$ da maneira usual. Temos, adicionalmente, a noção de *instanciação* para variáveis do conjunto $\mathcal{X}$. Uma instanciação $\xi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}_F(L(C)) \cup \mathcal{X}$, onde $\mathcal{P}_F$ é o conjunto de subconjuntos *finitos* de $L(C)$. Se $\xi(X) \in \mathcal{P}_F(L(C))$ para todo $X \in \mathcal{X}$ (ou seja, se toda instanciação for uma fórmula concreta, e não mais alguma variável), então a instanciação ξ sobre C é dita *básica*. A noção correlata, para sistemas de conseqüências múltiplas, da noção de *instância* definida para sistemas de Hilbert, é uma função (σ, ξ) : $GenA(C) \longrightarrow GenA(C)$ que corresponde à aplicação simultânea das dadas substituição e instanciação (σ e ξ, respectivamente). Assim, dada uma asserção $\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle$, dividimos os elementos do conjunto A em dois conjuntos: $A' = \{X \in A : \xi(X) \in \mathcal{X}\}$ e $A'' = A \setminus A'$; e com os do conjunto B, similarmente: $B' = \{X \in B : \xi(X) \in \mathcal{X}\}$ e $B'' = B \setminus B'$. Temos, então:

$$(\sigma, \xi)\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle = \langle \xi(A'); (\textstyle\bigcup_{X \in A''} \xi(X)), \hat{\sigma}(\Gamma)|\hat{\sigma}(\Delta), (\bigcup_{Y \in B''} \xi(Y)); \xi(B')\rangle,$$

sendo, portanto, uma asserção geral.

Podemos, dadas substituições σ, σ' e instanciações ξ, ξ', definir a função composta $(\sigma, \xi) \circ (\sigma', \xi') = (\sigma \cdot \sigma', \xi \cdot \xi')$ de tal modo que $\sigma \cdot \sigma'$ é a substituição sobre C tal que $\sigma \cdot \sigma'(p) = \hat{\sigma}(\sigma'(p))$ e $\xi \cdot \xi'$ a instanciação sobre C tal que $\xi \cdot \xi'(X) = \xi(\xi'(X))$ se $\xi'(X) \in \mathcal{X}$ e $\xi \cdot \xi'(X) = \hat{\sigma}(\xi(X))$ caso contrário.

Definimos, então, sobre uma assinatura C, a noção de *regra de asserção*, como um par $r = \langle \Upsilon, \langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle\rangle$ em que $\Upsilon \cup \{\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle\}$ é um subconjunto finito de $GenA(C)$, sendo as regras em que $\Upsilon = \emptyset$ chamadas *axiomas*. Em uma tal regra, os elementos do conjunto Υ são chamados *premissas* e a asserção geral $\langle A; \Gamma|\Delta; B\rangle$ é chamada *conclusão*. Tais denominações são as mesmas que aquelas usadas no contexto da conseqüência lógica como apresentada anteriormente (relacionando os elementos à esquerda e à direita do símbolo de conseqüência), já que temos em operação uma concepção de *argumento*, mas nos situamos aqui em um nível lingüístico superior. Naquele caso, tínhamos relacionadas fórmulas e conjuntos de fórmulas da linguagem, enquanto aqui temos relacionadas *asserções sobre as fórmulas da linguagem*, o que nos põe executando argumentos em um nível *meta*, diferentemente do que ocorre, por exemplo, com as regras de inferência dos sistemas de Hilbert. Descrevemos também uma regra de asserção r como tendo a forma $\langle prem(r), conc(r)\rangle$, onde $prem(r)$ e $conc(r)$ são respectivamente o seu conjunto de premissas e o seu conjunto de conclusões. Definimos então um sistema de conclusões múltiplas ou um *cálculo de asserções* $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$, onde C é uma assinatura proposicional e R um conjunto de regras de asserção.

As regras de asserção (incluindo axiomas), a exemplo do que ocorre com as regras de inferência dos cálculos (sistemas) de Hilbert, determinam uma noção de *derivabilidade* definida como a seguir. Sendo $\mathcal{A} = \langle C, R\rangle$ um cálculo de asserções, $\Omega = \{\langle A_1; \Gamma_1|\Delta_1; B_1\rangle ... \langle A_n; \Gamma_n|\Delta_n; B_n\rangle\}$ um conjunto de asserções gerais sobre C , dizemos que uma asserção geral (também sobre C), $A; \Gamma \succ \Delta; B$ é *derivável* em $\mathcal{A}$ de Ω, denotado por:

$$\frac{A_1; \Gamma_1 \succ \Delta_1; B_1, ..., A_n; \Gamma_n \succ \Delta_n; B_n}{A; \Gamma \succ \Delta; B}$$

quando há uma seqüência finita

$\langle \overline{A_1}; \overline{\Gamma_1} | \overline{\Delta_1}; \overline{B_1} \rangle ... \langle \overline{A_n}; \overline{\Gamma_n} | \overline{\Delta_n}; \overline{B_n} \rangle$

tal que $\langle A_n; \Gamma_n | \Delta_n; B_n \rangle = \langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle$ e, para cada i inteiro entre 1 e n, $\langle \overline{A_i}; \overline{\Gamma_i} | \overline{\Delta_i}; \overline{B_i} \rangle \in \Omega$ ou há uma regra $r \in R$, uma substituição σ e uma instanciação ξ sobre C tais que:

- $(\sigma, \xi)(prem(r)) \subseteq \{\langle \overline{A_1}; \overline{\Gamma_1} | \overline{Delta_1}; \overline{B_1} \rangle ... \langle \overline{A_{i-1}}; \overline{\Gamma_{i-1}} | \overline{\Delta_{i-1}}; \overline{B_{i-1}} \rangle\}$ e
- $\langle \overline{A_i}; \overline{\Gamma_i} | \overline{\Delta_i}; \overline{B_i} \rangle = (\sigma, \xi)(conc(r))$.

Quando $A; \Gamma \succ \Delta; B$ é derivável em $\mathcal{A}$ de Ω, dizemos que $\vdash_{\mathcal{A}}$ tem a tem *meta-propriedade*:

`para todo` Γ'_i, Δ'_i: $(1 \leq i \leq n)$
`se` $\Gamma'_1; \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{A}} \Delta_1; \Delta'_1, ..., \Gamma'_n; \Gamma_n \vdash_{\mathcal{A}} \Delta_n; \Delta'_n$
`então` $\Gamma'; \Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \Delta; \Delta'$

ou então que $\mathcal{A}$ tem a *regra derivada*:

$$\frac{A_1; \Gamma_1 \succ \Delta_1; B_1, ..., A_n; \Gamma_n \succ \Delta_n; B_n}{A; \Gamma \succ \Delta; B}$$

No caso em que $A; \Gamma \succ \Delta$ é derivável do conjunto vazio, ou seja:

$$\frac{}{A; \Gamma \succ \Delta; B}$$

escrevemos $A; \Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \Delta$, o que define uma relação de conseqüência $\vdash_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{P}(L(C)) \times \mathcal{P}(L(C))$, diferentemente dos casos anteriores, em que a relação de conseqüência mantinha-se entre conjuntos de fórmulas e fórmulas. Com efeito, uma das justificativas mais freqüentes para a introdução dos sistemas de conseqüências múltiplas como alternativa àqueles de conseqüência simples (em contextos distintos do que temos aqui) é a *simetria* gerada pela relação conseqüencial em questão, ausente nos sistemas que lidam exclusivamente com a conseqüência singular.

Observemos que, usando a composicionalidade de substituições e instanciações, prova-se imediatamente que, dado um sistema de conseqüências múltiplas $\mathcal{A}$ sobre C e uma asserção geral $\langle A; \Gamma | \Delta; B \rangle$, $A; \Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \Delta; B$ implica em que $\xi(A'); \xi(A''), \hat{\sigma}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{A}} \hat{\sigma}(\Delta), \xi(B'')); \xi(B')$, onde $A' = \{X \in A : \xi(X) \in \mathcal{X}\}$, $A'' = A \setminus A'$, $B' = \{X \in B : \xi(X) \in \mathcal{X}\}$ e $B'' = B \setminus B'$.

A noção de regra derivada ou meta-propriedade tem uma função de grande importância para o tema das combinações entre lógicas, pois, como veremos, os morfismos entre as estruturas dadas pelos sistemas de conseqüências múltiplas preservam essas mesmas meta-propriedades (ou regras derivadas), gerando uma noção de tradução (v. capítulo 2) mais forte que a usual. Esse fato traz conseqüências notáveis sobretudo para o tratamento, como mencionamos, do problema do anti-colapso da fibrilação.

Ressaltamos também que, mesmo envolvendo conceitos de nível meta-teórico superior àqueles das demais apresentações oferecidas aqui, a presente apresentação dos sistemas de conseqüência múltipla é eminentemente *sintática*, repousando inteiramente no nível da própria linguagem. Não abordaremos aqui a semântica de tais sistemas. Uma apresentação de semântica para sistemas de *seqüentes* em geral é dada em [18].

Note-se que a noção de regra que usamos (assim como a noção derivada de meta-propriedade), e seu apelo ao uso de variáveis para conjuntos de fórmulas e outras para fórmulas, surge como formalização de regras-esquema (em cálculos de seqüentes ou propriamente em lógicas de conseqüências múltiplas) como as seguintes:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, (\varphi \to \psi) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi), \Delta}$$

(onde os símbolos Γ, Δ e $\vdash$ são tais como usualmente apresentados nas regras de seqüentes - informalmente -, e não devem ser interpretados no sentido formal que lhes demos nesta seção), que são então representadas, respectivamente, como:

$$\frac{\{X\}; \emptyset \succ \{p\}; \{Y\} \qquad \{X\}; \{q\} \succ \emptyset; \{Y\}}{\{X\}; \{(p \to q)\} \succ \emptyset; \{Y\}}$$

$$\frac{\{X\}; \{p\} \succ \{q\}, \{Y\}}{\{X\}; \emptyset \succ \{(p \to q)\}; \{Y\}}$$

o que também escrevemos em versão simplificada:

$$\frac{X \succ p; Y \qquad X; q \succ Y}{X; (p \to q) \succ Y}$$

$$\frac{X; p \succ q, Y}{X \succ (p \rightarrow q); Y}$$

Dada a asserção geral

$A; (p \rightarrow q), (\neg q) \succ (\neg p); A,$

(membro de um conjunto $GenA(C)$ tal que $\{\rightarrow, \neg\} \subseteq |C|$ e com p e q como variáveis proposicionais e A um conjunto de variáveis - i.e., membros de $\mathcal{X}$), uma instanciação ξ tal que $\xi(A) = \{(r \rightarrow (s \rightarrow r)), (r \rightarrow r), X\}$ (X é um elemento do conjunto das variáveis) e uma substituição σ tal que $\sigma(p) = (r \rightarrow \neg s)$ e $\sigma(q) = (\neg r))$, temos então:

$(\sigma, \xi)(A; (p \rightarrow q), (\neg q) \succ (\neg p); A) = X; (r \rightarrow (s \rightarrow r)), (r \rightarrow r), ((r \rightarrow \neg s) \rightarrow (\neg r)), (\neg(\neg r)) \succ (\neg(r \rightarrow \neg s)), (r \rightarrow (s \rightarrow r)), (r \rightarrow r); X.$

Podemos definir um sistema de conseqüências múltiplas - chamá-lo-emos MP - para a lógica proposicional clássica como a seguir. $MP = \langle C, R \rangle$ de tal modo que C é a assinatura constituída por $C^0 = \{\perp\}$, $C^2 = \{\rightarrow\}$ e $C^n = \emptyset$ para todo $n \neq 0$, $n \neq 2$ e R é constituído das seguintes regras:

$$\frac{}{X; p \succ p; Y}$$

$$\frac{}{X; \perp \succ Y}$$

$$\frac{X \succ Y}{X; p \succ Y}$$

$$\frac{X \succ Y}{X \succ p; Y}$$

$$\frac{X; p \succ Y \qquad Z \succ p; W}{X, Z \succ Y, W}$$

$$\frac{X \succ p; Y \qquad X; q \succ Y}{X; (p \to q) \succ Y}$$

$$\frac{X; p \succ q; Y}{X \succ (p \to q); Y}$$

As cinco primeiras regras, que não contêm referência a conectivos, são chamadas regras *estruturais* e, a exemplo dos axiomas de Tarski, usualmente assumidas como válidas em geral, ou seja, em qualquer sistema de conseqüências múltiplas.[6] Note-se que há múltiplas fórmulas (na verdade, fórmulas e variáveis para conjuntos de fórmulas) de ambos os lados do símbolo $\succ$ nas asserções gerais que formam essas regras. Podemos, conforme mencionamos, representar a lógica proposicional clássica concebida como sistema de conseqüência simples mediante o expediente já mencionado de considerar somente asserções nas quais há no máximo *uma* fórmula ao lado direito de $\succ$ (e nenhuma variável para conjuntos de fórmulas). A lógica da conjunção clássica ($MC = \langle C_c, R_c \rangle$, com C_c a assinatura tal que $C_c^2 = \{\wedge\}$

[6] Diríamos melhor que os sistemas de conseqüências múltiplas em que valem essas regras são sistemas de conseqüências múltiplas *estruturais* (do mesmo modo que uma lógica que satisfaz os axiomas de Tarski é dita *tarskiana*). As regras estruturais com efeito substituem os axiomas de Tarski. Note-se, porém, que o axioma de *estruturalidade* de Łoz e Suszko [42] é substituído pelo uso das instanciações e substituições na definição de derivação.

e $C_c^n = \emptyset$ para todo $n \neq 2$) pode ser então caracterizada pelas seguintes regras (conjunto R_c):

$$\frac{}{X; p \succ p}$$

$$\frac{X \succ}{X \succ p}$$

$$\frac{X \succ p}{X; q \succ p}$$

$$\frac{X \succ}{X; p \succ}$$

$$\frac{X \succ p \qquad Y; p \succ q}{X, Y \succ q}$$

$$\frac{X \succ \qquad Y; p \succ}{X, Y \succ}$$

$$\frac{X; p \succ u}{X; (p \wedge q) \succ u}$$

$$\frac{X; p, q \succ}{X; (p \wedge q) \succ}$$

$$\frac{X \succ p \qquad Y \succ q}{X, Y \succ (p \wedge q)}$$

As seis primeiras regras do último grupo prestam-se aqui ao mesmo papel a que se prestavam as cinco primeiras do grupo anterior, ou seja, determinam a *estruturalidade* do sistema. A lógica da disjunção clássica é dada, neste contexto, como $MD = \langle C_d, R_d \rangle$, com C_d a assinatura tal que $C_d^2 = \{\vee\}$ e $C_d^n = \emptyset$ para todo $n \neq 2$ e R_d consistindo das cinco primeiras regras já mencionadas, além das seguintes:

$$\frac{X \succ p}{X \succ (p \vee q)}$$

$$\frac{X \succ q}{X \succ (p \vee q)}$$

$$\frac{X \succ (p \vee q) \qquad Y; p \succ u \qquad Z, q \succ u}{X, Y, Z; (p \vee q) \succ u}$$

$$\frac{X \succ (p \vee q) \qquad Y; p \succ \qquad Z, q \succ}{X, Y, Z; (p \vee q) \succ}$$

As lógicas da conjunção e da disjunção apresentadas como sistemas de conseqüências múltiplas (mesmo, como no presente caso, que a cardinalidade do conjunto de expressões à direita do símbolo $\succ$ seja restrita a 1) têm a peculiaridade (embora o mesmo ocorra, por exemplo, com seqüentes e algumas apresentações semânticas), em contraste com outras apresentações (por exemplo, como sistemas de Hilbert ou sistemas de conseqüência simples), de, ao serem combinadas de uma forma direta (i.e., unindo as duas assinaturas e os dois conjuntos de regras), produzir a *distributividade* da conjunção em relação à disjunção e vice-versa, ou seja:

- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \dashv\vdash (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$
- $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3 \dashv\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$

onde $\dashv\vdash$ indica conseqüência lógica nos dois sentidos. Tal fato é observado em [3], [4] e [14], e trata-se de um dos principais indicativos da utilidade da representação de lógicas como sistemas de conseqüências múltiplas para a solução do problema do anti-colapso da fibrilação (v. seção 3.5.1).

1.4 Lógicas como estruturas

As estruturas de primeira ordem do tipo que consideramos na seção 1.2.1, possuindo somente um domínio de quantificação (ou *universo de discurso*), são chamadas estruturas *unissortidas*. Mas podemos distinguir, em uma única estrutura, dois ou mais universos de discurso, que determinam diferentes *sortes* às quais pertencem os símbolos de predicados, funções e constantes. Consideremos o caso particular de estruturas bissortidas (v. [17]), que nos serão úteis um pouco mais adiante.

Inserimos a noção de 'bissortimento' na própria definição de linguagem (uma vez que os próprios símbolos fundamentais da linguagem - símbolos de predicados, de funções e constantes - se classificam segundo a sorte). Como antes, uma assinatura é uma tripla $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$, mas em que $\mathcal{P}, \mathcal{F}$ e $\mathcal{C}$ são conjuntos, e não mais famílias de conjuntos, cada um de cujos elementos assume uma determinada *sorte* dentre as duas designadas. Uma *linguagem de primeira ordem bissortida* $L^2(\Sigma)$ é definida por:

$L^2(\Sigma) = \langle \Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \wedge, \forall, \approx \rangle \cup \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$

em que $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ é o conjunto das *sortes* de $L^2(\Sigma)$ (perceba-se que há dois conjuntos de variáveis na linguagem, um para cada sorte).

Por simplicidade, assumiremos que todo $P \in \mathcal{P}$ é da sorte $\mathbf{B}_1^n \times \mathbf{B}_2^m$, com $n, m \geq 0$; toda $f \in \mathcal{F}$ é da sorte $\mathbf{B}_1^r \times \mathbf{B}_2^s \longrightarrow \mathbf{B}_i$, com $i \in \{1, 2\}$ e $r, s \geq 0$ como antes; e toda $c \in \mathcal{C}$ é de sorte $\mathbf{B}_1$ ou $\mathbf{B}_2$. Perceba-se que o quantificador introduzido interpretar-se-á como aplicado, dependendo da sorte da variável ligada por ele, a elementos de um só domínio, a saber, o domínio dado pela sorte da mesma variável.

Definimos, então, uma *estrutura bissortida* para $L^2(\Sigma)$ como uma tupla $\mathcal{B} = \langle B_1, B_2, \mathcal{P}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \rangle$ em que B_1, B_2 são os domínios de quantificação ou universos de discurso de $\mathcal{B}$, e:

- $\mathcal{P}^{\mathcal{B}}$ possui, para cada $P \in \mathcal{P}$ de sorte $\mathbf{B}_1^n \times \mathbf{B}_2^m$, um subconjunto $P^{\mathcal{B}}$ de $B_1^n \times B_2^m$ $(n, m \geq 0)$;

- $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}$ possui, para cada $f : \mathbf{B}_1^n \times \mathbf{B}_2^m \longrightarrow \mathbf{B}_1$, uma função $f^{\mathcal{B}} : B_1^n \times B_2^n \longrightarrow B_1$ $(n \geq 1)$ e para cada $g : \mathbf{B}_1^r \times \mathbf{B}_2^s \longrightarrow \mathbf{B}_2$, uma função $g^{\mathcal{B}} : B_1^n \times B_2^n \longrightarrow B_2$ $(n, m, r, s \geq 0)$;

- $\mathcal{C}^{\mathcal{B}}$ possui, para cada c de sorte $\mathbf{B}_1$, um elemento $c^{\mathcal{B}}$ de B_1, e para cada d de sorte $\mathbf{B}_2$, um elemento $d^{\mathcal{B}}$ de B_2.

A noção de *satisfação* é definida de forma similar à da mesma noção para estruturas unissortidas, com as adaptações óbvias. O mesmo pode ser dito, evidentemente, das noções definidas em termos de satisfação, como a de verdade. Definiremos as noções de subestrutura e morfismo (e isomorfismo) entre estruturas bissortidas.

Seja $\mathcal{B}$ uma estrutura bissortida e $B_i' \subseteq B_i$, para $i \in \{1, 2\}$ $(B_1, B_2$ são os domínios de $\mathcal{B})$ tais que:

- Se $f^{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}^{\mathcal{B}} = \{f^{\mathcal{B}} : f \in \mathcal{F}\}$, $f^{\mathcal{B}} : B_1^n \times B_2^n \longrightarrow X$ ($X \in \{B_1, B_2\}$) e $(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{y}) \in B_1'^n \times B_2'^m$, então $f^{\mathcal{B}}(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{y}) \in Z$, onde $Z = B_i'$ se $X = B_i$ ($i \in \{1, 2\}$);

- $\mathcal{C}^{\mathcal{B}} = \{c^{\mathcal{B}} : c \in \mathcal{C}\} \subseteq B_1' \cup B_2'$.

Consideremos $P^{\mathcal{B}} = \{P^{\mathcal{B}} : P \in \mathcal{P}\}$. Então a *restrição de* $\mathcal{B}$ *a* $\langle B_1', B_2' \rangle$ é a estrutura

$$\mathcal{B}|_{\langle B_1', B_2' \rangle} = \langle B_1', B_2', \mathcal{P}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{C}_1 \rangle$$

onde

$$\mathcal{P}_1 = \{P^{\mathcal{B}} \cap B_1'^n \times B_2'^m : P^{\mathcal{B}} \in \mathcal{P}^{\mathcal{B}}, P^{\mathcal{B}} \subseteq B_1^n \times B_2^m, n, m \geq 0\};$$

$$\mathcal{F}_1 = \{(f^{\mathcal{B}})|_{B_1'^n \times B_2'^m} : f^{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}^{\mathcal{B}}, Dom(f^{\mathcal{B}}) = B_1^n \times B_2^m, n, m \geq 0\};$$

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}^{\mathcal{B}}.$$

Uma estrutura $\mathcal{B}' = \mathcal{B}|_{\langle B_1', B_2' \rangle}$ para algum $\langle B_1', B_2' \rangle$ como descrito é dita uma *subestrutura de* $\mathcal{B}$. Analogamente às estruturas unissortidas, temos definida a noção de *subestrutura elementar* da seguinte forma: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ se $\mathcal{B} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n]$ se, e somente se $\mathcal{B}' \vDash \varphi[a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n]$ (adotamos a convenção de representar por $a_i, i \in \mathbb{N}$ os elementos de B_1 e por $b_i, i \in \mathbb{N}$ os elementos de B_2).

Definimos, então, um *morfismo* $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$ como um par $h = \langle F_1, F_2 \rangle$ tal que:

1. $F_i : B_i \longrightarrow B_i'$, $i \in 1, 2$;

2. Se P é um símbolo de predicado $(n+m)$-ário de $L^2(\Sigma)$, então

   $(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}) \in P^{\mathcal{A}}$ implica em $(F_1(a_1),...,F_1(a_n);F_2(b_1),...,F_2(b_m)) \in P^{\mathcal{B}'}$

   para todo $\overrightarrow{a} = (a_1,...,a_n) \in B_1^n$, $\overrightarrow{b} = (b_1,...,b_m) \in B_2^m$;

3. Se c (de sorte $\mathbf{B_1}$) e d (de sorte $\mathbf{B_2}$) são constantes de $L^2(\Sigma)$, então

   $F_1(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ e $F_2(d^{\mathcal{A}}) = d^{\mathcal{B}}$;

4. Se $f : \mathbf{B}_1^n \times \mathbf{B}_2^m \longrightarrow \mathbf{B}_1$ é um símbolo de função de $L^2(\Sigma)$, então

   $F_1(f^{\mathcal{B}}(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b})) = f^{\mathcal{B}'}(F_1(a_1),...,F_1(a_n);F_2(b_1),...,F_2(b_m))$

   e se $f : \mathbf{B}_1^n \times \mathbf{B}_2^m \longrightarrow \mathbf{B}_2$, então

   $F_2(f^{\mathcal{B}}(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b})) = f^{\mathcal{B}'}(F_1(a_1),...,F_1(a_n);F_2(b_1),...,F_2(b_m))$

   para todo $\overrightarrow{a} = (a_1,...,a_n) \in B_1^n$, $\overrightarrow{b} = (b_1,...,b_m) \in B_2^m$.

Um *isomorfismo* entre estruturas bissortidas é um morfismo como o definido, substituindo "implica em que" por "se, e somente se" na condição (2) acima e com F_1 e F_2 bijeções. Como antes, se existe um isomorfismo entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'|_{\langle F_1[A_1],F_2[A_2]\rangle}$, dizemos que $\mathcal{B}$ é *imersível* ou *mergulhável* em $\mathcal{B}'$, o que se denota $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{B}'$. Se $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{B}'$ e $\mathcal{B} \vDash \varphi[a_1,...,a_n;b_1,...,b_m]$ se, e somente se $\mathcal{B}' \vDash \varphi[F_1(a_1),...,F_1(a_n);F_2(b_1),...,F_2(b_m)]$, temos caracterizada uma *imersão elementar* de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}'$.

Lembremos também que resultados importantes da Teoria de Modelos, como o Teorema do Isomorfismo, mantêm sua validade para o tipo de estruturas que estamos considerando.

O tipo de estruturas recém-descrito é de especial interesse para um tipo particular de representação de sistemas lógicos, introduzido por Marcelo Coniglio e Walter Carnielli [17], como estruturas de primeira ordem, a partir do qual definimos um tipo de morfismos entre lógicas (os chamados "*transfers*", introduzidos também em [17]) que constitui uma noção de *tradução entre lógicas* bastante útil no contexto das combinações entre lógicas. Chamaremos as referidas estruturas algébrico-relacionais de *lógicas abstratas*. Seguimos aqui os textos [16] e [17].

A linguagem básica das lógicas abstratas é uma linguagem de primeira ordem bissortida $L = L^2(\Sigma)$ dada pela assinatura

$$\Sigma = \langle \{\varepsilon, \vdash\}, \{\Cup, \mathbf{s}\}, \{\mathbf{0}\} \rangle$$

como:

$$L = \langle \Sigma, \mathcal{V}, \wedge, \forall, \approx \rangle \cup \{\mathbf{form}, \mathbf{Sform}\}$$

Aqui, $\{\mathbf{form}, \mathbf{Sform}\}$ é o conjunto das sortes de L, ε é um símbolo de predicado de sorte $\mathbf{form} \times \mathbf{Sform}$, $\vdash$ é um símbolo de predicado de sorte $\mathbf{Sform} \times \mathbf{form}$, $\Cup : \mathbf{Sform} \times \mathbf{Sform} \longrightarrow \mathbf{Sform}$ e $\mathbf{s} : \mathbf{form} \longrightarrow \mathbf{Sform}$ são símbolos de função e $\mathbf{0}$ é uma constante da sorte $\mathbf{Sform}$. Lembremos que os conectivos, quantificador e símbolo de igualdade da assinatura não são símbolos lógicos *das lógicas abstratas como as definiremos*, e sim da linguagem geral, por assim dizer da *metalinguagem formal* das lógicas abstratas.

Sendo τ um termo de sorte $\mathbf{form}$ e Υ e Ξ termos de sorte $\mathbf{Sform}$, escreveremos $\tau \varepsilon \Upsilon$ no lugar de $\varepsilon(\tau, \Upsilon)$, $\Upsilon \vdash \tau$ no lugar de $\vdash (\Upsilon, \tau)$, e $\Upsilon \Cup \Xi$ no de $\Cup(\Upsilon, \Xi)$, respectivamente.

Uma *lógica proposicional abstrata* $\mathcal{L}$ é uma estrutura bissortida para a linguagem básica L da forma (omitindo, por simplicidade, a referência à assinatura e aos símbolos lógicos):

$$\mathcal{L} = \langle A, P, \varepsilon^{\mathcal{L}}, \vdash^{\mathcal{L}}, \Cup^{\mathcal{L}}, \mathbf{s}^{\mathcal{L}}, \mathbf{0}^{\mathcal{L}} \rangle$$

satisfazendo o grupo de axiomas em L dado a seguir:

$[Ax1]$ $\forall X \forall Y (X = Y \leftrightarrow \forall x (x \varepsilon X \leftrightarrow x \varepsilon Y))$;

$[Ax2]$ $\forall x \forall y (y \varepsilon \mathbf{s}(x) \leftrightarrow y = x)$;

$[Ax3]$ $\forall X \forall Y \forall x (x \varepsilon X \Cup Y \leftrightarrow ((x \varepsilon X) \vee (x \varepsilon Y)))$;

$[Ax4]$ $\forall x \neg (x \varepsilon \mathbf{0})$;

$[Ax5]$ $\forall X \exists Y \forall x (x \varepsilon Y \leftrightarrow \neg (x \varepsilon X))$;

$[Ax6]$ $\forall X \exists Y \forall x (x \varepsilon Y \leftrightarrow X \vdash x)$.

Chamaremos o conjunto $\{[Ax1], ..., [Ax6]\}$ simplesmente Ax. Os conectivos e quantificador que omitimos na definição de nossa linguagem são definidos como de hábito. Seja L' uma expansão de L. Diremos que $\mathcal{L}$ é uma *lógica abstrata para a linguagem* L' se a restrição de $\mathcal{L}$ a L é uma lógica abstrata. Se $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, dizemos que $\mathcal{L}$ é uma *sublógica* de $\mathcal{L}'$.

O conjunto Ax introduz uma 'teoria de conjuntos' mínima para capacitarnos a nos referir a fórmulas isoladas, conjuntos de fórmulas, uniões finitas e o conjunto vazio. Na verdade, trata-se de um recurso para manter a formalização das lógicas abstratas no escopo das teorias de primeira ordem, uma vez que considerar relações entre sentenças e conjuntos de sentenças definidos diretamente como tais (em termos conjuntistas) nos colocaria no domínio das teorias de segunda ordem, nas quais diversas metapropriedades desejáveis das teorias de primeira ordem estão ausentes. Note-se que as noções conjuntistas introduzidas por Ax (respectivamente, 'extensionalidade', 'conjunto unitário' ou singleton, 'união finita', 'conjunto vazio' e 'complemento') não necessariamente coincidem com as noções originais da teoria de conjuntos, podendo haver modelos, que chamaremos 'não *standard*', de Ax em que o significado dos símbolos difere do significado conjuntista usual. Os modelos em que isso *não* ocorre, i.e., em que a interpretação conjuntista é mantida, são chamados *standard*.

Em um modelo *standard*, ou seja, uma *lógica abstrata standard* para uma linguagem L' que estenda L (podendo, evidentemente, ser igual a L), temos então que $P \subseteq \wp(A) = \{\Gamma : \Gamma \subseteq A\}$; $\varepsilon^{\mathcal{L}} \subseteq A \times P$ é a relação conjuntista de pertinência, $\Cup^{\mathcal{L}} : P \times P \longrightarrow P$ é a operação conjuntista de união finita; $\mathbf{s}^{\mathcal{L}} : A \longrightarrow P$ é dada por $\mathbf{s}^{\mathcal{L}}(a) = \{a\}$ para todo $a \in A$; e $\mathbf{0}^{\mathcal{L}}$ é o conjunto vazio $\emptyset$.

Temos então que uma dada estrutura $\mathcal{L}$ sobre L' é uma lógica abstrata *standard* se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

- $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ é uma *álgebra booleana* com respeito às operações conjuntistas (união, disjunção, complemento), com $0 = \emptyset$ e $1 = A$ ($\emptyset, A \in P$);

- $\{a\} \in P$ para todo $a \in A$;

- Se $\Gamma \in P$, então $\{a \in A : \Gamma \vdash^{\mathcal{L}} a\} \in P$.

Para provar, primeiro supomos que $\mathcal{L}$ seja uma lógica abstrata *standard* sobre L' (L' estende L). Pela própria definição formal de lógica abstrata *standard*, $\emptyset = \mathbf{0}^{\mathcal{L}} \in P \subseteq \mathcal{P}(A)$. Por [Ax4] e [Ax5], $A \in P$. A partir daí é fácil verificar que as operações conjuntistas de união, interseção e complemento satisfazem os axiomas booleanos, tomando $\emptyset = \mathbf{0}_{\mathcal{L}} = 0$ e $A = 1$. Os dois itens restantes são garantidos, respectivamente, pelos axiomas $[Ax5]$ e $[Ax6]$ e pela interpretação do símbolo ε como a relação de pertinência. Por outro lado, assumindo os três itens listados acima, pelas definições e axiomas da própria Teoria de Conjuntos e a leitura *standard* dos símbolos da nossa linguagem, que $[Ax1]$ expressa uma propriedade da igualdade conjuntista (princípio de extensionalidade), $[Ax2]$ uma propriedade dos singletons (através do axioma do Par), $[Ax3]$ uma propriedade da união (axioma de união finita), $[Ax4]$ uma do conjunto vazio (definição de conjunto vazio) e $[Ax5]$ da operação de complemento (definição de complemento). Como uma álgebra booleana sobre conjuntos é construída sobre esses axiomas e definições, temos que uma estrutura (bissortida) com domínios A e P tais que $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ e fechada sobre as operações conjuntistas usuais satisfaz os axiomas $[Ax1] - [Ax5]$ com os símbolos $\varepsilon, \Cup, \mathbf{s}, \mathbf{0}_{\mathcal{L}}$ interpretados, respectivamente, como pertinência, união, singleton (função formadora de singleton) e conjunto vazio. Se, além do mais, essa estrutura satisfaz o último requisito de nossa lista, é imediato que satisfaz também o axioma $[Ax6]$. A partir disto, é fácil verificar que uma tal estrutura configura uma lógica abstrata *standard*.

Perceba-se que o axioma $[Ax6]$ é o que nos permite propriamente caracterizar as lógicas abstratas como *lógicas*, considerado o conceito de conseqüência como o único conceito realmente fundamental para a qualificação de qualquer coisa como uma lógica. Note-se que Ax não impõe qualquer condição sobre $\vdash$, de modo que o contexto presente oferece um *framework* apropriado para a *Lógica Universal*, no sentido concebido por Béziau.

Na verdade, nós dispomos de um resultado que permite restringir-nos aos modelos *standard* de Ax, i.e., às interpretações que desejamos. Chamamo-lo

Teorema da Representação para Lógicas Abstratas, e ele assere: seja $\mathcal{L} = \langle A, P, \{\varepsilon^{\mathcal{L}}, \vdash^{\mathcal{L}}\} \cup \mathcal{P}^{\mathcal{L}}, \{\Cup^{\mathcal{L}}, \mathbf{s}^{\mathcal{L}}\} \cup \mathcal{F}^{\mathcal{L}}, \{\mathbf{0}^{\mathcal{L}}\} \cup \mathcal{C}^{\mathcal{L}}\rangle$ uma lógica abstrata sobre uma extensão L' de L ($\mathcal{P}^{\mathcal{L}}$, $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ e $\mathcal{C}^{\mathcal{L}}$ representam os predicados, funções e constantes pelos quais L' estende L); então existe uma lógica abstrata *standard* $\mathcal{L}'$ sobre L' que é isomorfa a $\mathcal{L}$.

A prova desse teorema não é muito complicada. Considere-se, para cada $\Gamma \in P$, um conjunto $\Gamma_\theta = \{a \in A : a\varepsilon^{\mathcal{L}}\Gamma\}$. Seja $\Delta \in P$ tal que $\Gamma_\theta = \Delta_\theta$. Pela extensionalidade conjuntista, $x \in \Gamma_\theta$ sse $x \in \Delta_\theta$. Mas pela definição de Γ_θ e Δ_θ, isso implica em $x\varepsilon^{\mathcal{L}}\Gamma$ sse $x\varepsilon^{\mathcal{L}}\Delta$, mas então, por $[Ax1]$ (que $\mathcal{L}$ satisfaz, por ser uma lógica abstrata), $\Gamma = \Delta$. Temos, então, que $\Gamma_\theta = \Delta_\theta$ implica em $\Gamma = \Delta$ (fato 1). Seja, então, $\overline{P} = \{\Gamma_\theta : \Gamma \in P\}$. Temos, pela definição dos Γ_θ, que $\overline{P} \subseteq \wp(A)$ e se definimos $\theta : P \longrightarrow \overline{P}$ por $\theta(\Gamma) = \Gamma_\theta$, temos (pelo fato 1 e pela definição de exatamente um Γ_θ para cada $\Gamma \in P$), que θ é uma bijeção (fato 2). Como $\mathcal{L}$ é modelo para Ax, então: $(\mathbf{s}^{\mathcal{L}}(a))_\theta = \{a\}$ (pois $x \in (\mathbf{s}^{\mathcal{L}}(a))_\theta$ sse $x\varepsilon^{\mathcal{L}}\mathbf{s}^{\mathcal{L}}(a)$ sse - por [Ax2] - $x = a$, ou seja, $x \in \{a\}$); $(\Gamma \Cup^{\mathcal{L}} \Delta)_\theta = \Gamma_\theta \cup \Delta_\theta$ para todo $\Gamma, \Delta \in P$ (pois $x \in (\Gamma \Cup^{\mathcal{L}} \Delta)_\theta$ sse $x\varepsilon^{\mathcal{L}}(\Gamma \Cup^{\mathcal{L}} \Delta)$ sse - por [Ax3] - $x\varepsilon^{\mathcal{L}}\Gamma$ ou $x\varepsilon^{\mathcal{L}}\Delta$ sse - pela definição de Γ_θ e Δ_θ e de união finita de conjuntos - $x \in (\Gamma_\theta \cup \Delta_\theta)$ e então, por extensionalidade, $(\Gamma \Cup^{\mathcal{L}} \Delta)_\theta = \Gamma_\theta \cup \Delta_\theta$); $(\mathbf{0}^{\mathcal{L}})_\theta = \emptyset$ (pois $x \in (\mathbf{0}^{\mathcal{L}})_\theta$ sse $x\varepsilon^{\mathcal{L}}\mathbf{0}^{\mathcal{L}}$, mas para todo x, não é o caso que $x\varepsilon^{\mathcal{L}}\mathbf{0}^{\mathcal{L}}$, ou seja, para todo x, x não pertence a $(\mathbf{0}^{\mathcal{L}})_\theta$, ou seja, $(\mathbf{0}^{\mathcal{L}})_\theta = \emptyset$).

Defina-se agora uma lógica abstrata *standard* $\mathcal{L}' = \langle A, \overline{P}, \{\vdash^{\mathcal{L}'}\} \cup \mathcal{P}^{\mathcal{L}'}, \mathcal{F}^{\mathcal{L}'}, \mathcal{C}^{\mathcal{L}'}\rangle$ (dispensamos a menção aos demais símbolos, já que podemos tratar diretamente com as noções conjuntistas relevantes) sobre L' dada da seguinte maneira: a relação $\vdash^{\mathcal{L}'} \subseteq \overline{P} \times A$ é dada por $\Gamma_\theta \vdash^{\mathcal{L}'} a$ sse $\Gamma \vdash^{\mathcal{L}} a$, para todo $\Gamma \in P$ e $a \in A$. Considere-se a bijeção, para todo $n, m \geq 0$

$$\theta_{n,m} : A^n \times P^m \longrightarrow A^n \times \overline{P}^m,\ \theta_{n,m}(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{\Gamma}) = (a_1, ..., a_n; (\Gamma_1)_\theta, ..., (\Gamma_m)_\theta)$$

Que $\theta_{n,m}$ é bijeção é evidente a partir do fato óbvio de que id_A é bijeção e do fato 2.

Para toda $R^{\mathcal{L}} \in \mathcal{P}^{\mathcal{L}}$ correspondente a um símbolo de predicado $R \in \mathcal{P}$ em L', tal que $R^{\mathcal{L}} \subseteq A^n \times P^m$, defina-se a propriedade $R^{\mathcal{L}'} \subseteq A^n \times \overline{P}^m$ como $R^{\mathcal{L}'} = \theta_{n,m}[R^{\mathcal{L}}]$. Logo, $\mathcal{P}^{\mathcal{L}'} = \{R^{\mathcal{L}} : R \in \mathcal{P}\}$, donde $(a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_m) \in R^{\mathcal{L}}$ sse $(a_1, ..., a_n; (\Gamma_1)_\theta, ..., (\Gamma_m)_\theta) \in R^{\mathcal{L}'}$. Para toda $f^{\mathcal{L}} : A^n \times P^m \longrightarrow X$ em $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ (correspondente ao símbolo funcional $f \in \mathcal{F}$ em L') tal que $X \in \{A, P\}$, defina-se a função $f^{\mathcal{L}'} : A^n \times \overline{P}^m \longrightarrow Y$ ($Y = A$ se $X = A$ e $Y = \overline{P}$ se $X = P$) como $f^{\mathcal{L}'} = f^{\mathcal{L}} \circ (\theta_{n,m})^{-1}$ se $X = A$ e $f^{\mathcal{L}'} = \theta \circ f^{\mathcal{L}} \circ (\theta_{n,m})^{-1}$ se $X = P$.

No primeiro caso, $f^{\mathcal{L}'}(a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_m) = f^{\mathcal{L}}(a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_m)$, o que é igual a $f^{\mathcal{L}}(id_A(a_1), ..., id_A(a_n); \theta(\Gamma_1), ..., \theta(\Gamma_m))$, por sua vez, igual a $id_A(f^{\mathcal{L}}(a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_m))$, já que $(\theta_{n,m})^{-1}(a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_m) = (a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_m)$; e no segundo, pelo mesmo motivo $f^{\mathcal{L}'}(a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_m) = f^{\mathcal{L}}(id_A(a_1), ..., id_A(a_n); \theta(\Gamma_1), ..., \theta(\Gamma_m))$, que é igual a $\theta(f^{\mathcal{L}}(a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_m))$. Considerando os elementos do conjunto $\mathcal{C}$ das constantes em L' como casos particulares de funções onde $n = m = 0$, temos $id_A(c^{\mathcal{L}}) = c^{\mathcal{L}'}$ para $c \in A$ e $\theta(d^{\mathcal{L}}) = d^{\mathcal{L}'}$ para $d \in P$. Logo, $h = \langle id_A; \theta \rangle : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ é um isomorfismo entre as duas lógicas.

Chamamos a lógica abstrata *standard* $\mathcal{L}'$ isomorfa a $\mathcal{L}$ a *representação canônica de* $\mathcal{L}$.

Pelo Teorema do Isomorfismo, dada a representação canônica $\mathcal{L}'$ de uma lógica abstrata $\mathcal{L}$, então

$$\mathcal{L} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_n] \text{ sse } \mathcal{L}' \vDash \varphi[a_1, ..., a_n; (\Gamma_1)_\theta, ..., (\Gamma_n)_\theta]$$

para toda fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n; X_1, ..., X_m)$ em L' (i.e., φ com variáveis livres no conjunto $\{x_1, ..., x_n; X_1, ..., X_m\}$ - denotamos as variáveis de sorte **form** com minúsculas e as de sorte **Sform** com maiúsculas). Em particular, se φ é sentença, $\mathcal{L} \vDash \varphi$ sse $\mathcal{L}' \vDash \varphi$, i.e., $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ satisfazem o mesmo conjunto de sentenças, e por isso só precisamos lidar com lógicas abstratas *standard*.

Definimos, então, a noção de *atributo* de uma lógica abstrata $\mathcal{L}$ sobre uma extensão L' de L como *qualquer elemento de* L'. Perceba-se que um elemento qualquer de L' expressa uma relação entre fórmulas e conjuntos de fórmulas de uma lógica.

Dispomos de uma maneira de expressar na nossa linguagem básica os axiomas de Tarski (e portanto de definir uma *lógica tarskiana*). Para tanto, introduzamos as seguintes abreviações:

- $Y_1 \subseteq Y_2$ para $\forall x(x \varepsilon Y_1 \rightarrow x \varepsilon Y_2)$ ("Y_1 está incluído em Y_2");

- $Ent(Y_1, Y_2)$ para $\forall x(x \varepsilon Y_2 \rightarrow Y_1 \vdash x)$ ("Y_1 acarreta Y_2");

- $Str(Y_1, Y_2))$ para $\forall x(Y_2 \vdash x \rightarrow Y_1 \vdash x)$ ("Y_1 é logicamente mais forte que Y_2");

- $Con(Y_1, Y_2)$ para $\forall x(x \varepsilon Y_2 \leftrightarrow Y_1 \vdash x)$ ("Y_2 é o conjunto das conseqüências de Y_1");

- $Th(Y)$ para $Con(Y, Y)$ ("Y é uma teoria fechada");

- $Eq(x, y)$ para $\forall Y(Con(\mathbf{s}(x), Y) \leftrightarrow Con(\mathbf{s}(y), Y))$ ("x e y são conseqüencialmente equivalentes").

Podemos expressar os (três básicos) axiomas de Tarski, então, da seguinte maneira:

$[A1]$ $\forall Y(Ent(Y, Y))$;

$[A2]$ $\forall Y_1 \forall Y_2(Y_1 \subseteq Y_2 \rightarrow Str(Y_2, Y_1))$;

$[A3]$ $\forall Y_1 \forall Y_2(Con(Y_1, Y_2) \rightarrow Str(Y_1, Y_2))$.

Evidentemente, uma lógica abstrata é considerada *tarskiana* se ela satisfaz [A1]-[A3] (note que, como no caso de (r1)-(r3), o axioma [A2] é redundante, podendo ser, em princípio, excluído da lista).

As L-sentenças (abreviadas) $[A1]-[A3]$ claramente expressam *propriedades* de lógicas (abstratas). Isso sugere um meio geral para a expressão de propriedades de lógicas: através de sentenças sobre L (ou extensões de L). Assim, *teorias* $\mathbb{T}$ sobre L representam classes de lógicas que satisfazem determinadas propriedades. No exemplo acima, os axiomas $[A1] - [A3]$ determinam a teoria das lógicas *tarskianas*.

Além de especificar certas classes de lógicas, sentenças de L (mas neste caso, não de suas extensões) podem apontar propriedades *universais* das lógicas abstratas, como a seguinte:

$[TH!]$ $\forall Y \exists Y_1(Con(Y, Y_1) \wedge \forall Y_2(Con(Y, Y_2) \rightarrow Y_1 = Y_2))$

A validade de $[TH!]$ se conclui facilmente usando a definição de $Con(X, Y)$ e os axiomas $[Ax6]$ e $[Ax1]$. Essa propriedade das lógicas abstratas garante que $Eq(x, y)$ é uma relação de equivalência. A reflexividade e a simetria da relação são imediatas a partir da definição. Já a transitividade se prova da seguinte forma: Supondo $Eq(x, y)$ e $Eq(y, z)$, temos, pela definição da relação Eq, $\forall Y(Con(s(x), Y) \leftrightarrow Con(s(y), Y))$ e $\forall Z(Con(s(y), Z) \leftrightarrow Con(s(z), Z))$. Instanciando a primeira para um determinado Y e a segunda para um determinado Z, temos: $Con(s(x), Y) \leftrightarrow Con(s(y), Y)$ e $Con(s(y), Z) \leftrightarrow Con(s(z), Z)$. Ou seja, um determinado Y é conjunto das conseqüências de $s(x)$ sse é conjunto das conseqüências de $s(y)$ e um determinado Z é conjunto das conseqüências de $s(y)$ sse é conjunto das conseqüências de $s(z)$. Mas ora, por $[TH!]$, o conjunto das conseqüências de $s(y)$ é único, portanto podemos igualar Y e Z, de modo que um determinado $Y(= Z)$ é conjunto das conseqüências de $s(x)$ sse é conjunto das conseqüências de $s(z)$, e então temos $Eq(x, z)$, como desejado.

Podemos também definir, para as lógicas abstratas (standard) aqui consideradas, um operador de conseqüência à semelhança do operador tarskiano Cn.

Seja $\mathcal{L}$ uma lógica abstrata standard com $A = \mathbf{form}^{\mathcal{L}}$ e $P = \mathbf{Sform}^{\mathcal{L}}$. Definimos o *operador de conseqüência* associado como uma função $Cn^{\mathcal{L}} : P \longrightarrow P$ dada por

$$Cn^{\mathcal{L}} = \{a \in A : \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} a\}.$$

A partir de Cn, definimos a relação de equivalência $\equiv^{\mathcal{L}}$ da seguinte maneira:

$$a \equiv^{\mathcal{L}} b \text{ sse } Cn^{\mathcal{L}}(a) = Cn^{\mathcal{L}}(b).$$

Vê-se então que $Cn^{\mathcal{L}}$ é obtida como interpretação de $Con(X, Y)$ e $\equiv^{\mathcal{L}}$ como interpretação de $Eq(x, y)$. E através do operador de conseqüência que ora definimos, podemos redefinir uma lógica (abstrata standard) tarskiana como uma na qual o operador $Cn^{\mathcal{L}}$ satisfaz os axiomas (1), (2) e (3).

Uma das principais vantagens da definição de lógicas abstratas como estruturas de primeira ordem é justamente o aproveitamento de resultados da Teoria de Modelos. Nesse sentido, um resultado importante derivado da presente abordagem da representação de sistemas lógicos é que a classe de lógicas abstratas standard é fechada sob ultraprodutos - resultado este derivado do famoso Teorema de Ultraproduto de Łos.

Para apresentá-lo, contudo, devemos primeiro definir o conceito de *ultraproduto*. Verificamos que este é dependente da definição *ultrafiltro*, que por sua vez é um caso particular de *filtro*. Comecemos, pois, do ponto mais elementar.

Seja I um conjunto não vazio. Um *filtro* sobre ele é definido como um conjunto $D \subseteq \mathcal{P}(I)$ satisfazendo os seguintes requisitos:

[F1] $I \in D$;

[F2] $R, S \in D$ implica em $R \cap S \in D$;

[F3] $R \in D$ e $R \subseteq S \subseteq I$ implica em $S \in D$.

Um *ultrafiltro* é um filtro D tal que:

- $\emptyset \notin D$;
- $R \in D$ ou $(I \setminus R) \in D$ para todo $R \subseteq I$.

ou seja, se $D \neq \mathcal{P}(I)$ e D é maximal (em relação à inclusão).

Seja então $\mathbf{F} = \{A_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos e D um ultrafiltro sobre I. O *ultraproduto de* $\mathbf{F}$ *modulo* D é o conjunto $\Pi_D\mathbf{F} = \{a_D : a \in \Pi_{i \in I} A_i\}$, onde:

- $a_D = \{b \in \Pi_{i \in I} A_i : a \sim_D b\}$ $(a \in \Pi_{i \in I} A_i)$;
- $a \sim_D b$ sse $\{i \in I : a_i = b_i\} \in D$ $(a, b \in \Pi_{i \in I} A_i)$.

$\Pi_{i \in I} A_i$ é o *produto cartesiano direto* de $(A_i)_{i \in I}$.

Provamos que $\sim_D$ é uma relação de equivalência. Que é reflexiva e simétrica, é imediato a partir da definição. Para provar a transitividade, suponha-se $a \sim_D b$ e $b \sim_D c$. Ou seja, $\{i \in I : a_i = b_i\}, \{i \in I : b_i = c_i\} \in D$. Mas $\{i \in I : a_i = b_i\} \cap \{i \in I : b_i = c_i\} \subseteq \{i \in I : a_i = c_i\}$, já que a interseção referida consiste dos elementos de I que indexam os elementos $\{a_i, b_i, c_i\}$ de $\Pi_{i \in I} A_i$ tais que $a_i = b_i$ e $b_i = c_i$, o que implica em que $a_i = c_i$, para os a_i, c_i dados, justificando nossa afirmação. Mas por [F2], $\{i \in I : a_i = b_i\} \cap \{i \in I : b_i = c_i\} \in D$, e então, dado que $\{i \in I : a_i = c_i\} \subseteq I$, por [F3], $\{i \in I : a_i = c_i\} \in D$, ou seja, $a \sim_D c$, provando a transitividade.

Temos assim que o ultraproduto de $\mathbf{F}$ *modulo* D é o conjunto quociente da equivalência $\sim_D$, ou seja, o conjunto das classes de equivalência determinadas por esta, que por sua vez determina uma partição no conjunto de tuplas ordenadas pertencentes ao produto $\Pi_{i \in I} A_i$ baseada na identidade dos membros cujos índices estão em um determinado ultrafiltro.

A noção de ultraproduto pode ser definida também para estruturas. Assim, seja $\mathbf{F} = \{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ uma família de estruturas bissortidas sobre a mesma linguagem L_1 com $\mathcal{A}_i = \langle A_i, B_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i \rangle$ para todo $i \in I$ e D um ultrafiltro sobre I. O ultraproduto de $\mathbf{F}$ sobre D é a estrutura $\mathcal{A} = \langle A, B, \mathcal{P}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}} \rangle$ para L_1 onde, para cada símbolo de predicado $P \in \mathcal{P}$, cada símbolo funcional $f \in \mathcal{F}$ e cada constante $c \in \mathcal{C}$:

- $A = \Pi_D\{A_i : i \in I\}$, $B = \Pi_D\{B_i : i \in I\}$;
- $(a_D^1, ..., a_D^n; b_D^1, ..., b_D^m) \in P^{\mathcal{A}}$ sse $\{i \in I : (a_i^1, ..., a_i^n; b_i^1, ..., b_i^m) \in P^{\mathcal{A}_i}\} \in D$;
- $f(a_D^1, ..., a_D^n; b_D^1, ..., b_D^m) = \langle f^{\mathcal{A}_i}(a_i^1, ..., a_i^n; b_i^1, ..., b_i^m) : i \in I \rangle_D$;
- $c^{\mathcal{A}} = \langle c^{\mathcal{A}_i} : i \in I \rangle_D$.

Como os domínios A e B são definidos como ultraprodutos (de conjuntos), seus elementos são classes de equivalência definidas sobre um conjunto de tuplas ordenadas, pertencentes ao produto direto dos respectivos A_i e

B_i. Os símbolos de predicados $(n+m)$-ários de L_1 interpretados então determinam subconjuntos de $A^n \times B^m$, exatamente aqueles que interpretam o predicado nas estruturas $\mathcal{A}_i$ tais que i está no ultrafiltro D. Quanto às funções $(n+m)$-árias, definidas sobre um dado subconjunto de $A^n \times B^m$, determinam, cada uma e para cada $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$ de $A^n \times B^m$, um único elemento de A ou B, que é dado pela classe de equivalência (da relação $\sim_D$) da tupla ordenada formada pelos elementos $f^{\mathcal{A}_i}(a_i^1, ..., a_i^n; b_i^1, ..., b_i^m)$ de A_i ou B_i, com $i \in I$. As constantes, por sua vez, são dadas simplesmente pelas classes de equivalência (da mesma relação $\sim_D$) das tuplas de elementos $c^{\mathcal{A}_i}$ de A_i ou B_i, para $i \in I$.

Enunciamos então o Teorema Fundamental de Ultraprodutos (Teorema de Łos), que caracteriza estruturas obtidas como $\mathcal{A}$ acima, ou seja, como ultraproduto de dadas estruturas.

Teorema (Łos): Seja $\mathbf{F} = \{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ uma família de estruturas bissortidas sobre a mesma linguagem L_1 e $\mathcal{A}$ o ultraproduto de $\mathbf{F}$ sobre um ultrafiltro $D \subseteq \mathcal{P}(I)$. Então:

$$\mathcal{A} \models \sigma \text{ sse } \{i \in I : \mathcal{A}_i \models \sigma\} \in D$$

para toda L_1-sentença σ.

■

Uma interpretação possível para o Teorema de Łos é vê-lo como a afirmação de que, considerando os elementos de D como subconjuntos "suficientemente grandes" de I, o ultraproduto $\mathcal{A}$ satisfaz uma sentença σ sse um número "suficientemente grande" de estruturas $\mathcal{A}_i$ satisfazem σ.

Usando o Teorema de Łos, demonstramos, conforme anunciado, que a classe de lógicas abstratas standard é fechada sob ultraprodutos.

Seja $\mathbf{F} = \{\mathcal{L}_i : i \in I\}$ uma família de lógicas abstratas standard sobre uma extensão L' de L. Provaremos que o ultraproduto $\mathcal{L}$ de $\mathbf{F}$ sobre um ultrafiltro D é uma lógica abstrata standard sobre L'.

Como o definimos, o ultraproduto sobre um ultrafiltro D de uma família de estruturas para uma determinada linguagem, indexadas pelos elementos de um conjunto I, constitui ele próprio uma estrutura para essa mesma linguagem, e então $\mathcal{L}$ é uma estrutura para L'. E como toda lógica abstrata se define como uma estrutura para alguma extensão de L (como L') que satisfaça os axiomas do grupo Ax, então, para toda $\mathcal{L}_i \in \mathbf{F}$, $\mathcal{L}_i \models \sigma$, se

$\sigma \in Ax$. Ou seja, o conjunto $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \sigma\}$, para cada $\sigma \in Ax$ não é outro senão o próprio I, que, pela definição de um ultrafiltro D sobre I, é um elemento de D, i.e., $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \sigma\} \in D$. Mas então, pelo Teorema de Łos, $\mathcal{L} \models \sigma$, ou seja, $\mathcal{L}$ é uma estrutura para L' que satisfaz cada um dos axiomas do grupo Ax e, portanto, uma lógica abstrata.

Este último fato sugere uma idéia importante para a combinação de sistemas lógicos, por exemplo na linha da chamada Semântica de Sociedades (v. [30]), pois é possível, pelo resultado ora exposto, considerar o ultraproduto $\mathcal{L}$ como a lógica global dos 'agentes' locais representados pelas lógicas $\mathcal{L}_i$, em certo sentido como o resultado de um processo de combiná-las.

Outros resultados importantes podem ser igualmente importados da Teoria de Modelos para a teoria das lógicas abstratas conforme apresentada aqui.

Definimos alguns conceitos, para fórmulas φ de alguma linguagem bissortida L'. Diz-se que φ é uma Π^0_1-*fórmula* se $\varphi = \forall x_1 ... \forall x_n \psi$, onde cada x_i é uma variável de sorte $\mathbf{A}_1$ ou $\mathbf{A}_2$ e ψ não possui quantificadores. Diz-se que φ é uma Π^0_2-*fórmula* se $\varphi = \forall x_1 ... \forall x_n \exists y_1 ... y_m \psi$, onde cada x_i e y_i é uma variável de sorte $\mathbf{A}_1$ ou $\mathbf{A}_2$ e ψ não possui quantificadores. Por fim, diz-se que φ é uma *fórmula positiva* se φ não contém os símbolos $\rightarrow$ e $\neg$.

Em Teoria de Modelos, prova-se: se $\mathbb{T}$ é uma teoria fechada (i.e., contém o seu próprio conjunto de conseqüências) e $\mathbb{T}$ é axiomatizável por Π^0_1-fórmulas, então $\mathbb{T}$ é preservada por submodelos (ou seja, dado um modelo $\mathcal{A}$ de $\mathbb{T}$, toda subestrutura $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ também é modelo de $\mathbb{T}$). Adaptando para o contexto das lógicas abstratas: se uma lógica abstrata $\mathcal{L}$ satisfaz um conjunto $\mathbb{T}$ de Π^0_1-fórmulas, então toda sublógica $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ também satisfaz $\mathbb{T}$.

Quando apresentarmos os morfismos entre lógicas abstratas (chamados '*transfers*'), seremos capazes de enunciar uma importante propriedade, relativa à preservação de fórmulas positivas.

Uma qualidade notável da presente apresentação de lógicas abstratas como estruturas de primeira ordem é que elas se prestam como uma formalização da teoria da Lógica Universal, tal como proposta por Béziau. Esta consiste numa conceitualização dos sistemas lógicos como uma determinada classe de estruturas matemáticas fechadas sob uma relação de conseqüência, sobre a qual não são impostas a princípio quaisquer restrições (como na teoria do operador de conseqüência de Tarski), e sem referência, no bojo da teoria, a conectivos. Estes últimos podem ser introduzidos, contudo, mediante a introdução da noção de *assinaturas* (no caso em que consideramos, *proposicionais*) e aquelas (as restrições sobre a relação), são obtidas pela enunciação de determinadas propriedades. No presente contexto (de nossa definição de lógicas abstratas), essas propriedades podem ser escritas como sentenças da linguagem a que se referem as estruturas de que dispomos, verificadas por algumas delas e não por outras.

Consideremos as seguintes propriedades de lógicas abstratas (standard):

[A] $\forall x(s(x) \vdash x)$ (Auto-dedutividade);

[M∞] $\forall Y_1 \forall Y_2 \forall x[((Y_1 \vdash x) \wedge (Y_1 \subseteq Y_2)) \rightarrow Y_2 \vdash x]$ (Monotonicidade infinita);

[Y∞] $\forall Y_1 \forall Y_2 \forall x[(Ent(Y_1, Y_2) \wedge (Y_2 \vdash x)) \rightarrow Y_1 \vdash x]$ (Silogismo infinito);

[AMY] $\equiv_{def}$ [A] $\wedge$ [M∞] $\wedge$ [Y∞];

[H∞] $\forall Y_1 \forall Y_2 \forall Y_3 \forall x[(Ent(Y_1, Y_2) \wedge (Y_2 \Cup Y_3 \vdash x)) \rightarrow Y_1 \Cup Y_3 \vdash x]$ (Lei de Herz infinita);

[N] $\forall Y_1 \forall x[(Y_1 \vdash x) \leftrightarrow \forall Y_2(Ent(Y_2, Y_1) \rightarrow (Y_2 \vdash x))]$ (Lei Normal).

Temos os seguintes resultados:

(i) [A1] e [Y∞] implicam em [M∞];

(ii) Se [A1] vale, então [Y∞] é equivalente a [H∞];

(iii) [N] é equivalente a [AMY].

Suponhamos $Y_1 \subseteq Y_2$ e $Y_2 \vdash x$. Por [A1], $Ent(Y_2, Y_2)$, ou seja, $\forall z(z \in Y_2 \rightarrow Y_2 \vdash z)$. Mas, como $Y_1 \subseteq Y_2$, $\forall z(z \in Y_1 \rightarrow z \in Y_2)$, e então $\forall z(z \in Y_1 \rightarrow Y_2 \vdash z)$, i.e., $Ent(Y_2, Y_1)$. Mas, pelas nossas hipóteses, $Y_2 \vdash x$. Logo, por [Y∞], $Y_2 \vdash x$, ou seja, temos [M∞], provando (i). Para (ii), suponhamos $Ent(Y_1, Y_2)$ e $(Y_2 \Cup Y_3 \vdash x)$. Como $Y_1 \subseteq Y_1 \Cup Y_3$, então como para cada $x \in Y_2$, $Y_1 \vdash x$, para todos eles, por [M∞], $Y_1 \Cup Y_3 \vdash x$, ou seja, $Y_1 \Cup Y_3 \vdash Y_2$. Mas $Y_1 \Cup Y_3 \vdash Y_3$, dado que $Y_3 \subseteq Y_1 \Cup Y_3$ (aplicando [A1]). E então $Y_1 \Cup Y_3 \vdash Y_2 \Cup Y_3$. Se a isso acrescentarmos que $(Y_2 \Cup Y_3 \vdash x)$ (hipótese), temos, usando [Y∞], que $(Y_1 \Cup Y_3 \vdash x)$, e demonstramos [Y∞] $\rightarrow$ [H∞] (usando [A1]). Como [Y∞] é um caso particular de [H∞], a saber, o caso em que $Y_3 = \emptyset$, temos de imediato [H∞] $\rightarrow$ [Y∞], e então demonstramos o que pretendíamos. Para (iii), suponhamos primeiro [AMY]. De $(Y_1 \vdash x)$, se $Ent(Y_2, Y_1)$, então temos $(Y_2 \vdash x)$ imediatamente por [Y∞]. Para a direção conversa, se $(Y_1 \nvdash x)$, então existe Y_2 $(= Y_1)$ tal que, por [A1] (obtenível por sucessivas aplicações de [A] e [M∞], usando as uniões), $Ent(Y_2, Y_1)$ e $(Y_1 \nvdash x)$, de modo que $\neg\forall Y_2(Ent(Y_2, Y_1) \rightarrow (Y_2 \vdash x))$. Usando a contrapositiva, temos então $\forall Y_2(Ent(Y_2, Y_1) \rightarrow (Y_2 \vdash x)) \rightarrow (Y_1 \vdash x)$, demonstrando que [AMY] $\rightarrow$ [N]. Supondo agora [N], se $Ent(Y_1, Y_2)$ e $(Y_2 \vdash x)$, então temos, pelo lado $\rightarrow$ de [N], $(Y_1 \vdash x)$, provando [Y∞]. Assumamos $x \in Y_1$. Podemos, então, ler $Ent(Y_2, Y_1)$ como $(Y_2 \vdash a \wedge \forall y(y \in Y_1 \backslash \{x\} \rightarrow Y_2 \vdash y))$. Mas disso podemos inferir que $\forall Y_2(Ent(Y_2, Y_1) \rightarrow (Y_2 \vdash x))$, donde, pelo lado $\leftarrow$ de [N], obtemos $Y_1 \vdash x$, provando então [A1]. Mas [A1] implica em [A] e [A1] e [Y∞] implicam em [M∞], e então temos o resultado que esperávamos, ou seja, (iii).

Perceba-se que os axiomas [A1] e [Y∞] são equivalentes aos axiomas tarskianos e, portanto, suficientes para representar as propriedades gerais dos sistemas hilbertianos para os quais Tarski idealizara seus axiomas. Temos:

(a)[Y∞] $\wedge$ [A1] $\vdash$ [A2] $\wedge$ [A3]. Logo, toda lógica $\mathcal{L}$ satisfazendo [Y∞] e [A1] é tarskiana.

(b) [A2] $\wedge$ [A3] $\wedge$ [Ax6] $\vdash$ [Y∞]. Logo, toda lógica tarskiana $\mathcal{L}$ deve satisfazer [Y∞] e [A1].

(c) Uma lógica $\mathcal{L}$ é tarskiana sse satisfaz [Y∞] e [A1].

O item (a) segue do fato de que [A3], ou a transitividade, é uma conseqüência direta do axioma [Y∞], e, como já mostramos, [A2] segue de [A1] e [A3]. O item (b) segue da garantia da existência de um conjunto de conseqüências para cada conjunto de fórmulas [Ax6] (garantido pelo fato de que $\mathcal{L}$ é uma lógica abstrata) junto com [A3]. Já o item (c) é um corolário imediato dos dois itens anteriores.

Podemos então definir lógicas como cálculos (sistemas) de Hilbert. Seja $C = \{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma assinatura proposicional (como as que definimos acima), onde cada C_k é um conjunto de conectivos de aridade k. Seja L^C e extensão de L obtida pelo acréscimo de um símbolo de função $f : \mathbf{form}^k \longrightarrow \mathbf{form}$ correspondente a cada elemento dos conjuntos C_k dados. Em particular, cada $p \in C_0$ é uma constante de sorte **form**. Uma *especificação de cálculo* *de Hilbert proposicional* é definida como um par $\langle C, R\rangle$, onde C é uma assinatura proposicional e R um conjunto de sentenças de L^C da forma

$$\forall(\mathbf{s}(\xi_1, ..., \xi_n) \vdash \xi) \text{ e } \forall(\mathbf{0} \vdash \xi);$$

onde $\forall\Phi$ denota o fecho universal da fórmula Φ, e $\mathbf{s}(\xi_1, ..., \xi_n)$ denota o termo $\mathbf{s}(\xi_1)$, se $n = 1$ ou $(...\mathbf{s}(\xi_1)\Cup...)\Cup\mathbf{s}(\xi_n)$, se $n \geq 2$. Tomando uma especificação $E = \langle C, R\rangle$, obtemos a lógica abstrata standard $\mathcal{L}_E = \langle A, P, \vdash_{\mathcal{L}_E}; C_{\mathcal{L}_E}\rangle$ sobre L^C definida da seguinte forma:

- A é a álgebra livre gerada por $C_{\mathcal{L}_E} = \{(C_{\mathcal{L}_E})_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (onde $c_{\mathcal{L}_E} \neq c'_{\mathcal{L}_E}$ se $c \neq c'$;

- $P = \mathcal{P}(A)$;

- $\vdash_{\mathcal{L}_E} = \bigcap\{\vdash_1 \subseteq P \times A : \langle A, P, \vdash_1; C_{\mathcal{L}_E}\rangle \models Ax \cup R \cup \{[A1], [Y\infty]\}\}$.

Dado $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq A$, dizemos que α é *demonstrável a partir de* Γ em $\mathcal{L}_E$ se

$$\mathcal{L}_E \models (Y_1 \vdash x_1)[\Gamma, \alpha].$$

Como $\mathcal{L}_E$ satisfaz $[A1]$ e $[Y\infty]$ e, portanto ((c) acima), $\mathcal{L}_E$ é tarskiana. Vê-se claramente que a especificação $E = \langle C, R\rangle$ induz um cálculo proposicional hilbertiano H_E definido como a seguir:

- a linguagem de H_E é a álgebra livre gerada por C (ou seja, o conjunto dos termos L^C-fechados de sorte **form**);

- os axiomas-esquema de H_E são todas as fórmulas-esquema ξ tais que $\forall(\mathbf{0} \vdash \xi)$ está em R;

- as regras-esquema de inferência de H_E são todas as regras-esquema da forma

$$\frac{\xi_1, \ldots, \xi_n}{\xi}$$

  onde $\forall(\mathbf{s}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \vdash \xi) \in R$.

Nas fórmulas-esquema acima referidas, as variáveis livres constituem o que, numa apresentação usual de uma lógica proposicional, são as *variáveis proposicionais* (como o conjunto $\mathcal{V}$ apresentado na seção 1.1.1). As variáveis proposicionais representam fórmulas arbitrárias da linguagem (no presente caso, da linguagem de H_E). Na definição anterior de sistema de Hilbert que demos, essa condição era suprida pela noção de substituição sobre os esquemas (em geral não faz sentido falar em variáveis proposicionais *livres* ou *quantificadas*, mas aqui queremos interpretar as proposições como *objetos* de uma teoria de primeira ordem, daí a mudança de apresentação). Se $K \cup \{\xi\}$ é um conjunto de termos L^C-fechados de sorte **form**, denotamos por $\xi^{\mathcal{L}_E}$ a interpretação de ξ em $\mathcal{L}_E$ e por $K^{\mathcal{L}_E}$ o conjunto $\{\xi'^{\mathcal{L}_E} : \xi' \in K\}$. Como antes, $K \vdash_{H_E} \xi$ significa que há uma derivação de ξ a partir de K em H_E.

Provamos então que o sistema de Hilbert H_E é de fato representado adequadamente pelo formalismo que assumimos. Ou seja, se $K \cup \{\xi\}$ é um conjunto de termos L^C-fechados de sorte **form**, então $K \vdash_{H_E} \xi$ sse $\mathcal{L}_E \models (Y_1 \vdash x_1)[K^{\mathcal{L}_E}, \xi^{\mathcal{L}_E}]$. Supondo $K \vdash_{H_E} \xi$, provaremos $\mathcal{L}_E \models (Y_1 \vdash x_1)[K^{\mathcal{L}_E}, \xi^{\mathcal{L}_E}]$ por indução no comprimento n de prova em H_E de ξ a partir de K. Para $n = 1$, há duas possibilidades: $\xi \in K$ ou ξ é uma instância $\xi'(\xi_1, ..., \xi_k)$ de um axioma esquema $\xi'(x_1, ..., x_k)$ (sendo $x_1, ..., x_k$ as variáveis livres do L^C-termo ξ' e $\xi_1, ..., \xi_k$ são termos L^C-fechados de sorte **form**, ou seja, C-fórmulas). No primeiro caso, o resultado é imediato, já que $\mathcal{L}_E$ é tarskiana (e portanto satisfaz o axioma [A1]). No segundo, há uma fórmula da forma $\forall(\mathbf{0} \vdash \xi')$ em R, e como $\mathcal{L}_E \models R$, então $\mathcal{L}_E \models (\mathbf{0} \vdash x_1)[\xi^{\mathcal{L}_E}]$.

Como $\emptyset = \mathbf{0}^{\mathcal{L}_E} \subseteq K^{\mathcal{L}_E}$ e $\mathcal{L}_E$ é tarskiana (satisfazendo, portanto, [A2]), $\mathcal{L}_E \models (Y_1 \vdash x_1)[K^{\mathcal{L}_E}, \xi^{\mathcal{L}_E}]$. Assumindo o resultado demonstrado para todas as provas de comprimento $\leq n$, suponhamos ξ provado a partir de K em H_E em $n+1$ passos. Se ξ é uma instância de um axioma de H_E ou um elemento de K, a prova é como acabamos de mostrar. Se, por outro lado, ξ é $\xi'(\xi_1, ..., \xi_k)$ obtida de $\xi'_m(\xi_1, ..., \xi_k)$,...,$\xi'(\xi_1, ..., \xi_k)$ por uma instância de uma regra

$$\frac{\xi'_1(x_1, ..., x_k), \ldots, \xi'_n(x_1, ..., x_k)}{\xi'(x_1, ..., x_k)}$$

em H_E, então, pela nossa hipótese de indução, temos que $\mathcal{L}_E \models (Y_1 \vdash x_1)[K^{\mathcal{L}_E}, \xi'_i(\xi_1, ..., \xi_k)^{\mathcal{L}_E}]$, para $i = 1, ..., m$. Mas, como $\mathcal{L}_E \models R$, então, em particular, $\mathcal{L}_E \models (Y_1 \vdash x_1)[\{\xi'_1(\xi_1, ..., \xi_k), \ldots, \xi'_n(\xi_1, ..., \xi_k)\}, \xi^{\mathcal{L}_E}]$, donde, pelo fato de $\mathcal{L}_E$ ser tarskiana (validando [A1], [A2] e [A3]), obtemos $\mathcal{L}_E \models (Y_1 \vdash x_1)[K^{\mathcal{L}_E}, \xi^{\mathcal{L}_E}]$ e concluímos nossa prova por indução. Para o lado converso (de $\mathcal{L}_E \models (Y_1 \vdash x_1)[K^{\mathcal{L}_E}, \xi^{\mathcal{L}_E}]$ provar $K \cup \{\xi\}$), o resultado é imediato, considerando o fato de que $\mathcal{L}_E = \langle A, P, \vdash_1; C_{\mathcal{L}_E} \rangle \models Ax \cup R \cup \{[A1], [Y\infty]\}$, com $\vdash_1 = \{\langle K'^{\mathcal{L}_E}, \xi'^{\mathcal{L}_E} \rangle : K' \vdash_{H_E} \xi'\}$. Portanto, como desejávamos, temos uma forma de representar fielmente, na linguagem das lógicas abstratas estendidas, lógicas apresentadas como sistemas de Hilbert (com todas as suas características sintáticas relevantes).

A definição oferecida de lógicas (proposicionais) abstratas como estruturas de primeira ordem é uma maneira bastante eficiente de representar sistemas lógicos em sua apresentação sintática (é imediata, por exemplo, a conversão dos exemplos de sistemas de Hilbert dados na seção 1.1.1 em estruturas do tipo considerado) e permite uma definição de morfismo entre lógicas que, como veremos adiante, é uma das mais promissoras para a resolução de problemas das combinações entre lógicas e de problemas mais gerais relacionados às traduções entre lógicas. No entanto, vemos que a mesma perspectiva não se presta para a representação de lógicas de acordo com suas propriedades *semânticas*, que requeriria a representabilidade de conceitos de ordem superior. Ainda que se definissem os valores de verdade como constantes da linguagem, teríamos, para definir as valorações, que quantificar sobre o domínio das *funções*. Considerando, por exemplo, a noção de conseqüência lógica, esta seria representada como a preservação da verdade das premissas à conclusão em *todas as valorações* das variáveis. Um formalismo de primeira ordem é simplesmente inadequado para tanto. Considerações análogas apontam para a irrepresentabilidade de lógicas abstratas quantificadas. A representação de sistemas de conseqüências múltiplas parece esbarrar na mesma espécie de dificuldade, uma vez que a definição de inferência para tais sistemas baseia-se na operação com asserções meta-teóricas, que incluem em si a noção de conseqüência. Parece pouco viável um tratamento modelo-teorético daquela perspectiva que não faça apelo a conceitos de ordem superior.

Poderíamos, no entanto, preservar a noção de meta-tradução (ver próxima seção), se, para cada comprimento de meta-propriedade, formularmos um axioma definidor, associando-lhe um símbolo específico da linguagem (estendida), correspondente a uma relação. Este último expediente pode ser usado no contexto já desenvolvido das lógicas abstratas e espera-se com ele obter resultados concretos de preservação.

Capítulo 2

Traduções entre lógicas

Uma vez que temos uma (ou mais) noção unificada sob a qual se classificam diferentes lógicas e podemos representar suas respectivas propriedades de uma maneira homogênea, que permite comparações entre lógicas distintas (de acordo com uma dada apresentação), podemos abordar de maneira sistemática e conseqüente o conceito de *tradução* entre lógicas (seguiremos fundamentalmente as apresentações de [45], [17], [18], [19], [11] e [25]).

As primeiras traduções entre lógicas foram apresentadas ainda nas primeiras décadas do século XX, em trabalhos de Andrey Kolmogorov (1925) [41], M. V. Glivenko (1929) [34], Kurt Gödel (1933) [35] e [36] e Gerhard Gentzen (também 1933) [33]. Tratavam-se de traduções ou, em todo caso, de interpretações[1] da lógica (ou da aritmética) clássica na lógica (ou aritmética) intuicionista, consistindo cada uma em uma função que mapeava o conjunto de fórmulas da primeira no da segunda, sobre o qual então se demonstravam determinados resultados. Verificava-se que todos eles preservavam teoremicidade (se uma fórmula é teorema na lógica ou aritmética clássica, sua tradução é teorema na lógica ou aritmética intuicionista e vice-versa). O objetivo era então relativizar o problema da consistência dos sistemas clássicos à demonstração da consistência dos sistemas intuicionistas. Estes, de menor poder dedutivo que aqueles, se fossem consistentes garantiriam a consistência dos seus correlatos clássicos, demonstrativamente mais fortes. Temos então a preservação de duas importantes meta-propriedades: demonstrabilidade e consistência. [2]

Mas o que uma tradução deve de fato preservar? Algumas restrições po-

[1]O único a realmente empregar o termo "tradução" foi Gödel. A compreensão da interpretação de uma lógica em outra como tradução foi especialmente esclarecida a partir dos trabalhos do grupo de Campinas - v. seção 2.2.

[2]Nas "traduções" de Kolmogorov e Gentzen, preservava-se também derivabilidade.

dem ser assumidas sobre as funções que levam fórmulas da linguagem de uma lógica àquela de uma outra, para caracterizá-las assim efetivamente como *traduções*. Há uma certa expectativa de que traduções preservem, de alguma forma, *significado*, de forma análoga ao que acontece com as traduções entre línguas naturais. Geralmente, a teoremicidade é uma propriedade muito fraca de uma lógica para se supor que constitua sozinha o seu significado (ou uma parte considerável dele). No início do trabalho, assumimos, com Tarski, que a noção essencial definidora de uma lógica é a noção de *conseqüência lógica*, e deveria, portanto, ser esperado que essa mesma noção pudesse ser preservada através de traduções. A seguir veremos algumas definições gerais de tradução entre lógicas.

2.1 A primeira definição

Em 1968 foi proposta por Dag Prawitz e Per-Erik Malmnäs [47] a primeira definição geral de tradução entre lógicas, como *interpretação*, enfocando a preservação de meta-propriedades (mas não do tipo que definimos na seção 1.3). Dada uma função que mapeie as fórmulas de uma lógica naquelas de uma outra, essa função pode constituir uma *interpretação* de uma lógica na outra ou uma *interpretação com respeito à derivabilidade*, e pode ser definida como *esquemática*, se satisfizer, em cada um dos casos, dadas condições.

Definimos uma *interpretação* de uma lógica L_1 em uma lógica L_2 como uma função f que associa fórmulas da linguagem de L_2 àquelas da linguagem de L_1, atendendo, para toda fórmula A da linguagem de L_1, o seguinte critério:

$$\vdash_{L_1} \varphi \text{ sse } \vdash_{L_2} f(\varphi).$$

L_1, assim, seria *interpretável* em L_2 através de f.

Dizemos que uma lógica L_1 é *interpretável com respeito à derivabilidade* por uma função f como acima em uma lógica L_2 se, para todo conjunto $\Gamma \cup \{A\}$ de fórmulas de L_1:

$$\Gamma \vdash_{L_1} \varphi \text{ sse } f(\Gamma) \vdash_{L_2} f(\varphi).$$

Neste caso, temos uma definição de interpretação (tradução) que preserva a mais fundamental propriedade de conseqüência sintática. Poderíamos considerar uma condição similar preservando conseqüência semântica (e uma similar à primeira preservando validade), obtendo um resultado mais forte, pois, como vimos, nem sempre a conseqüência lógica definida em termos semânticos pode ser expressa por uma derivação sintática. Mas há uma condição adicional de grande importância, que assegura que as fórmulas da linguagem de uma lógica não são traduzidas arbitrariamente em quaisquer outras da segunda lógica. Deve haver uma certa regularidade, recursivamente definida. Dizemos então que uma dada f como acima é *esquemática* se for definida segundo as seguintes cláusulas:

1. Define-se o valor de f para as fórmulas atômicas;

2. Para cada constante lógica (conectivo) c, dá-se uma definição recursiva para fórmulas que apresentam c como símbolo principal.

Podemos então distinguir interpretações esquemáticas e interpretações esquemáticas com respeito à derivabilidade. Esta última se aproxima mais de uma noção de tradução, se esperamos preservar o mais fundamental (no sentido tarskiano) conceito lógico de *conseqüência*.

2.2 Funções contínuas e morfismos lógicos

Em 1973, Donald J. Brown e Roman Suszko [6] propuseram uma maneira de relacionar lógicas que preconiza uma noção de tradução entre lógicas (próxima àquela trabalhada independentemente pelo grupo de Campinas), tomando lógicas como estruturas de tipo $\langle S, Cn\rangle$ ou $\langle C, Cn\rangle$, ou seja, como *sistemas de conseqüência*, que eles chamaram *sistemas de fecho*, por sua analogia com estruturas topológicas. O segundo tipo de sistema de conseqüência, ou seja, aqueles gerados por uma álgebra (assinatura) constituía o que eles denominaram a classe das *lógicas abstratas* (não confundir com as lógicas abstratas que definimos acima). Usaremos, porém, por simplicidade, somente a denominação de "sistemas de conseqüência", e especificaremos quando a linguagem é determinada por uma assinatura.

Sejam $\langle S_1, Cn_1 \rangle$ e $\langle S_2, Cn_2 \rangle$ dois sistemas de conseqüência (espaços de fecho). Uma *função contínua* $f : \langle S_1, Cn_1 \rangle \longrightarrow \langle S_2, Cn_2 \rangle$ é uma função $f : S_1 \longrightarrow S_2$ tal que, para todo $X \subseteq S_1$:

$$f(Cn_1(X)) \subseteq Cn_2(f(X)).$$

Em termos de relação de conseqüência:

$X \vdash_1 x$ implica em que $f(X) \vdash_2 f(x)$.

Tal abordagem segue de perto os métodos da topologia geral e, de fato, as funções contínuas entre espaços de fecho (sistemas de conseqüência) são correlatos precisos das funções contínuas entre espaços topológicos. Aqui é usada pela primeira vez uma apresentação geral de lógicas como *estruturas* para a definição de algo que se aproxima do conceito de tradução (funções contínuas), o que nos leva à noção algébrica de *morfismos* entre estruturas, ou seja, as interpretações mútuas entre sistemas de lógica passam a ser vistos como um caso particular de uma operação matemática mais geral (a partir do pressuposto de que lógicas nada mais são do que um tipo particular de estrutura matemática). Note-se ainda que a preservação da conseqüência ou derivabilidade não abrange necessariamente os dois sentidos (trocamos o 'se, e somente se' pelo 'implica em que').

O grupo de Campinas (GTAL), com trabalhos como o de Hercules Feitosa (1997) [28] e de Jairo da Silva, Itala D'Ottaviano e Antonio Sette (1999) [19] (como também [12], [21], [22], [23], [24] e [29]), trabalha com a mesma definição de tradução (como função contínua de espaços de fecho/sistemas de conseqüência), estabelecendo, porém as seguintes distinções ($\mathcal{L}_1 = \langle C_1, \vdash_{\mathcal{L}_1} \rangle$, $\mathcal{L}_2 = \langle C_2, \vdash_{\mathcal{L}_2} \rangle$ e $f : L(C_1) \longrightarrow L(C_2)$ é uma função contínua):

(a) f é uma *tradução fraca*[3] se preserva teoremicidade, ou seja, para toda fórmula φ de $L(C_1)$, $\vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ implica em que $\vdash_{\mathcal{L}_2} f(\varphi)$;

(b) f é uma *tradução* se preserva derivabilidade, ou seja, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C_1)$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ implica em que $f(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_2} f(\varphi)$;

(c) f é uma *tradução conservativa fraca*[4] se preserva teoremicidade em duplo sentido, ou seja, para toda fórmula φ de $L(C_1)$, $\vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ sse $\vdash_{\mathcal{L}_2} f(\varphi)$;

(d) f é uma *tradução conservativa*[5] se preserva derivabilidade em duplo sentido, ou seja, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C_1)$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ sse $f(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_2} f(\varphi)$.

Observamos que os mesmos conceitos podem ser definidos para uma relação de conseqüência $\models$, definida semanticamente, substituindo, nos itens acima, "teoremicidade" por "validade" e "derivabilidade" por "conseqüência semântica". Notamos também que f, tal como definida, é uma função entre as linguagens das lógicas dadas, mas não necessariamente um morfismo lógico, i.e., não necessariamente mapeia a assinatura C_1 na assinatura C_2, mas podemos nos restringir a esse caso, obtendo, como vimos, uma noção de tradução mais forte. A noção de tradução conservativa garante que a lógica L_2 pode afirmar em seu domínio, sobre as fórmulas traduzidas, tudo aquilo que a lógica L_1 o faz sobre suas fórmulas originais, e vice-versa, no que se refere à relação de conseqüência empregada em ambas. A de tradução fraca retoma a concepção de Prawitz e Malmnäs de interpretabilidade (simples, não com respeito à derivabilidade).

Brown e Suszko [6] propõem, como refinamento do método ora descrito, a noção de *morfismo lógico* como uma função contínua entre sistemas de conseqüência que preserva composicionalidade a partir de construtores (conectivos). Mais precisamente, um *morfismo lógico* $f : \langle C_1, Cn_1\rangle \longrightarrow \langle C_2, Cn_2\rangle$, onde $\langle C_1, Cn_1\rangle$ e $\langle C_2, Cn_2\rangle$ são sistemas de conseqüência ("lógicas abstratas") de mesmo tipo (i.e., para cada $c_1 \in C_1^n$, existe $c_2 \in C_2^n$ e vice-versa), é uma função contínua $f : \langle L(C_1), Cn_1\rangle \longrightarrow \langle L(C_2), Cn_2\rangle$ que é também um homomorfismo $f : C_1 \longrightarrow C_2$ entre as respectivas assinaturas (um homomorfismo é a versão algébrica da noção que definimos de morfismo entre estruturas -

[3]Esta modalidade não é considerada, nos trabalhos do grupo de Campinas, como propriamente uma *tradução*, mas a incluímos aqui, seguindo a literatura hoje corrente e mantendo o espírito da definição de Prawitz e Malmnäs.

[4]Ocorre o mesmo que com as traduções fracas. Ver nota anterior.

[5]Conceito desenvolvido em [28]

na verdade a versão original -, eliminando a parte relacional e se restringindo à preservação de funções).

A relação de conseqüência, em ambos os casos, pode ser apresentada como sintática ou semântica, mas teria por imperativo, para a obtenção de resultados concretos, uma representação geral de um caso e de outro. No primeiro caso, podemos recorrer aos sistemas de Hilbert tais como os definimos. No segundo, poderíamos usar *sistemas de interpretação*, que não definimos aqui.

À semelhança da definição de *interpretação esquemática* de Prawitz e Malmnäs, a noção de morfismo lógico permite a preservação da composicionalidade das fórmulas da lógica original para a lógica traduzida. No entanto, fá-lo mediante recurso a conceitos matemáticos gerais, como o de morfismo. O resultado obtido é mais forte que o de Prawitz e Malmnäs, pois aquele só exigia que as fórmulas traduzidas pudessem ser representadas de forma recursiva, sem especificar o método, sendo, portanto, mais livre que a noção de morfismo. Esta requer que as assinaturas dos dois sistemas de conseqüência compartilhem o tipo de similaridade, e que cada construtor (conectivo) da primeira lógica (sistema de conseqüência) encontre sua tradução em um construtor de mesma aridade da segunda.

Ryszard Wójcicki, em 1988 [59], fornece uma definição de tradução que mantém a generalidade matemática da definição de Brown e Suszko, mas produz resultados menos fortes, como a de Prawitz e Malmnäs. Dadas duas lógicas $\langle C_1, Cn_1\rangle$ e $\langle C_2, Cn_2\rangle$, uma *tradução* $f : \langle C_1, Cn_1\rangle \longrightarrow \langle C_2, Cn_2\rangle$ é uma função contínua $f : \langle L(C_1), Cn_1\rangle \longrightarrow \langle L(C_2), Cn_2\rangle$ tal que:

- existe uma fórmula $\gamma_0(p_1)$ dependendo apenas da variável (proposicional) p_1 tal que $f(p) = \gamma_0(p)$ para toda variável $p \in \mathcal{V}$;

- para todo conectivo n-ário $c \in Cn$, existe uma fórmula

  $$\varphi_c(p_1, ..., p_n) \in L(C2)$$

  dependendo das variáveis $p_1, ..., p_n$ tal que, para todas as fórmulas $\psi_1, ..., \psi_n \in L(C1)$, vale:

  $$f(c(\psi_1, ..., \psi_n)) = \varphi_c(f(\psi_1), ..., f(\psi_n)).$$

A noção de morfismo lógico segue da definição de Wójcicki como caso particular. Os morfismos lógicos são uma abordagem importante para as traduções pela facilidade de manipulação e pelo "bom comportamento" em termos de Teoria de Categorias, que leva a definir propriedades importantes como construções universais. Esse fato é particularmente interessante para o contexto das combinações entre lógicas. Apesar de, como noção geral de tradução entre lógicas, ser mais forte do que se poderia esperar, excluindo de seu escopo muitas das traduções usualmente efetuadas entre lógicas (por exemplo as interpretações clássicas de Kolmogorov, Glivenko, Gödel e Gentzen da lógica clássica na intuicionista), para a tarefa de combinar lógicas é uma noção mais apropriada. Quando se combinam duas lógicas em uma lógica mais complexa, espera-se que as duas estejam nela representadas de alguma forma, com todos os seus construtores devidamente preservados. Apresenta interesse particular para a técnica da *fibrilação*, definida para lógicas apresentadas homogeneamente como um tipo de estrutura matemática.

2.3 Traduções gramaticais e semanticamente fiéis (Epstein)

Epstein também define uma noção geral de traduções entre lógicas [25], que se aproxima daquela de Prawitz e Malmnäs, pelos refinamentos permitidos (similares às noções de interpretação, interpretação com respeito à derivabilidade e interpretação gramatical), mas com uma ênfase pronunciada sobre as propriedades semânticas dos sistemas. Epstein se debruça sobre a questão da *preservação de significado*, e então propõe um refinamento adicional, na forma das *traduções semanticamente fiéis*, para representar uma concepção desejável de tradução.

Dadas duas lógicas L_1 e L_2, seja f uma função f de $L(L_1)$ em $L(L_2)$ (ver seção 1.1.1). Diz-se de f que *preserva validade* se, para toda fórmula φ de $L(L_1)$:

$\models_{L_1} \varphi$ sse $\models_{L_2} f(\varphi)$.

Uma *tradução* de L_1 em L_2 é uma função entre as respectivas linguagens tal que, para todo $\Gamma \cup \{a\} \subseteq L(L_1)$,

$$\Gamma \models_{L_1} \varphi \text{ sse } f(\Gamma) \models_{L_2} f(\varphi).$$

Seja C_1 a assinatura da lógica L_1, $\mathcal{V}$ o conjunto das suas variáveis proposicionais, uma função $f : L(L_1) \longrightarrow L(L_2)$ é dita uma *função gramatical* se, para cada $p \in \mathcal{V}$, existe um esquema $\gamma_0(p)$ de $L(L_2)$ tal que:

$$f(p) =_{def} \gamma_0(p),$$

e, dado $c \in C_1^n$, para cada fórmula $c(\varphi_1, ..., \varphi_n)$, há um esquema $\delta(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de $L(L_2)$ tal que:

$$f(c(\varphi_1, ..., \varphi_n)) =_{def} \delta(\varphi_1, ..., \varphi_n)$$

Uma função f gramatical, se é uma tradução, diz-se uma *tradução gramatical* (adaptamos aqui a definição original de Epstein, que fixa os símbolos da linguagem como a união do conjunto de variáveis proposicionais e do conjunto $\{\neg, \rightarrow\}$). As definições podem ser apresentadas para uma relação de conseqüência sintática, mas uma vez que Epstein está interessado na preservação de significado, a abordagem semântica tem premência.

O diferencial principal da noção de tradução de Epstein está, contudo, na sua definição de *tradução semanticamente fiel.* Para tanto, define primeiro as noções de equivalência elementar (entre modelos de atribuição de conjuntos) e de preservação de modelo.

Sejam então L_1 e L_2 duas lógicas, $L(L_1)$ e $L(L_2)$ suas linguagens e $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ classes de modelos de atribuição de conjuntos que determinam as semânticas, respectivamente, de L_1 e L_2. Dizemos que dois modelos, $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ são *elementarmente equivalentes* se, para toda fórmula φ:

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi \text{ sse } \mathcal{M}_2 \models \varphi,$$

onde $\models$ representa a relação de conseqüência para alguma lógica (aqui, consideremos para L_1 ou L_2). Dizemos então que uma função $f : L(L_1) \longrightarrow L(L_2)$ *preserva modelo sob equivalência elementar* com respeito a $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ se f induz uma função de $\mathbf{E}_2$ em $\mathbf{E}_1$ que traduz um modelo $M_1 = \langle v, s, S\rangle$ em um modelo $M_2 = \langle f(v), f(s), f(S)\rangle$ (ocultamos aqui a referência às relações que governam as respectivas tabelas de verdade), tal que:

- $f(S) \subseteq S$;
- $f(s(\varphi)) = s(f(\varphi))$;
- $f(v(\varphi)) = v(f(\varphi))$;
- para todo $\mathcal{M}_1 \in \mathbf{E}_1$, existe $\mathcal{M}_2 \in \mathbf{E}_2$ tal que $f(\mathcal{M}_1)$ é elementarmente equivalente a $\mathcal{M}_2$.

Dizemos simplesmente que $f : L(L_1) \longrightarrow L(L_2)$ *preserva modelo* com respeito a $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ se ela o preserva sob equivalência elementar e é, além disso, sobrejetora.

Por fim, define-se uma tradução *semanticamente fiel* como uma tradução gramatical que preserva modelo com respeito a semânticas fortemente completas, i.e., semânticas para lógicas L (no caso, L_1 e L_2 tais que, para todo conjunto $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de fórmulas de L, $\Gamma \vdash_L \varphi$ sse $\Gamma \models_L \varphi$).

Trata-se sem dúvida de uma noção muito forte de tradução entre lógicas (embora, note-se, nem toda tradução semanticamente fiel constitua um morfismo lógico), e que admite apenas um domínio bastante restrito de lógicas. De fato, é uma forma de dizer que as duas lógicas são "maneiras diferentes de dizer a mesma coisa". Evidentemente, uma tradução semanticamente fiel não é adequada para as combinações entre lógicas, uma vez que a lógica combinada diz *mais* do que cada uma das lógicas componentes. Mas uma tradução que preserva modelo por equivalência elementar pode ser pensada como uma noção útil, se considerarmos a preservação de propriedades semânticas, mais abrangente que o domínio das propriedades sintáticas. Mas aqui, outra vez, defrontamo-nos com o problema de abdicar de uma concepção estruturalista de lógica, sobre a qual se baseiam as principais técnicas de combinações conhecidas.

2.4 *Transfers* e meta-traduções

Restringindo o nosso interesse às traduções e às combinações definidas sobre lógicas apresentadas sintaticamente, temos, seguindo a apresentação de Marcelo Coniglio e Walter Carnielli (2002) [17], uma definição de *morfismo lógico* representado no formalismo de primeira ordem que apresentamos na seção 1.4. Tais morfismos são conhecidos como *transfers*, devido à sua característica de *transferir* certas meta-propriedades de uma lógica a outra através das traduções.

Sejam $\mathcal{L}_i$ lógicas abstratas (lembrar seção 1.4) sobre L' tais que $\mathbf{form}_{\mathcal{L}_i} = A_i$ e $\mathbf{Sform}_{\mathcal{L}_i} = P_i$, para $i \in \{1, 2\}$. Um *transfer de* $\mathcal{L}_1$ *em* $\mathcal{L}_2$ é um morfismo $\langle T, T_* \rangle : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ tal que

$T_*(\Gamma) = \{T(a) : a \in \Gamma\}(= T[\Gamma])$ para todo $\Gamma \in P_1$.

Como T_* é definido a partir de T, evitamos redundância considerando a notação T para um *transfer*, ao invés de $\langle T, T_* \rangle$. Um *transfer* isomórfico entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ é chamado um *L-homeomorfismo* de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$. Um *transfer* T é *conservativo* se $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}) \in P_1^{\mathcal{L}}$ se, e somente se $(T(a_1), ..., T(a_n); T_*(\Gamma_1), ...- , T_*(\Gamma_n)) \in P^{\mathcal{L}_2}$. Se T for uma imersão elementar de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$, chamamo-lo *transfer elementar*. Por último, se $L' = L$, i.e., se T é um morfismo definido entre estruturas para a linguagem básica das lógicas abstratas, diz-se que T é uma *tradução* de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$.

Repare-se que, uma vez que '$\vdash$' está entre os símbolos de predicado de L', se T é um *transfer*, então

(T1) $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} a$ implica em que $T[\Gamma] \vdash_{\mathcal{L}_1} T(a)$,

e, sendo T um *transfer* conservativo, (T2) $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} a$ sse $T[\Gamma] \vdash_{\mathcal{L}_1} T(a)$,

que representam as condições utilizadas pelo grupo de Campinas para caracterizar as noções de *tradução* e *tradução conservativa* entre lógicas. Se $T : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ é conservativo e $P = \wp(A)$, então a imagem $T(\mathcal{L}_1)$ de $\mathcal{L}_1$ sob T é também uma lógica abstrata, i.e., também satisfaz Ax.

Como já mencionamos, alguma noção de tradução parece essencial para todos os métodos de combinação entre lógicas. Além do mais, a maior parte dos problemas reportados na literatura surgidos nos processos de combinação parecem ter origem na falha dos métodos empregados em estabelecer a preservação de determinadas metapropriedades através das traduções utilizadas. Diversas dessas metapropriedades podem ser formalizadas como atributos, no sentido que definimos, de lógicas abstratas. Daí o particular interesse no enfoque proporcionado pelos *transfers*.

Uma propriedade importante dos *transfers*, conforme mencionado na seção 1.4, concerne a preservação das chamadas meta-propriedades *positivas*, caracterizadas como *fórmulas positivas* da linguagem das lógicas abstratas (v. seção 1.4). Um resultado oriundo da Teoria de Modelos assegura: se $\mathbb{T}$ é uma teoria *fechada* (v. seção 1.4) e *consistente* (ou seja, não contém o conjunto $\{\varphi, \neg\varphi\}$ para qualquer fórmula φ), então $\mathbb{T}$ é preservada por homomorfismos, ou seja, $\mathcal{A} \models \mathbb{T}$ implica em $\mathcal{B}|_{\langle F_1[A_1], F_2[A_2]\rangle} \models \mathbb{T}$ se, e somente se, $\mathbb{T}$ possui um conjunto positivo de axiomas, i.e., $\mathbb{T}$ é gerada a partir de um conjunto de fórmulas *positivas*. Um corolário imediato, para a teoria das lógicas abstratas, é que: dada uma lógica abstrata *standard* $\mathcal{L}$ tal que $\mathbf{form}_{\mathcal{L}} = A$, $\mathbf{Sform}_{\mathcal{L}} = P = \mathcal{P}(A)$ e um *transfer* $T : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$, então $\mathcal{L} \models \varphi[a_1, ..., a_n; \Gamma_1, ..., \Gamma_m]$ implica em que $\mathcal{L}' \models \varphi[T(a_1), ..., T(a_n); T(\Gamma_1), ..., T(\Gamma_m)]$ para toda fórmula positiva φ, todo $(a_1, ...$-$, a_n) \in A^n$ e todo $\Gamma_1, ..., \Gamma_m \in P^m$. Assim, se uma lógica $\mathcal{L}$ tal que $P = \mathcal{P}(A)$ satisfaz um conjunto $\mathbb{T}$ de propriedades positivas, então a imagem de $\mathcal{L}$ sob um *transfer* $T : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ qualquer, ou seja, $T(\mathcal{L})$ (que também é uma lógica abstrata) satisfaz o mesmo conjunto $\mathbb{T}$. Isto quer dizer que dispomos de uma maneira de condicionar um *transfer* à determinação da preservação de uma classe importante de meta-propriedades.

Vemos que podemos definir como casos de *transfers* as definições de tradução e tradução conservativa dadas pelo grupo de Campinas (correspondentes à noção geral de morfismo lógico de Brown e Suszko e ao seu incremento pela substituição da condição (T1) pela condição mais forte (T2)). Mas a satisfação de uma condição como (T2) parece não bastar para a caracterização de uma boa noção de tradução. Por exemplo, uma lógica *trivial*

$\mathcal{L}_1$ pode ser traduzida conservativamente em qualquer lógica $\mathcal{L}_2$ que tenha pelo menos um teorema, digamos b, e em que possa ser feita a dedução $\{b\} \vdash_{\mathcal{L}_2} b$ para a mesma fórmula. Para isto, basta que se estabeleça uma tradução T em que $T(a) = b$ para toda fórmula a da linguagem de $\mathcal{L}_1$. Se $\mathcal{L}_2$ não é trivial, e portanto $\{b\} \nvdash_{\mathcal{L}_2} b'$ para alguma fórmula b' na linguagem de $\mathcal{L}_2$, então em que sentido o *significado* de $\mathcal{L}_1$ lhe teria sido transmitido pela tradução?

Uma explicação para esse fenômeno, dentro da perspectiva dos *transfers* [17], é que a tradução realizada não é uma imersão *elementar* de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$. Considere-se a fórmula $\psi(X)$ dada por $\exists y(X \nvdash y)$. Então $\mathcal{L}_2 \vDash \psi(X)[T(\{a\})]$, mas a testemunha $y \longmapsto b'$ não está em $T(\mathcal{L}_1)$. Considerando um *transfer* elementar entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, o problema estaria eliminado. Os *transfers* elementares se nos assemelham uma via profícua para o tratamento de problemas nas combinações entre lógicas, notadamente o problema do anti-colapso da fibrilação. Trata-se, contudo, de uma noção de tradução muito forte, uma vez que impõe a existência de uma cópia isomórfica do sistema original naquele em que é traduzido. Talvez se queira pensar que a combinação entre duas lógicas requeira uma noção bastante forte de tradução, ou se perderiam propriedades importantes, descaracterizando as lógicas componentes em sua imersão na lógica composta.

Não obstante, uma noção de tradução mais fraca do que a de *transfer* elementar, porém mais forte que a noção corrente de tradução, é a noção de *meta-tradução*, também chamada *tradução inteira* ou *integral* (*whole translation*) introduzida por Coniglio (2005) [18] (v. também [11]) . Representa-se por uma condição que pode ser acrescida às demais definições de tradução. Como no arcabouço modelo-teorético dos *transfers*, usamos aqui variáveis para fórmulas e para conjuntos de fórmulas, sendo os respectivos conjuntos dados por $\mathcal{V}$ e $\mathcal{X}$. Uma meta-tradução entre duas lógicas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ (de linguagens $L(C_1)$ e $L(C_2)$ respectivamente) é uma tradução (de algum tipo especificado, p. ex., uma tradução no sentido do grupo de Campinas) $h : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ tal que $h(p) = p$ para todo $p \in \mathcal{V} \cup C_1^0$ e $h(X) = X$ para todo $x \in \mathcal{X}$; além disso, preserva metapropriedades gerais da forma:

`se` $X_1; \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi_1, ..., \Gamma'_n; X_n \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi_n$
`então` $X; \Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$

onde $X_1, ..., X_n, X$ são elementos de $\mathcal{X}$, $\Gamma_1, ..., \Gamma_n, \Gamma$ de $\mathcal{P}(L(C_1))$ e $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi$ de $L(C_1)$. $X_1; \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi_1, ..., \Gamma'_n; X_n \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi_n$ e $X; \Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ são asserções gerais, como aquelas apresentadas na seção 1.3 no caso específico em que há somente uma fórmula do lado direito das expressões, ou seja, quando consideramos uma relação de conseqüência de tipo simples (singular).

O que queremos dizer por "preservar meta-propriedades" do tipo referido é que, sempre que:

`se` $X_1; \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi_1, ..., \Gamma'_n; X_n \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi_n$
`então` $X; \Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$

temos:

`se` $h(X_1); h(\Gamma_1) \vdash_{\mathcal{L}_2} h(\varphi_1), ..., h(\Gamma'_n); h(X_n) \vdash_{\mathcal{L}_2} h(\varphi_n)$
`então` $h(X); h(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_2} h(\varphi)$

lembrando que $h(Y) = Y$ para todo $Y \in (X)$ (assim como $h(p) = p$ para todo $p \in (V) \cup C_0$).

Tomemos, por exemplo, a meta-propriedade:

$$\frac{X; p \vdash q}{X \vdash (p \to q)}$$

Se tal propriedade vale em $\mathcal{L}_1$, ou seja:

$$\frac{X; p \vdash_{\mathcal{L}_1} q}{X \vdash_{\mathcal{L}_1} (p \to q)}$$

então uma meta-tradução $h : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ levaria ao fato de que:

$$\frac{X; p \vdash_{\mathcal{L}_2} q}{X \vdash_{\mathcal{L}_2} h(p \to q)}$$

Propriedades desse tipo não são em geral preservadas pelas noções usuais de tradução e levam, no contexto das combinações entre lógicas, ao aparecimento de certas lacunas nos sistemas combinados que se poderia esperar que fossem preenchidas (v. seção 3.5.1). Nesses casos específicos, as meta-traduções sanam o problema (se assumido de fato como problema), levando ao aparecimento de interessantes resultados de interação.

Vale notar que morfismos entre as estruturas que constituem os sistemas de conseqüências múltiplas, preservando as regras de asserção e condicionadas a manter idênticas as variáveis e variáveis proposicionais, são meta-traduções, pois preservam (demonstravelmente: v. [18]) as *meta-propriedades* que definimos na seção 1.3. No caso específico em que restringimos a no máximo 1 a cardinalidade do conjunto de fórmulas a aparecer do lado direito das asserções (exigindo também que nada mais aí ocorra, excluindo ocorrências de conjuntos de fórmulas ou variáveis do conjunto (X)), recuperamos os resultados das meta-traduções conforme expostas na presente seção.

Um corolário imediato desta definição é que são preservadas meta-propriedades concretas do tipo:

`se` $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1$ e $\ldots$ e $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$
`então` $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

ou seja, se temos:

`se` $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi_1$ e $\ldots$ e $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi_n$
`então` $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$

então teremos:

$\texttt{se}\ h(\Gamma_1) \vdash_{\mathcal{L}_2} h(\varphi_1)$ e ... e $h(\Gamma_n) \vdash_{\mathcal{L}_2} h(\varphi_n)$
$\texttt{então}\ h(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}_2} h(\varphi)$

Este não é, contudo, atributo exclusivo das meta-traduções, sendo de fato derivado da noção de *tradução conservativa* (v. seção 2.2). Com efeito, assumindo-se $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ uma tradução conservativa e:

$\texttt{se}\ \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1$ e ... e $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$
$\texttt{então}\ \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

suponhamos $f(\Gamma_1) \vdash_{\mathcal{L}'} f(\varphi_1)$ e ... e $f(\Gamma_n) \vdash_{\mathcal{L}'} f(\varphi_n)$. Como f é tradução conservativa, temos $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1$ e ... e $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$. Mas então, pelas nossas assunções iniciais, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Sendo f uma tradução, temos de imediato $f(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} f(\varphi)$. Ou seja, a propriedade:

$\texttt{se}\ f(\Gamma_1) \vdash_{\mathcal{L}'} f(\varphi_1)$ e ... e $f(\Gamma_n) \vdash_{\mathcal{L}'} f(\varphi_n)$
$\texttt{então}\ f(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} f(\varphi)$

vale em $\mathcal{L}'$.

A noção de meta-tradução, no entanto, não segue daquela de tradução conservativa. Por exemplo, a lógica proposicional clássica pode ser conservativamente traduzida em qualquer lógica proposicional modal normal surgida como extensão sua (por exemplo K ou $S4$) através de um morfismo de inclusão. No entanto, essa tradução jamais poderá ser uma meta-tradução, pois uma meta-propriedade geral válida na lógica proposicional clássica, o meta-teorema da dedução (exemplo acima) não é válido em qualquer lógica modal normal. Por outro lado, a inclusão da lógica proposicional intuicionista na lógica proposicional clássica é claramente uma meta-tradução, pois as regras de seqüentes intuicionistas são todas classicamente válidas (assim como as demais meta-propriedades delas derivadas), mas não é uma tradução conservativa, levando-se em conta que fórmulas como $(p \vee \neg p)$ são deriváveis na lógica clássica, mas não na intuicionista.

O corolário referido pode, contudo, ser utilizado como ponto de partida para uma noção intermediária entre meta-traduções e traduções, assim como entre traduções conservativas e traduções. Poderíamos chamar as traduções restritas pela condição por ele expressas de *meta-traduções locais*, uma vez que por ela apenas se preservam meta-propriedades específicas, localmente.

Consideramos particularmente interessantes as duas noções, meta-traduções e *transfers* elementares, para discussões sobre a combinação de sistemas lógicos, em especial, como já foi bastante enfatizado, para a importante questão do anti-colapso a ser abordada na seção 3.5.1.

Com efeito, podemos representar as meta-traduções como casos particulares de *transfers*. Basta que se considere, para cada *comprimento* de meta-propriedade, um símbolo de predicado (relação) correspondente. Ou seja, para meta-propriedades de comprimento n (i.e., meta-propriedades da forma "Se $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1$ e ... e $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$ então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$"), um símbolo de predicado R_n de sorte $\mathbf{Sform}^{n+1} \times \mathbf{Form}^{n+1}$. Tal correspondência se estabelece pela introdução, para cada n, de um axioma definidor de "meta-propriedade genérica de nível n" da seguinte forma:

$$(MG_n)\ \forall((X_1 \vdash x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \vdash x_n \rightarrow X \vdash x) \leftrightarrow R_n(X_1, \ldots, X_n, x_1, \ldots, x_n))$$

onde, como anteriormente, $\forall(\varphi)$ representa o fecho universal da fórmula φ.

Uma meta-propriedade particular, então, corresponderia à interpretação da fórmula $((X_1 \vdash x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \vdash x_n \rightarrow X \vdash x) \leftrightarrow R_n(X_1, \ldots, X_n, x_1, \ldots, x_n))$ por uma dada seqüência de elementos dos dois domínios de uma lógica abstrata (fórmulas e conjuntos de fórmulas - v. seção 1.4). Isto é, uma meta-propriedade da forma "Se $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1$ e ... e $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$ então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$" seria dada por:

$$R_n(X_1, \ldots, X_n, x_1, \ldots, x_n))[\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n].$$

Como a definição de "meta-propriedade genérica de nível n" é constituída pelo fecho universal da fórmula (da linguagem geral das lógicas abstratas - estendida aqui pelo acréscimo de R_n para todo n) que virá a ser interpretada por *todas* as meta-propriedades de nível n, então, pela definição de morfismo, qualquer *transfer* entre lógicas abstratas expandidas pelo acréscimo de $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ao seu conjunto de símbolos predicativos e satisfazendo a família de axiomas $(MG_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma meta-tradução.

Desta forma, colocamos as duas espécies de morfismos que aparentam mais promissoras para o enquadramento da questão das combinações entre lógicas, dentro de um mesmo arcabouço teórico, o da Teoria de Modelos.

Capítulo 3

Combinações entre lógicas

Neste capítulo introduzimos propriamente algumas das principais técnicas conhecidas de combinar lógicas. Estabelecendo primeiro a distinção entre os processos sintético e analítico de combinação (respectivamente, *splicing* e *splitting*, na terminologia corrente), apresentamos em seguida uma técnica característica do primeiro grupo - as Semânticas de Traduções Possíveis - e três do segundo - a fusão, a fibrilação por funções e a fibrilação algébrica. A fusão e a fibrilação por funções têm sua aplicabilidade restrita ao campo das lógicas *modais* e combinam, de fato, somente modalidades. Já as Semânticas de Traduções Possíveis e a fibrilação algébrica são métodos mais gerais, não excluindo, em princípio, a possibilidade de combinar lógicas dos tipos mais diversos.

3.1 *Splicing* e *Splitting*

Há dois tipos básicos de processos de combinação de lógicas, um de natureza *analítica* e outro de natureza *sintética*. Ao primeiro tipo, no qual uma lógica é decomposta em várias outras lógicas, damos o nome de *splitting* lógicas, enquanto ao segundo, em que lógicas distintas são combinadas para formar uma nova, denominamos *splicing* lógicas (v. [9] e [15]). Esta distinção, no entanto, pode ser reduzida a uma mera distinção de perspectiva, determinada pelas nossas motivações e pelo grau de conhecimento disponível. Do ponto de vista *lógico*, é indiferente considerarmos uma lógica complexa analisada em duas ou mais lógicas mais simples ou considerar duas ou mais lógicas simples sintetizadas em uma lógica mais complexa. Contudo, uma tal mudança de perspectiva induz métodos patentemente distintos, como veremos.

Um exemplo paradigmático do primeiro tipo de perspectiva são as chamadas *semânticas de traduções possíveis* (v. [44], [9] e [15]), em que a noção de conseqüência de uma lógica complexa é decomposta num conjunto de relações dadas em uma família de lógicas para as quais há tradução da lógica com que começamos. Evidentemente, nesse caso, a noção de tradução utilizada é absolutamente fundamental para a própria definição e para a eficiência do método. Mas a despeito dos resultados concretos, especialmente o esclarecimento sobre os atributos de uma lógica, ainda que possam incluir algumas surpresas, o próprio caráter analítico da perspectiva em apreço a previne dos problemas que afetam a perspectiva complementar.

O método de fibrilação algébrica (v. [9], [15] e [52]) é talvez o mais importante de *splicing* lógicas, e nele uma lógica combinada $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ aparece, em termos de teoria de categorias, como o co-produto (fibrilação irrestrita) ou o pushout (fibrilação restrita pelo compartilhamento de conectivos) das lógicas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, computado na categoria em que as lógicas (abstratas) são representadas. Mas neste obtêm-se com freqüência problemas relacionados à não-preservação de propriedades desejáveis e a interações inesperadas entre conectivos das lógicas combinadas. Como a combinação define um tipo de morfismo entre lógicas, e como vários problemas do método de fibrilação parecem estar intimamente relacionados com a preservação de metapropriedades, a perspectiva dos *transfers* se insinua como uma das mais promissoras para a discussão dos problemas e de propostas de solução. Mencionamos também métodos de splicing lógicas, como a fusão e a fibrilação por funções de lógicas modais. Um parêntese importante é que os métodos de combinação conhecidos surgiram principalmente no contexto das lógicas modais, e é justamente entre estas que se encontram as técnicas em mais alto grau de desenvolvimento e em que são seus resultados mais amplamente compreendidos.

Há diversos problemas específicos dos métodos de combinação de lógicas cuja solução parece repousar, ou pelo menos os meios usuais de propor soluções repousam, sobre sutilezas da noção de tradução que empregamos, especialmente no que se refere à preservação de (meta-)propriedades. Evidentemente, o problema da preservação de propriedades só pode ser precisamente definido e compreendido se tivermos, na apresentação das lógicas que pretendemos combinar, uma forma clara de representá-las. Algumas propriedades, por exemplo, podem ser definidas com clareza a partir de uma abordagem sintático-estruturalista das lógicas (primeiro momento tarskiano), por meio de princípios enunciados como axiomas ou derivados a partir deles (não deixam, porém de se tratar de *meta*-propriedades, uma vez que nos situamos no domínio da *meta*-lógica). Outras já transcendem a definibilidade em nível sintático, e requerem uma formulação na *meta*-teoria da *meta*-lógica, e portanto pedem por uma apresentação semântica. Exemplos do primeiro tipo de propriedade são a normalidade, as propriedades tarskianas (expressas pelos axiomas), a excessividade e a maximalidade. Exemplos do segundo tipo são a completude e a compacidade (apesar de esta última constar como um dos axiomas de Tarski, ela não é expressável como fórmula de uma linguagem geral das lógicas, ao menos se a mantivermos no escopo das teorias de primeira ordem, tratáveis pela linguagem das lógicas abstratas definida na seção 1.4 ou alguma similar).

Antes de partirmos para as técnicas de combinação entre lógicas em si, mencionemos o fato de que lógicas (sistemas de conseqüência estruturados, i.e., gerados por uma assinatura) podem ser comparadas em termos de extensão das seguintes maneiras (v. [15]):

(i) Se $\mathcal{L}_1 = \langle C_1, \vdash_{\mathcal{L}_1} \rangle$ e $C_2 \subseteq C_1$, o C_2-*fragmento de* $\mathcal{L}_1$ é a lógica $\mathcal{L}_1|_{C_2} =_{def} \langle C_2, \vdash_{\mathcal{L}_1|_{C_2}} \rangle$, onde $\vdash_{\mathcal{L}_1|_{C_2}} = \vdash_{\mathcal{L}_1} \cap (\mathcal{P}(L(C_2)) \times L(C_2))$, donde, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C_2)$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1|_{C_2}} \varphi$ sse $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$;

(ii) $\mathcal{L}_2 = \langle C_2, \vdash_{\mathcal{L}_2} \rangle$ é uma *extensão fraca* de $\mathcal{L}_1 = \langle C_1, \vdash_{\mathcal{L}_1} \rangle$ se $C_1 \subseteq C_2$ e $\vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ implica em que $\vdash_{\mathcal{L}_2} \varphi$ para todo $\varphi \in L(C_1)$;

(iii) $\mathcal{L}_2 = \langle C_2, \vdash_{\mathcal{L}_2} \rangle$ é uma *extensão forte* de $\mathcal{L}_1 = \langle C_1, \vdash_{\mathcal{L}_1} \rangle$ se $C_1 \subseteq C_2$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ implica em que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_2} \varphi$ para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C_1)$;

(iv) $\mathcal{L}_2 = \langle C_2, \vdash_{\mathcal{L}_2} \rangle$ é uma *extensão conservativa fraca* de $\mathcal{L}_1 = \langle C_1, \vdash_{\mathcal{L}_1} \rangle$ se $C_1 \subseteq C_2$ e $\vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ sse $\vdash_{\mathcal{L}_2} \varphi$ para todo $\varphi \in L(C_1)$;

(v) $\mathcal{L}_2 = \langle C_2, \vdash_{\mathcal{L}_2} \rangle$ é uma *extensão conservativa* de $\mathcal{L}_1 = \langle C_1, \vdash_{\mathcal{L}_1} \rangle$ se $C_1 \subseteq C_2$ e $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1|_{C_2}$.

Percebemos que as noções de extensão fraca, extensão forte, extensão conservativa fraca e extensão conservativa forte são respectivamente correlatas das noções de tradução fraca, tradução, tradução conservativa fraca e tradução conservativa dadas pelo grupo de Campinas (para morfismos lógicos). Com efeito, são casos particulares destas últimas, a saber quando as funções correspondentes são *inclusões*.

3.2 Semântica de Traduções Possíveis

O conceito de semântica de traduções possíveis (v. [44], [9] e [15]) foi introduzido por Carnielli em 1990 e estudado em detalhe por João Marcos [44], baseado na idéia de decompor uma relação de conseqüência em uma classe de relações de conseqüência presumivelmente mais simples, todas as quais obtidas dela a partir de traduções de um certo tipo. Como partimos em geral de uma lógica em um sentido mais complexa e chegamos às suas lógicas 'constituintes' (ou seja, em que sua relação de conseqüência pode ser decomposta), temos um método de *splitting*, embora, de um ponto de vista puramente lógico, como já observamos, não há propriamente distinção de um processo sintético, pois podemos dizer que estamos combinando diversas lógicas mais simples (os *traductos*, conforme a denominação de Juliana Bueno) em uma lógica complexa.

Usamos a definição de uma lógica como um par $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ e empregamos as definições de tradução e e tradução fraca (embora traduções conservativas também possam ser consideradas, se quisermos exigir uma concepção de tradução mais forte) tais como definidas pelo grupo de Campinas (GTAL) e exposto na seção 2.2.

Consideremos então uma lógica $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ (ou $\langle C, \models_{\mathcal{L}} \rangle$) e uma família $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ uma família de lógicas tal que, para todo $i \in I$, $\mathcal{L}_i = \langle C_i, \vdash_{\mathcal{L}_i} \rangle$. Definimos um *enquadramento de traduções possíveis* como um par $P = \langle \{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ em que $f_i : L(C) \longrightarrow L(C_i)$ é uma tradução de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{L}_i$ para todo $i \in I$.

Um enquadramento de traduções possíveis é dito uma *caracterização de traduções possíveis* para $\mathcal{L}$ se, para todo $\Gamma \cup \varphi \subseteq L(C)$:

$$\Gamma \vdash_L \varphi \text{ sse } f(\Gamma) \vdash_{L_i} f_i(\varphi), \text{ para todo } i \in I.$$

e é dito uma *semântica de traduções possíveis* se, para todo $\Gamma \cup \varphi \subseteq L(C)$:

$$\Gamma \models_L \varphi \text{ sse } f(\Gamma) \models_{L_i} f_i(\varphi), \text{ para todo } i \in I.$$

onde $\models$ representa, evidentemente, a relação de conseqüência semântica. O que essas caracterizações fazem é afirmar que, em $\mathcal{L}$, o fato de que $\Gamma \vdash_L \varphi$ ou $\Gamma \models_L \varphi$ equivale a afirmar, em cada lógica $\mathcal{L}_i$ em que $\mathcal{L}$ é tradutível segundo uma certa classe de funções, o "sub-fato" $f_i(\Gamma) \vdash_{L_i} f_i(\varphi)$ ou $f_i(\Gamma) \models_{L_i} f_i(\varphi)$.

Se substituirmos, na definição de enquadramento de traduções possíveis, a família $\{f_i\}_{i \in I}$ de traduções por uma família $\{g_i\}_{i \in I}$ de traduções *fracas*, obtemos um *enquadramento fraco de traduções possíveis*. Se Q é um enquadramento fraco de traduções possíveis que satisfaz, para toda fórmula φ de $L(C)$, a condição:

$$\vdash_L \varphi \text{ sse } \vdash_{L_i} f_i(\varphi), \text{ para todo } i \in I.$$

ele é dito uma *caracterização fraca de traduções possíveis*. E se satisfaz, também para toda $\varphi \in L(C)$, a condição:

$$\models_L \varphi \text{ sse } \models_{L_i} f_i(\varphi), \text{ para todo } i \in I.$$

então ele é dito uma *semântica fraca de traduções possíveis*.

Através das noções fracas de caracterização e semântica de traduções possíveis, decompomos somente a noção de teoremicidade de $\mathcal{L}$, o que torna discutível a afirmação de que de fato *a lógica* $\mathcal{L}$ *foi decomposta nas lógicas da família* $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$, ou seja, de que $\mathcal{L}$ constitui de fato uma *combinação* das ditas lógicas, uma vez que assumimos, desde o início do trabalho, com Tarski, a noção de *conseqüência* como essencial para a dedinição de *lógica*. Por outro lado, a mera definição de caracterização e semântica de traduções possíveis que demos não basta por si para determinar a preservação da recursividade da definição do conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ nas lógicas em que é decomposta. Tal propriedade seria preservada se considerássemos que as traduções que definem um enquadramento constituem de fato *morfismos lógicos*. Como já mencionamos, apesar de que morfismos lógicos sejam uma noção forte de tradução, é razoável supor que sejam subjacentes à noção de combinação entre lógicas, uma vez que se pretende representar, de alguma forma, as lógicas componentes dentro da lógica combinada. Evidentemente, se consideramos que a única característica realmente essencial de uma lógica é ter definida sobre um conjunto de sentenças uma noção de conseqüência (lógica), então a sua preservação é o suficiente para considerarmos a lógica decomposta como a combinação dos traductos. De fato, as semânticas de traduções possíveis são utilizadas como ferramenta para verificar a validade de inferências em determinadas lógicas (às vezes em casos nos quais métodos mais tradicionais, como o recurso a matrizes/tabelas de verdade, resulta demasiadamente complicado). No entanto, podemos pensar que, assim como podemos preservar propriedades como a recursividade da definição das fórmulas pelo uso dos morfismos lógicos como traduções, podemos preservar outras propriedades pelo emprego de noções alternativas de tradução. E assim como podemos obter resultados distintos usando a caracterização sintática e a semântica de traduções possíveis (uma vez que nem sempre as duas concepções coincidem), distinções similares podem aparecer associadas a refinamentos na representação das lógicas consideradas.

Se considerarmos somente a caracterização sintática, a perspectiva dos *transfers* nos fornece um campo experimental de particular interesse. Além de permitir a representação e transferência de meta-propriedades das lógicas definidas como relações entre fórmulas e conjuntos de fórmulas (de modo que uma tradução, definida como um morfismo entre as duas lógicas - i.e., um *transfer* - preserva todas aquelas propriedades que representarmos no formalismo de primeira ordem apresentado), o fechamento das lógicas abstratas sob ultraprodutos sugere uma nova abordagem ao splitting de uma lógica: ao invés de considerarmos que a relação de conseqüência (ou outras propriedades) se reduz à combinação de *todas* as relações de conseqüência (ou outras propriedades) dos traductos, teríamos a redutibilidade das referidas propriedades àquelas de um subconjunto *suficientemente grande* delas (ver seção 1.4), se definirmos o ultraproduto sobre as imagens dos morfismos.

3.3 Fusão de Lógicas Modais

Já mencionamos que a idéia de combinar lógicas surgiu dentro do contexto das lógicas modais. A *fusão* (v. [9]) é a técnica mais simples de combinar essas lógicas, consistindo, basicamente, no compartilhamento, na lógica combinada, dos operadores modais das duas lógicas combinadas (lógicas modais *normais*), interpretados em modelos híbridos. Trata-se, como já mencionamos, de um método de *splicing* lógicas, ou seja, um método sintético, em oposição aos métodos analíticos como o das Semânticas de Traduções Possíveis.

Trabalharemos com um conjunto fixo de símbolos (apenas o box '$\Box$' será indexado em conformidade com a lógica modal original em que apareça). As lógicas aqui usadas serão apresentadas em dois níveis: sintático e semântico. A combinação induz uma determinada sintaxe mista que deve ser interpretada de acordo com modelos de Kripke especialmente definidos. Dessa forma, definimos uma *assinatura modal* como uma assinatura proposicional C_i tal que $C_i^1 = \{\neg, \Box_i\}$, $C_i^2 = \{\rightarrow\}$ e $C_i^n = \emptyset$ se $n \neq 1, n \neq 2$.

A apresentação sintática das lógicas modais será precisamente a de sistemas de Hilbert de cujo conjunto R de regras de inferência (e axiomas como casos particulares) constarão aquelas específicas para lidar com os operadores de necessidade.

Como lidaremos com lógicas modais *normais* (i.e., em que todas as tautologias da lógica proposicional clássica são teoremas e contam entre seus axiomas com a distributividade do operador de necessidade '$\Box$' e entre suas regras com a regra de necessitação), podemos nos restringir ao vocabulário adotado, sendo os conectivos '$\wedge$', '$\vee$' e '$\leftrightarrow$' e o operador modal de possibilidade '$\Diamond$' definíveis em termos dos que já assumimos, da maneira usual.

A apresentação semântica das lógicas modais será feita através de *modelos de Kripke*, que definimos como triplas da forma $\langle W, R, v\rangle$, em que W é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados *mundos*, R determina uma relação (chamada relação de *acessibilidade*) entre os mundos ($R \subseteq W \times W$) e v é uma função ($v : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ - onde $\mathcal{V}$ é o conjunto das variáveis proposicionais que gera uma linguagem $L(C)$, que induz uma única função $v' : L(C) \longrightarrow \mathcal{P}(W)$) chamada *valoração*.

Consideremos duas lógicas modais normais $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ compartilhando, à exceção do operador modal de cada uma ($\Box_1$ para $\mathcal{L}_1$ e $\Box_2$ para $\mathcal{L}_2$), todos os demais símbolos (uma vez que têm suas linguagens definidas por assinaturas modais C_1 e C_2), apresentadas sintaticamente como sistemas de Hilbert H_1 e H_2, respectivamente, incluindo em suas regras (uma vez que são *normais*):

- $\langle\emptyset, ((\Box_1(\xi_1 \rightarrow \xi_2)) \rightarrow ((\Box_1\xi_1) \rightarrow (\Box_1\xi_2)))\rangle$ (axioma K para $\mathcal{L}_1$);

- $\langle\emptyset, ((\Box_2(\xi_1 \rightarrow \xi_2)) \rightarrow ((\Box_2\xi_1) \rightarrow (\Box_2\xi_2)))\rangle$ (axioma K para $\mathcal{L}_2$);

- $\langle\{\xi\}, (\Box_1\xi)\rangle$ (regra de necessitação para $\mathcal{L}_1$);

- $\langle\{\xi\}, (\Box_2\xi)\rangle$ (regra de necessitação para $\mathcal{L}_2$);

$\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são munidas, respectivamente, das classes M_1 e M_2 de modelos de Kripke. Os modelos de M_1 são da forma $\langle W, R_1, v_1\rangle$ e os modelos de M_2 da forma $\langle W, R_2, v_2\rangle$. O conjunto dos mundos de ambos os tipos de modelo é único, mudando apenas as relações de acessibilidade (satisfazendo propriedades diferentes em lógicas diferentes) e as valorações.

A fusão entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ é uma lógica bimodal normal $\mathcal{L}$ com os mesmos símbolos não modais comuns a $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, mais os operadores modais de cada uma das duas, ou seja, $\Box_1$ e $\Box_2$ funcionando como construtores da linguagem fundida (definida a partir da assinatura mista C). Isto quer dizer que, dada uma fórmula $\varphi \in L(C)$, $\Box_1$ opera sobre φ formando $\Box_1\varphi$ mesmo quando φ contém o operador $\Box_2$, e dada uma fórmula $\psi \in L(C)$ $\Box_2$ opera sobre ψ formando $\Box_2\psi$ mesmo quando ψ contém o operador $\Box_1$. A fusão induz um sistema de Hilbert $H = \langle C, R_1 \cup R_2\rangle$, onde R_1 e R_2 são os conjuntos de regras de inferência para os sistemas H_1 e H_2. Isto quer dizer que as regras dadas por:

- $\langle\emptyset, ((\Box_1(\xi_1 \to \xi_2)) \to ((\Box_1\xi_1) \to (\Box_1\xi_2)))\rangle$ (axioma K para $\mathcal{L}_1$);
- $\langle\emptyset, ((\Box_2(\xi_1 \to \xi_2)) \to ((\Box_2\xi_1) \to (\Box_2\xi_2)))\rangle$ (axioma K para $\mathcal{L}_2$);
- $\langle\{\xi\}, (\Box_1\xi)\rangle$ (regra de necessitação para $\mathcal{L}_1$);
- $\langle\{\xi\}, (\Box_2\xi)\rangle$ (regra de necessitação para $\mathcal{L}_2$);

pertencem todas ao conjunto de regras de inferência de H. Tais propriedades encerram a caracterização sintática da fusão.

Semanticamente, a fusão entre as lógicas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ é caracterizada pela classe M de modelos de Kripke da forma $\langle W, R_1, R_2, v\rangle$, onde $\langle W, R_1, v\rangle$ é um modelo de Kripke para $\mathcal{L}_1$ e $\langle W, R_2, v\rangle$ é um modelo de Kripke para $\mathcal{L}_2$. De fato, trata-se de uma *expansão* dos dois. Perceba-se que o conjunto de mundos é o mesmo, o que permite a qualquer fórmula ser valorada em qualquer mundo.

Daremos um exemplo simples de como se dá a valoração de uma fórmula em um modelo da semântica fundida de duas lógicas modais normais. Dado um destes modelos $\langle W, R_1, R_2, v\rangle$ e um mundo $w \in W$, a fórmula $(\Diamond_1(\Box_2 q))$, sendo $(\Diamond_i p)$ definido, conforme o usual, como $(\neg\Box_i\neg p)$, para $i = 1, 2$, é satisfeita (pelo modelo, em w) - denotado $\langle W, R_1, R_2, v\rangle \Vdash (\Diamond_1(\Box_2 q))$, se existe $z \in W$ tal que:

$$\langle W, R_1, R_2, v\rangle, z \Vdash (\Box_2 q),$$

o que, por sua vez, ocorrerá quando:

$N_z \subseteq V(q)$, sendo $N_z = \{u \in W : zR_2u\}$, ou seja, em todos os mundos que se relacionam via R_2 com w, o valor de q é o designado (verdadeiro).

A definição de fusão entre lógicas modais nos provê de um mecanismo de combinação algorítmico seja no nível sintático (dedutivo), seja no nível semântico, i.e., dadas duas lógicas modais normais, há um método mecânico e unívoco de determinar a sua fusão, produzindo o sistema de Hilbert híbrido e a classe de estruturas de Kripke respectivas.

Como sistemas de Hilbert, as lógicas componentes e a lógica composta do processo de fusão induzem os sistemas de conseqüência $Con(H_1) = \langle L(C_1), \vdash_{H_1}\rangle$, $Con(H_2) = \langle L(C_2), \vdash_{H_2}\rangle$ e $Con(H) = \langle L(C), \vdash_H\rangle$. A caracterização semântica também induz, via relação de conseqüência definida por modelos de Kripke, sistemas de conseqüência, que daremos por $Con'(\mathcal{L}_1) = \langle L(C_1), \models_{\mathcal{L}_1}\rangle$, $Con'(\mathcal{L}_2) = \langle L(C_2), \models_{\mathcal{L}_2}\rangle$ e $Con'(\mathcal{L}) = \langle L(C), \models_{\mathcal{L}}\rangle$. Temos que $Con(H)$ é uma extensão forte de $Con(H_1)$ e $Con(H_2)$, como também o é $Con'(\mathcal{L})$ de $Con'(\mathcal{L}_1)$ e $Con'(\mathcal{L}_2)$.

A algoritmicidade do processo de fusão e a caracterização da lógica obtida por ele como extensão forte das lógicas componentes deve-se ao fato de inexistir interação entre os operadores $\Box_1$ e $\Box_2$. Novos resultados são provados, dado que, na linguagem estendida, as variáveis esquemáticas dos axiomas e regras de cada uma das lógicas podem ser substituídas por fórmulas que não apareciam na lógica original, mas nenhuma nova propriedade dos operadores surge de fato.

Fusões entre lógicas modais não normais foram estudadas por Rogério Fajardo e Marcelo Finger em 2003 [27], mas não há qualquer noção de fusão entre uma lógica normal e uma não normal.

3.4 Fibrilação por funções de Lógicas Modais

Apesar de possuir a virtude de ser um método de simplicidade patente, a fusão de lógicas modais carece de generalidade, que já se evidencia no fato de, mesmo no universo das lógicas modais, não poder unir senão lógicas que compartilhem a condição de normalidade - como no caso que descrevemos - ou de não normalidade. Além disso, as estruturas semânticas para as lógicas a serem fundidas, i.e., seus modelos de Kripke, precisam submeter-se à condição de compartilhamento de um só conjunto de mundos. Isso restringe a sua interpretação a uma classe limitada de representações. Determinadas interpretações do mesmo aparato dedutivo, em que os modos possíveis de afirmar uma sentença dados por uma modalidade não são os mesmos dados pela outra (em outras palavras, em que os conjuntos de mundos devem ser distintos - por exemplo, uma modalidade deôntica e uma modalidade temporal) não são contempladas.

Dadas duas modalidades diferentes, poderíamos desejar combinar noções diferentes de modalidades sem misturar os seus domínios de abrangência, permitindo uma certa modularidade. Se estamos valorando uma fórmula em um determinado contexto e nos deparamos com um elemento alienígena, alternamos o módulo e conseguimos avaliar a partícula estranha nas condições apropriadas. A fibrilação por funções de lógicas modais (v. [7]) presta-se a dar conta desses casos. A fibrilação por funções de lógicas modais foi introduzida por Dov Gabbay, em 1996 [31] (v. também [32]).

Para definir a fibrilação por funções, tomemos duas lógicas modais normais $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ como na seção anterior, sem a restrição de que os modelos para elas compartilhem o conjunto de mundos. Dada uma classe de modelos de Kripke M, denotamos por S_M a classe de todos os pares $\langle\langle W, R, v\rangle, w\rangle$ tal que $\langle W, R, v\rangle \in M$ e $w \in W$. Como a fusão, a fibrilação (por funções) apresenta uma caracterização dedutiva (sintática) e uma caracterização semântica. A linguagem da lógica fibrilada $\mathcal{L}$ é idêntica àquela da lógica fundida definida na última seção. A classe de modelos para $\mathcal{L}$, denotada por M, é composta de modelos da forma $\langle W_1, R_1, v_1, h_1\rangle$ e modelos da forma $\langle W_2, R_2, v_2, h_2\rangle$ tais que:

- $\langle W_1, R_1, v_1 \rangle \in M_1$ (M_1 é a classe de modelos de Kripke para $\mathcal{L}_1$) e $\langle W_2, R_2, v_2 \rangle \in M_2$ (M_2 é a classe de modelos de Kripke para $\mathcal{L}_2$);

- $h_1 : W_1 \longrightarrow S_{M_2}$ é uma função que associa a cada mundo w em W_1 um par formado por um modelo de M_2 e um mundo de W_2 (para valorar as fórmulas que contêm uma modalidade de $\mathcal{L}_2$) e $h_2 : W_2 \longrightarrow S_{M_1}$ é uma função que associa a cada mundo w' em W_2 um par formado por um modelo de M_1 e um mundo de W_1 (para valorar as fórmulas que contêm uma modalidade de $\mathcal{L}_1$).

Definimos a *satisfação* de uma fórmula φ de $L(C)$ por uma estrutura $\langle W_1, R_1, v_1, h_1 \rangle$ em um mundo w_1 (em símbolos: $\langle W_1, R_1, v_1, h_1 \rangle, w_1 \Vdash \varphi$) recursivamente, de acordo com as seguintes cláusulas:

- $\langle W_1, R_1, v_1, h_1 \rangle, w_1 \Vdash p$ se $w_1 \in v_1(p)$ ($\varphi = p$);

- $\langle W_1, R_1, v_1, h_1 \rangle, w_1 \Vdash (\neg\psi)$ se $\langle W_1, R_1, v_1 \rangle \Vdash (\neg\psi)$ ($\varphi = (\neg\psi)$);

- $\langle W_1, R_1, v_1, h_1 \rangle, w_1 \Vdash (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ se $\langle W_1, R_1, v_1 \rangle \Vdash (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ ($\varphi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$);

- $\langle W_1, R_1, v_1, h_1 \rangle, w_1 \Vdash (\Box_1\psi)$ se $\langle W_1, R_1, v_1 \rangle \Vdash (\Box_1\psi)$ ($\varphi = (\Box_1\psi)$);

- $\langle W_1, R_1, v_1, h_1 \rangle, w_1 \Vdash (\Box_2\psi)$ se $h_1(w_1)|_1, h_1(w_1)|_2 \Vdash (\Box_2\psi)$ ($\varphi = (\Box_2\psi)$).

onde $h_1(w_1)|_1, h_1(w_1)|_2$ são a primeira e a segunda projeções da função h_1. A satisfação para modelos de tipo $\langle W_2, R_2, v_2, h_2 \rangle$ em um mundo $w_2 \in W_2$ é definida de forma perfeitamente análoga.

O que a definição dos modelos fibrilados (e da noção de satisfação associada) expressa é que, em um mundo no qual são avaliadas as fórmulas da lógica $\mathcal{L}_1$, se a fórmula sob apreciação tiver como conectivo principal um símbolo familiar aos modelos usuais de $\mathcal{L}_1$, ela é efetivamente interpretada por um deles; mas se, por outro lado, o símbolo principal é estranho a esses modelos (ou seja, é uma modalidade da lógica $\mathcal{L}_2$), a função h_1 lança a fórmula em questão para a avaliação por um modelo usual de $\mathcal{L}_2$ em um mundo no qual fórmulas com essa constituição são normalmente analisadas. O caso é simétrico para mundos de W_2. Logramos deste modo representar a noção de modularidade que ensejávamos.

Usaremos a mesma fórmula do exemplo da seção anterior, ou seja, $(\Diamond_1(\Box_2 q))$ para ilustrar como se dá a valoração em modelos fibrilados por funções. Tomemos um modelo $\langle W_1, R_1, v_1, h_1\rangle$ e um mundo $w_1 \in W_1$. Como a modalidade externa da fórmula é o conectivo $\Diamond_1$, o modelo em consideração satisfaz a fórmula em w_1 (em símbolos, $\langle W_1, R_1, v_1, h_1\rangle, w_1 \Vdash (\Diamond_1(\Box_2 q)))$ quando $\langle W_1, R_1, v_1\rangle, w_1 \Vdash (\Diamond_1(\Box_2 q))$, ou seja (pela definição usual de satisfação por um modelo de Kripke), quando existe um mundo $z_1 \in W_1$ tal que $w_1 R z_1$ e:

$$\langle W_1, R_1, v_1\rangle, z_1 \Vdash (\Box_2 q)$$

o que, pelas cláusulas de satisfação dadas acima, resulta em

$$\langle W_1, R_1, v_1, h_1\rangle, z_1 \Vdash (\Box_2 q).$$

Mas aqui temos uma fórmula circunscrita pela modalidade $\Box_2$ em um mundo pertencente a W_1 e interpretada segundo um modelo $\langle W_1, R_1, v_1, h_1\rangle$. Usamos então a função h_1 sobre o mundo z_1, levando-o a um par $\langle\langle W_2, R_2, v_2\rangle, z_2\rangle$, com $z_2 \in W_2$, de tal modo que $\langle W_2, R_2, v_2\rangle, z_2 \Vdash (\Box_2 q)$ se:

$$Nz_1 \subseteq v_2(q), \text{ sendo } Nz_1 = \{u \in W_2 : z_2 R u\},$$

ou seja, se $(\Box_2 q)$ é satisfeita num mundo de W_2 (precisamente um mundo $z_2 = h(z_1)$) por um modelo pertencente a M_2, naturalmente apropriado para a avaliação de uma fórmula da linguagem da lógica que contém o operador $\Box_2$.

A fusão entre lógicas surge como caso particular da fibrilação por funções. Uma fibrilação por funções é uma fusão entre as lógicas modais normais $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ se, dados um modelo $\langle W_1, R_1, v_1 \rangle \in M_1$ e um modelo $\langle W_2, R_2, v_2 \rangle \in M_2$, $W_1 = W_2$ e as funções h_1 e h_2 são de fato uma só: a função identidade.

Mas a generalidade (no presente caso, ao menos) tem seu preço. A fibrilação por funções é algorítmica no nível sintático ou dedutivo, sendo o sistema de Hilbert resultante da combinação por esse método de duas lógicas modais apresentadas também como sistemas de Hilbert definido de forma direta e efetiva. No entanto, no nível semântico só se obtém semelhante propriedade se já dispomos das funções h_1 e h_2 concretamente definidas. Além disso, o sistema de conseqüência induzido pela lógica fibrilada não é, como no caso da fusão, uma extensão forte das lógicas componentes, mas somente uma extensão fraca (no entanto, como afirmado em [9], podemos obter a fibrilação como extensão forte das lógicas componentes se impusermos certas condições às funções h_1 e h_2).

Consideraremos a seguir uma noção mais geral da fibrilação, que não se restringe ao domínio das lógicas modais e, empregando a noção de morfismos lógicos, sucede em preservar a relação de conseqüência.

3.5 Fibrilação Algébrica

Como vimos, a fibrilação por funções é um método de combinação mais abrangente do que a fusão, tendo-a como caso particular. No entanto, como este, restringe-se a uma classe de lógicas modais (normais) dadas por sistemas de Hilbert e interpretáveis por um determinado tipo de semântica (constituída por modelos de Kripke). Tal como definida, a fibrilação por funções não pode ser expandida para outros tipos de lógicas. Porém, usando uma concepção estrutural geral de lógicas e a noção algébrica geral de *morfismos* entre estruturas, dispomos de uma maneira de executar a combinação sobre um fundo universal, caracterizada de forma também algébrica (por propriedades categoriais). Partindo dessa premissa, chegamos à noção de *fibrilação algébrica* (ou categorial) (v. [9] e [52]), introduzida pelos trabalhos do grupo de Lógica do IST de Lisboa, sob a coordenação de Amílcar Sernadas. A universalidade do método é verificada em ainda mais um nível. Além de prover uma técnica para combinar lógicas dos tipos mais distintos (sob uma apresentação uniforme), se conseguirmos construir uma *categoria* de lógicas e morfismos entre elas, a fibrilação satisfaz uma propriedade universal. Isto quer dizer que a construção pode ser reproduzida em diferentes categorias de sistemas lógicos. Se tivermos uma definição de sistemas lógicos (qualquer uma) caracterizável por uma classe de estruturas satisfazendo certas propriedades e construirmos morfismos entre elas de tal modo a obter uma categoria, sabemos que construção determinará a fibrilação de lógicas nessa apresentação (uma *categoria* é dada por um conjunto de objetos e morfismos entre eles tal que a composição de morfismos na categoria determina um morfismo na mesma e existe um morfismo, chamado *morfismo identidade*, tal que a sua composição com qualquer morfismo, assim como a composição de qualquer morfismo com ele, é igual ao próprio morfismo)[1].

Como os resultados da fibrilação algébrica dependem da maneira como as lógicas são apresentadas (seja como sistemas de conseqüência, sistemas de Hilbert, sistemas de conseqüências múltiplas ou de seqüentes, tablôs ou qualquer outra forma) e de uma noção de morfismo entre lógicas que determinam uma categoria, a apresentação das lógicas a serem combinadas precisa ser homogênea e a fibrilação se processa em um só nível (isso não exclui a possibilidade de escolher representações híbridas, como é o caso dos sistemas de lógica, que contam com duas relações de conseqüência, uma sintática e outra semântica). Definiremos aqui um dos casos mais simples de fibrilação, o que se dá entre sistemas de Hilbert, tornando a observar que, como a representação categorial do conceito satisfaz uma propriedade universal, o esquema geral é válido para diferentes apresentações de lógicas (não, porém, com os mesmos resultados).

Os morfismos de sistemas de Hilbert que determinarão a noção de fibrilação são induzidos por morfismos de assinaturas, que nada mais são que homomorfismos das álgebras representadas pelas assinaturas. Um morfismo entre duas assinaturas C_1 e C_2 é uma família de funções $h_k : C_1^k \longrightarrow C_2^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, um morfismo entre assinaturas associa a cada conectivo k-ário de $|C_1|$ um conectivo k-ário de $|C_2|$. Morfismos de assinaturas são componíveis com morfismos de assinaturas (gerando morfismos de assinaturas) e, para qualquer morfismo $h : C' \longrightarrow C$ e $g : C \longrightarrow C''$, o morfismo id_C é tal que $id_C \circ h = h$ e $g \circ id_C = g$. Temos então uma categoria, que chamaremos **Sig**.

Definimos a fibrilação *irrestrita* (i.e., sem compartilhamento de conectivos) das assinaturas C_1 e C_2 como a união disjunta das duas assinaturas, i.e., como uma assinatura $C_1 \cup C_2$ em que todo $(C_1 \cup C_2)^k$ é a união disjunta

[1]Para uma exposição dos conceitos fundamentais da Teoria de Categorias, v. [38].

de C_1^k e C_2^k. Considerando os morfismos de *inclusão* (poderia ser, mais geralmente, uma imersão - em cujo caso definiríamos a fibrilação como a união disjunta das imagens dos morfismos -, mas consideraremos a inclusão por simplicidade) $i_1 : C_1 \longrightarrow C_1 \cup C_2$ e $i_2 : C_2 \longrightarrow C_1 \cup C_2$, uma dada assinatura C e dois morfismos $h_1 : C_1 \longrightarrow C$ e $h_2 : C_2 \longrightarrow C$, existe um único morfismo (de assinaturas) $h : C_1 \cup C_2 \longrightarrow C$ tal que $h \circ i_1 = h_1$ e $h \circ i_2 = h_2$. Isso é o mesmo que dizer que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[ddr, "h_1"'] & & C_2 \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[ddl, "h_2"] \\
& C_1 \cup C_2 \arrow[d, "h"] & \\
& C &
\end{tikzcd}$$

A assinatura fibrilada e as inclusões i_1 e i_2 constituem um *coproduto* (ou soma) na assinatura **Sig**. Como mencionamos, a fibrilação ora obtida é uma fibrilação *irrestrita*, ou seja, as classes de conectivos das duas assinaturas encontram-se totalmente separadas (caso haja conectivos representados pelo mesmo símbolo, a união disjunta trata de indexá-los e assim distingui-los). Com efeito, a assinatura fibrilada (irrestritamente) é a mínima assinatura que expande as outras duas sem identificar quaisquer de seus conectivos.

No entanto, na assinatura resultante, pode haver conectivos (derivados de cada uma das assinaturas componentes) que desempenham exatamente o mesmo papel, sendo efetivamente substituíveis entre si (fato que só pode ser estabelecido quando já temos a fibrilação dos respectivos sistemas de Hilbert). Nesse caso, há uma redundância na linguagem que se poderia desejar evitar. De fato ela pode ser contornada mediante um ajuste na definição da fibrilação das assinaturas (imediatamente refletido na definição da fibrilação dos sistemas de Hilbert correspondentes). No entanto, esse ajuste acarreta uma alteração do molde categorial da fibrilação, que passa a satisfazer uma outra propriedade universal: o *pushout* (para o caso que definiremos, pois no caso mais geral trata-se de uma elevação cocartesiana, uma construção categorial mais complicada).

Consideraremos o caso em que a equivalência de conectivos de que falamos é efetivamente uma identidade. O conjunto de conectivos que define a restrição, então, é o mesmo para ambas as assinaturas (e portanto para a assinatura fibrilada). O conjunto de conectivos compartilhados determina uma assinatura $\overline{C}$, cuja inclusão nas assinaturas C_1 e C_2 é representada esquematicamente como a seguir:

$$\begin{tikzcd} & \overline{C} \arrow[dl, hook', "f_1"'] \arrow[dr, hook, "f_2"] & \\ C_1 & & C_2 \end{tikzcd}$$

onde f_1 e f_2 são os respectivos morfismos de inclusão.

Definimos então, como antes, o coproduto de C_1 e C_2 (em que os conectivos em comum aparecem repetidos), denotado aqui $C_1 \bigoplus C_2$ como a união disjunta das duas assinaturas, com $i_1 : C_1 \longrightarrow C_1 \bigoplus C_2$ e $i_2 : C_2 \longrightarrow C_1 \bigoplus C_2$. A fibrilação (restrita por compartilhamento do conjunto $\overline{C}$ de conectivos), $C_1 \cup C_2$ é dada pelo conjunto $i_1(C_1 \backslash f_1(\overline{C})) \cup i_2(C_2 \backslash f_2(\overline{C})) \cup \overline{C}$, ou seja, a união dos conectivos não compartilhados das assinaturas C_1 e C_2 (inclusos no coproduto) com os conectivos compartilhados (os elementos de $\overline{C}$). Existe um único morfismo $q : C_1 \bigoplus C_2 \longrightarrow C_1 \cup C_2$ tal que $q \circ i_1 \circ f_1 = q \circ i_2 \circ f_2$, ou seja, que faz o diagrama abaixo comutar.

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{C} \arrow[dl, hook, "f_1"'] \arrow[dr, hook, "f_2"] & \\
C_1 \arrow[dr, hook, "i_1"'] & & C_2 \arrow[dl, hook', "i_2"] \\
 & C_1 \bigoplus C_2 \arrow[d, "q"'] & \\
 & C_1 \cup C_2 &
\end{tikzcd}
$$

Trata-se da função definida como a seguir:

$$
q(i_1(c_1)) = \begin{cases} c & \text{se } c_1 \text{ é } f_1(c) \text{ para algum } c \in \overline{C} \\ i_1(c_1) & \text{caso contrário} \end{cases} .
$$

$$
q(i_2(c_2)) = \begin{cases} c & \text{se } c_2 \text{ é } f_2(c) \text{ para algum } c \in \overline{C} \\ i_2(c_2) & \text{caso contrário} \end{cases} .
$$

Ou seja: a função q transmite de $C_1 \bigoplus C_2$ para $C_1 \cup C_2$ os conectivos compartilhados por C_1 e C_2 tais como vieram de $\overline{C}$ e os demais conforme a inclusão em C_1 e C_2.

Categorialmente, $C_1 \cup C_2$ e q determinam um *coequalizador* de $i_1 \circ f_1$ e $i_2 \circ f_2$ que é um *pushout* na categoria **Sig** do diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{C} \arrow[dl, hook', "f_1"'] \arrow[dr, hook, "f_2"] & \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}$$

Como no caso anterior (fibrilação irrestrita), $C_1 \cup C_2$ é uma construção minimal, i.e., é a menor assinatura que satisfaz a propriedade universal referida.

Os morfismos de sistemas de Hilbert que definem a fibrilação de fato entre as lógicas na apresentação que escolhemos são induzidos (univocamente) por morfismos de assinaturas e relações de conseqüência (derivabilidade a partir das regras). Um morfismo de assinaturas $h : C_1 \longrightarrow C_2$ induz uma única função $\hat{h} : L(C_1) \rightarrow L(C_2)$ entre as respectivas linguagens tal que $\hat{h}(p) = p$ (se $p \in \mathcal{V}$) e tal que $\hat{h}(c(\varphi_1, ..., \varphi_n)) = h_n(c)(\hat{h}(\varphi_1), ..., \hat{h}(\varphi_n))$, se $c \in C_1^n$. Dados $H_1 = \langle C_1, R_1 \rangle$ e $H_2 = \langle C_2, R_2 \rangle$ dois sistemas de Hilbert, um *morfismo de sistemas de Hilbert* $h' : H_1 \longrightarrow H_2$ é a expansão $\hat{h}$ de um morfismo de assinaturas h tal que, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C_1)$ se $\Gamma \vdash_{H_1} \varphi$, então $h'(\Gamma) \vdash_{H_2} h'(\varphi)$. Ou seja: é um *morfismo lógico* entre os sistemas de conseqüência subjacentes (ver seção 2.2). Perceba-se que em nossa definição de morfismos de sistemas de Hilbert *impomos* a condição da preservação da derivabilidade (conseqüência). Dada a definição da relação de conseqüência $\vdash_H$ para um sistema de Hilbert H (ver seção 1.1.1), temos de imediato a caracterização de um morfismo de sistemas de Hilbert como a expansão $\hat{h} : L(C_1) \longrightarrow L(C_2)$ de um morfismo de assinaturas $h : C_1 \longrightarrow C_2$ tal que $h(\Delta) \vdash_{\langle C_2, R_2 \rangle} h(\varphi)$ para toda regra $\langle \Delta, \varphi \rangle \in R_1$. É fácil também verificar que sistemas de Hilbert e os morfismos entre eles formam uma categoria, que chamaremos **Hil**.

Definimos a *fibrilação irrestrita dos sistemas de Hilbert H_1 e H_2* como o par $H_1 \cup H_2 = \langle C_1 \cup C_2, R \rangle$, onde $C_1 \cup C_2$ é a fibrilação irrestrita das assinaturas C_1 e C_2 e $R = \{i_1'(r) : r \in R_1\} \cup \{i_2'(r) : r \in R_2\}$. $i_1' : H_1 \longrightarrow H_1 \cup H_2$ e $i_2' : H_2 \longrightarrow H_1 \cup H_2$ são os morfismos de sistemas de Hilbert induzidos pelos morfismos de assinaturas $i_1 : C_1 \longrightarrow C_1 \cup C_2$ e $i_2 : C_2 \longrightarrow C_1 \cup C_2$, respectivamente. Dados dois morfismos de sistemas de Hilbert $h_1' : H_1 \longrightarrow H$ e $h_2' : H_2 \longrightarrow H$, existe um único morfismo de sistemas de Hilbert $h' : H_1 \cup H_2 \longrightarrow H$ tal que $h' \circ i_1' = h_1'$ e $h' \circ i_2' = h_2'$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta.

$$
\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[dr, "i'_1"] \arrow[ddr, "h'_1"'] & & H_2 \arrow[dl, "i'_2"'] \arrow[ddl, "h'_2"] \\
& H_1 \cup H_2 \arrow[d, "h'"] & \\
& H &
\end{tikzcd}
$$

A fibrilação irrestrita de sistemas de Hilbert, então, é um coproduto dos sistemas componentes e suas imersões na categoria **Hil**. No sistema fibrilado, temos, além de todos os símbolos das assinaturas dos sistemas originais, todas as suas regras de inferência.

No caso da fibrilação restrita por compartilhamento de conectivos, como a única coisa que os sistemas de Hilbert estão compartilhando são elementos das assinaturas e precisamos representar o compartilhamento no nível dos morfismos entre sistemas de Hilbert, definimos o sistema de Hilbert que determina os conectivos compartilhados, eliminando a referência a regras. O sistema de Hilbert apropriado, portanto é o sistema $\overline{H} = \langle \overline{C}, \emptyset \rangle$, onde $\overline{C}$ é a assinatura compartilhada, como antes.

Definimos então, como no caso da fibrilação irrestrita, o coproduto de H_1 e H_2 (em que os conectivos em comum aparecem repetidos), denotado aqui $H_1 \bigoplus H_2$ com i'_1 e i'_2 como acima. A fibrilação restrita pelo compartilhamento de conectivos dos sistemas de Hilbert H_1 e H_2 é dada como o par $H_1 \cup H_2 = \langle C_1 \cup C_2, q'(i'_1(R_1)) \cup q(i'_2(R_2)) \rangle$, onde $C_1 \cup C_2$ é a fibrilação restrita das assinaturas C_1 e C_2 e $q' : H_1 \bigoplus H_2 \longrightarrow H_1 \cup H_2$ é a expansão $\hat{q} : L(C_1) \longrightarrow L(C_2)$ de q definido como acima que é um morfismo de sistemas de Hilbert. q' é o único morfismo de sistemas de Hilbert tal que $q \circ i'_1 \circ f'_1 = q \circ i'_2 \circ f'_2$, ou seja, que faz o diagrama abaixo comutar.

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{H} \arrow[dl, hook', "f_1'"'] \arrow[dr, hook, "f_2'"] & \\
H_1 \arrow[dr, hook, "i_1'"'] & & H_2 \arrow[dl, hook', "i_2'"] \\
 & H_1 \bigoplus H_2 \arrow[d, "q'"] & \\
 & \\
 & H_1 \cup H_2 &
\end{tikzcd}
$$

Como q na categoria **Sig** em relação a $i_1 \circ f_1$ e $i_2 \circ f_2$, q' é o coequalizador de $i_1' \circ f_1'$ e $i_2' \circ f_2'$ e um *pushout* na categoria **Hil** do diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{H} \arrow[dl, hook', "f_1'"'] \arrow[dr, hook, "f_2'"] & \\
H_1 & & H_2
\end{tikzcd}
$$

Exemplificaremos a fibrilação de sistemas de Hilbert pela combinação das lógicas da conjunção e da disjunção, tais como apresentadas na seção 1.1.1 (HC e HD). Como não há coincidência entre conectivos, não há compartilhamento, portanto devemos utilizar a fibrilação *irrestrita*.

A assinatura fibrilada será, portanto, a assinatura $C_C \cup C_D$, dada pelas uniões disjuntas de cada C_C^k com cada C_D^K (denotado $C_C^k \cup C_D^k$). Temos, então, que $C_C^2 \cup C_D^2 = \{\wedge, \vee\}$ e $C_C^k \cup C_D^k = \emptyset$, para todo $k \neq 2$ (v. seção 1.1.1). Sendo i_C e i_D os respectivos morfismos de inclusão de C_C e C_D em $C_C \cup C_D$. Claramente, $i_C^2(\wedge) = \wedge$, i_C^k é a função vazia, para todo $k \neq 2$, $i_D^2(\vee) = \vee$ e i_D^k é a função vazia para todo $k \neq 2$. Dada uma assinatura C e dois morfismos $h_C : C_C \longrightarrow C$ e $h_D : C_D \longrightarrow C$, é fácil perceber que há um único morfismo h tal que $h \circ i_C = h_C$ e $h \circ i_D = h_D$. Como i_C e i_D são morfismos de inclusão, então $h(i_C(x)) = h(x)$, i.e., $h \circ i_C(x) = h(x)$ para todo $x \in |C_C|$ e $h(i_D(y)) = h(y)$, i.e., $h \circ i_D(y) = h(y)$ para todo $y \in |C_D|$. Se existe um h' com a mesma propriedade, ou seja, $h \circ i_C = h_C$ e $h \circ i_D = h_D$, então $h'(x) = h_C(x) = h(x)$ para todo $x \in |C_C|$ e $h'(y) = h_D(y) = h(y)$ para todo $y \in |C_D|$. Ou seja, $h' = h$. Portanto, h é único, como se esperava.

Como os morfismos de assinaturas geram univocamente morfismos entre os sistemas de Hilbert respectivos, temos que as inclusões $\hat{i}_C$ e $\hat{i}_D$ resultam na inclusão dos sistemas de Hilbert HC e HD (v. seção 1.1.1) em um sistema de Hilbert combinado. O sistema de Hilbert fibrilado é dado pelo par $HCD = \langle C_C \cup \mathcal{C}_D, R\rangle$, com $R = \{\hat{i}_C(r) : r \in R_C\} \cup \{\hat{i}_D(s) : s \in R_D\}$. Como os morfismos i_C e i_D são inclusões, temos simplesmente que $R = R_C \cup R_D$. Preservando as regras de inferência de cada um dos sistemas de Hilbert, temos que, sempre que $\Gamma \vdash_X \varphi$, com $X = C, D$, ($\vdash_X$ representando a relação de conseqüência no sistema HX), $\hat{i}_X(\Gamma) \vdash_{CD} \hat{i}_X\varphi$, onde $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C_X)$. Ou seja, $\hat{i}_C : L(C_C) \longrightarrow L(C_C \cup C_D), \hat{i}_D : L(C_D) \longrightarrow L(C_C \cup C_D)$ são de fato morfismos de sistemas de Hilbert (i.e., morfismos na categoria **Hil**).

Seja H um sistema de Hilbert cuja linguagem é construída pela assinatura C acima e $\hat{h}_C : HC \longrightarrow H$, $\hat{h}_D : HD \longrightarrow H$ as respectivas expansões de h_C e h_D que constituem morfismos na categoria **Hil**. Se $\hat{h} : HCD \longrightarrow H$ é um morfismo de sistemas de Hilbert que expande $h : C_C \cup \mathcal{C}_D \longrightarrow C$ (já apresentado), de tal modo que $\hat{h} \circ \hat{i}_C = \hat{h}_C$ e $\hat{h} \circ \hat{i}_D = \hat{h}_D$, então h tem que ser único. O argumento para demonstrá-lo é inteiramente análogo ao que prova ser h o único morfismo de assinaturas tal que $h \circ i_C = h_C$ e $h \circ i_D = h_D$.

Perceba-se que a assinatura fibrilada expande as possibilidades de construção de fórmulas, gerando fórmulas híbridas, i.e., com símbolos provenientes tanto de C_C quanto de C_D. A inclusão dos conjuntos R_C e R_D no conjunto R das regras do sistema de Hilbert fibrilado permite igualmente novas instanciações, gerando interações entre as propriedades dos conectivos das lógicas originais. Desta forma, novos resultados são provados concernentes aos símbolos de ambas as lógicas, relacionando-os mutuamente. Isto quer dizer que a fibrilação algébrica de duas lógicas (apresentadas, por exemplo, como sistemas de Hilbert) dá origem a uma lógica que não apenas estende as duas (como o faria a mera união disjunta das respectivas relações de conseqüência), mas apresenta uma face propriamente "criativa". Por exemplo, dadas dois sistemas de Hilbert $H_1 = \langle\, C_1, R_1\rangle$ e $H_2 = \langle\, C_2, R_2\rangle$ tais que $|C_1| = \{\rightarrow, \neg\}$ e $|C_2| = \{\rightarrow, \neg, \Box\}$ e supondo que $r_1 = \langle\{p_1, (p_1 \rightarrow p_2)\}, p_2\rangle \in R_1$, i.e., R_1 conta com a regra de *Modus Ponens*. O sistema de Hilbert fibrilado (irrestritamente), digamos $\langle C, R\rangle$, é tal que $|C| = \{\rightarrow_1, \neg_1, \rightarrow_2, \neg_2, \Box_2\}$ e $\hat{i}_1(r_1) = \langle\{p_1, (p_1 \rightarrow_1 p_2)\}, p_2\rangle \in R = \hat{i}_1(R_1) \cup \hat{i}_2(R_2)$, onde $\hat{i}_1$ e $\hat{i}_2$ são as inclusões de H_1 e H_2 em H, respectivamente (e $\cup$, como antes, é a união disjunta). Como todo sistema de Hilbert (ver seção 1.1.1), a lógica obtida por fibrilação conta com sua própria noção de substituição e, portanto, pela definição de prova ou demonstração (v. também seção 1.1.1), $\hat{i}_1(r_1)$ pode ter suas variáveis proposicionais instanciadas por qualquer fórmula da linguagem obtida da assinatura fibrilada ($L(C)$). Temos, por exemplo, que de $\Box_2 p$ e $\Box_2 p \rightarrow_1 \Box_2 \neg_1 q$, obtemos (mediante aplicação de $i_1(r_1)$), $\Box_2 \neg_1 q$. Obtemos, portanto, novas derivações e interações demonstráveis, na lógica fibrilada, entre conectivos vindos de cada uma das lógicas originais. Algumas dessas interações, entretanto, podem gerar resultados inesperados e até, em certo sentido, destrutivos, como acontece no caso do *colapso* da fibrilação (ver próxima seção). Mas também pode acontecer o contrário, e algumas interações cuja obtenção se considere desejável não surgem na lógica fibrilada, geralmente devido à ausência, nesta, de certas propriedades das lógicas originais. Chama-se a este problema o *anti-colapso* da fibrilação. Esses dois problemas, especialmente o segundo, e algumas tentativas de tratá-lo são o tema da próxima seção.

Como mencionamos, a caracterização categorial da fibrilação nos permite estender a abrangência do método para todas as classes de lógicas que, junto com alguma definição de morfismo, possam constituir categorias (nas quais se pode demonstrar que são definíveis os coprodutos e pushouts - ou elevações cocartesianas). Assim, a fibrilação algébrico-categorial já foi definida para lógicas apresentadas semanticamente como *sistemas de interpretação*, para apresentações híbridas como *sistemas de lógica*, para lógicas quantificadas de primeira ordem e de ordem superior, dentre outras.

3.5.1 Colapso e Anti-Colapso da Fibrilação Algébrica

Ao fibrilar lógicas (em alguma apresentação geral), além de preservar propriedades e princípios válidos nelas, podemos obter novos resultados, provenientes da aplicação de propriedades e princípios de uma lógica às fórmulas e princípios da outra. Uma determinada regra que valia para as fórmulas de uma lógica pode passar a ter uma abrangência maior, incluindo novas instâncias. Novas inferências são permitidas, novos teoremas são provados. De fato, a possibilidade de tais prolongamentos é uma das justificativas para a empresa de combinar lógicas (ao menos se considerarmos a perspectiva do *splicing*). Entretanto, algumas interações podem aparecer ocasionalmente como resultado da fibrilação que não eram esperados, assim como algumas interações que se pensa que deveriam aparecer podem não estar presentes.

Em alguns casos, como veremos, o fato de termos uma coisa ou outra deriva de expectivas prévias que dão um sentido próprio às palavras 'esperados' e 'deveriam' na sentença anterior.

A combinação sem compartilhamento de conectivos de duas lógicas, uma das quais com um conectivo mais forte que o seu correspondente na outra, pode cancelar as diferenças entre os dois ditos conectivos, de modo que os dois conectivos (de significado anteriormente distinguido) colapsam em um só, com as propriedades do conectivo mais forte (e só elas). É o que acontece quando se combinam, por fibrilação, a lógica proposicional clássica e a lógica proposicional intuicionista. Na lógica fibrilada, a implicação clássica e a implicação intuicionista colapsam em uma só: a implicação clássica. Chama-se a este fenômeno o *colapso da fibrilação* (v. [15]), e foi apontado por Luis Fariñas del Cerro e Andreas Herzig em 1996 [20], além de mencionado por Dov Gabbay no mesmo ano [31]. O resultado é uma conseqüência quase imediata do fato de que as duas lógicas dispõem de versões do meta-teorema da Dedução.

O problema do colapso da fibrilação está relacionado ao problema mais geral de quando a combinação entre lógicas resulta mais forte do que o esperado, i.e., permite um número maior de inferências do que se poderia pensar que ela devesse permitir. Um sentido em que pode ser entendido o que a combinação de duas lógicas "deveria permitir" é a declaração de Gabbay (v. [32]) de que a combinação de duas lógicas deveria ser o menor sistema lógico para a linguagem combinada de ambas que estende conservativamente as duas (o que ocorre, por exemplo, na fibrilação dos sistemas de Hilbert da conjunção e da disjunção, como vimos). Nesse caso, o aparecimento de interações entre os conectivos de ambas as lógicas, gerando novas leis, estaria ferindo o princípio de minimalidade presumido por essa declaração. Um outro exemplo, menos extremo que o do colapso, do mesmo tipo de fenômeno, é dado pela fibrilação da lógica da conjunção clássica e da lógica da disjunção clássica (i.e., em que valem, respectivamente, os axiomas que governam a conjunção e os axiomas que governam a disjunção, na lógica clássica), ambas descritas de acordo com as regras de seqüentes ou através de bivalorações. Na lógica fibrilada, obtemos a distributividade da conjunção em relação à disjunção e a distributividade da disjunção em relação à conjunção. Tal fato foi observado por Béziau em 2004 [3].

Para sanar o problema do colapso da fibrilação, foram propostos, por Cristina Sernadas, João Rasga e Walter Carnielli a concepção de *fibrilação modulada* (*modulated fibring*) [53] e por Carlos Caleiro e Jaime Ramos, a de *criptofibrilação* (*cryptofibring*) [7].

Mas não deveríamos esperar de fato que interações dessa natureza surjam ao combinarmos lógicas? Trocando a perspectiva do *splicing* pela do *splitting*, não poderíamos considerar a lógica proposicional clássica, por exemplo, como a combinação das lógicas dos seus operadores? Se achássemos que sim, deveríamos esperar que as interações mencionadas emergissem, como no caso que acabamos de mencionar. Se considerássemos que as derivações na lógica combinada deveriam se restringir à união disjunta das derivações nas duas lógicas, obteríamos uma modularidade no sistema híbrido similar àquela que temos no caso da fibrilação por funções de lógicas modais. No entanto, estaríamos nos privando do caráter "experimental" das combinações entre lógicas, que as tornaria uma espécie de análogo lógico dos processos químicos, evitando resultados emergentes potencialmente interessantes. Mas não apenas isso. Verifica-se que, ao combinar sistemas lógicos de acordo com o *desideratum* de Gabbay, algumas propriedades importantes se encontram faltantes. E interações esperadas da combinação de fragmentos de uma lógica conhecida não surgem, e assim não permitem recuperá-la.

Partindo dessa perspectiva, teríamos expectativas diferentes sobre o surgimento de interações. Em particular, poderíamos esperar, por exemplo, que as combinações entre as lógicas dos fragmentos da lógica clássica produzissem as interações usuais. A *não* emergência dessas interações seria, então, vista como o resultado inesperado nessas combinações. Esse fenômeno, no contexto da fibrilação, é chamado por Coniglio, em 2005, de *anti-colapso da fibrilação* (v. [15], [16], [18] e [4]). Um exemplo do problema é a não produção da lei do terceiro excluído ($\varphi \vee \neg\varphi$) na fibrilação da lógica da disjunção com a lógica da negação clássicas, na categoria **Hil** e na categoria **Con** dos sistemas de conseqüência. Outro exemplo é, como vimos, a não produção das leis de distributividade entre a conjunção e a disjunção clássicas na fibrilação efetuada nessas mesmas categorias. Uma observação importante é que a ausência de tais asserções de interação entre os conectivos nas lógicas fibriladas é atribuída à *não preservação de meta-propriedades* das lógicas componentes por meio das traduções efetuadas. No primeiro caso, a meta-propriedade

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash_1 \psi \qquad \Delta, \neg\varphi \vdash_1 \psi}{\Gamma, \Delta \vdash_1 \psi}$$

característica da negação clássica, não é preservada pela fibrilação nas categorias referidas. No segundo, não é preservado o meta-teorema da dedução, associado à conseqüência clássica, ou seja:

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi \text{ sse } \Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

Além disso, o mesmo resultado de interação entre a conjunção e a disjunção clássicas, apontado por Béziau como inesperado e excessivo (aparecendo na fibrilação de sistemas de seqüentes e de bivalorações), não aparece na fibrilação definida nas categorias **Hil** e **Con**, contrariando as expectativas de recuperar a lógica clássica a partir da combinação de seus componentes. Nesse caso, a meta-propriedade faltante é

$$\frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \quad \Delta, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \psi}$$

Gabbay levantou um questionamento sobre a simetria dos processos sintético e analítico de combinação de lógicas. Poderíamos decompor uma lógica definida sobre uma assinatura composta pela combinação de duas assinaturas em lógicas definidas sobre essas mesmas duas assinaturas e depois recuperá-la (a lógica composta) a partir de uma combinação das duas lógicas em que foi decomposta (ainda que acrescentando axiomas de interação)? Se considerarmos a lógica clássica como a combinação dos fragmentos referentes aos seus conectivos, os fatos apresentados sugerem que uma resposta local ao questionamento de Gabbay repousa na possibilidade de as traduções que levam as propriedades das lógicas componentes à lógica combinada preservarem meta-propriedades de feição mais complexa do que a mera conseqüência ou derivabilidade. Com efeito, Coniglio [18] mostrou que, nas categorias **Mcon** e **Seq** (respectivamente, dos sistemas de conseqüência múltipla e dos seqüentes), em que os morfismos preservam por definição uma classe de meta-propriedades (distintas da mera relação de conseqüência), as interações mencionadas aparecem. Ou seja, os morfismos nessas categorias são *meta-traduções.*

Já vimos que é possível definir a fibrilação entre sistemas de Hilbert dentro do arcabouço modelo-teorético das lógicas abstratas, em que meta-propriedades podem ser expressas como atributos e fórmulas da linguagem de primeira ordem apresentada. Em particular, as meta-propriedades relacionadas nesta seção ao problema do anti-colapso da fibrilação podem ser representadas como fórmulas da linguagem geral das lógicas abstratas, e do mesmo modo o são as meta-propriedades cuja preservação define as meta-traduções. Usando como noção de morfismo a de *transfer elementar*, temos uma concepção de tradução com resultados preservativos ainda mais fortes do que as meta-traduções. No entanto, enquanto servem para escapar ao problema do anti-colapso, noções de tradução mais fortes tendem a agravar o problema do colapso. Um estudo comparativo das duas perspectivas (meta-traduções e *transfers* elementares) se nos apresenta como uma maneira promissora de compreender melhor os problemas de colapso e anti-colapso da fibrilação e propor possíveis soluções.

Considerações gerais e conclusão

A fibrilação algébrica é a perspectiva de combinação de lógicas mais estudada e possui diversas qualidades que a recomendam como a noção de combinação de lógicas por excelência. Em relação a sistemas de Hilbert, por exemplo, ela permite preservar suas características mais importantes (aquelas que foram incluídas em sua definição). A noção de morfismo subjacente impõe uma condição forte o suficiente para definir o sistema combinado como uma tradução (gramatical e que preserva conseqüência) ou uma extensão forte (no caso em que os morfismos são inclusões) das lógicas originais. A caracterização categorial garante em boa parte dos casos que se trata de uma construção minimal, além de permitir a generalização de resultados para diferentes concepções de lógicas. Determinados refinamentos sobre os morfismos podem gerar classes de combinações de particular interesse (considerando, por exemplo, traduções conservativas, monomorfismos, epimorfismos etc.). Embora surjam alguns problemas na utilização da fibrilação, como vimos na seção anterior, a generalidade e as boas propriedades do método nos munem da intuição de que, se algo está errado ou clama por reformulações não é a estrutura geral da fibrilação, mas antes "a carne que colocamos no moedor". E essa carne, ao que tudo parece indicar, consiste na representação de sistemas lógicos e na noção de tradução entre eles. Em particular, que propriedades podemos representar e, dentre estas, as que podemos preservar por meio de traduções. Mas estariam aí incluídas *todas* as lógicas? Seria possível definir uma determinada categoria de lógicas em que as noções de coproduto, pushout e elevação cocartesiana não aparecem? Uma definição geral de combinação entre lógicas precisa abranger *todas* as lógicas existentes e possíveis? Uma tal definição pode de fato ser dada?

Na verdade, a fibrilação caracterizada por propriedades universais da

Teoria de Categorias é abrangente demais, por definir uma propriedade satisfeita por uma classe muito maior de categorias do que a daquelas que normalmente chamaríamos de lógica. Com efeito, as noções de coproduto, pushout e elevação cocartesiana podem ser definidas para categorias de estruturas matemáticas das mais díspares. Para combinar lógicas, concordamos em representá-las como estruturas matemáticas, deslocando o foco dos estudos lógicos da perspectiva fundacional que impulsionou seu desenvolvimento de finais do século XIX às primeiras décadas do século XX. Mas não dispomos de uma restrição aos conceitos categoriais que definem a fibrilação que nos assegure que estamos tratando da combinação de lógicas, a menos que já partamos de uma concepção geral de lógica. As propriedades universais da Teoria de Categorias são aplicadas a *todas* as estruturas matemáticas que se enquadram nas suas definições gerais. Se queremos aplicá-las somente a lógicas, precisamos de uma definição geral de lógica, o que não é estritamente necessário quando consideramos técnicas mais restritas, tais como a fusão e a fibrilação por funções de lógicas modais. Enfatizando, porém, uma técnica da generalidade e abrangência da fibrilação (mas também, embora lhes falte uma caracterização categorial, as Semânticas de Traduções Possíveis), o problema da representação geral de lógicas se torna premente, e uma concepção bourbakiana, estruturalista de lógica é o que imediatamente se apresenta para o enquadramento da questão. Representações de lógicas (gerais) distintas produzem resultados de combinação diferentes. A problemática geral das combinações entre lógicas sugere que não apenas as lógicas, para efeito de levar a cabo operações do porte da fibrilação, devem ser vistas como estruturas matemáticas entre estruturas matemáticas, mas que tipos diferentes de estruturas matemáticas podem gerar categorias de lógicas.

Além disso, nem sempre logramos preservar *todas* as propriedades relevantes de uma lógica na lógica mais complexa em que ela é inserida por combinação. Talvez, nesse sentido, a noção de imersão elementar seja de essencial importância, pois, considerando todas as características da lógica que podem ser de fato representadas (de acordo com um dado paradigma de representação), há uma *cópia* da lógica original na lógica em que ela é imersa. Mas seria esse o único critério para determinar que o sistema resultante é de fato a combinação das lógicas originais? Talvez haja mais de uma noção de combinação entre lógicas, em que apenas algumas propriedades contextualmente relevantes sejam levadas em consideração. Além do que, podemos conceber lógicas (no sentido de estruturas livres como na Lógica Universal) induzindo uma representação geral que constitua uma categoria em que *não haja* definidas as noções relevantes de coproduto, pushout e elevação cocartesiana. Não haveria forma de combinar essas lógicas? Ou haveria, mas teria que ser diferente da fibrilação, eliminando as pretensões de fazer desta a técnica universal de combinação entre lógicas? Ou excluiríamos da definição geral de lógica aquelas que não são "combináveis entre si"? Seria legítimo que uma definição de combinação, ou mesmo de uma noção mais geral como a de tradução entre lógicas impusesse restrições *sobre a própria noção de lógica*? O sentido oposto parece mais razoável: dada uma definição geral de lógicas, existe um método igualmente geral que defina as combinações legítimas entre elas? Nesse caso, podemos partir de diferentes concepções de lógica e chegar a diferentes métodos combinatórios. E então podemos julgar uma definição geral de lógica como operacionalmente mais adequada de acordo com os critérios estabelecidos pelos métodos de combinação, assim como julgar um método de combinação como coerente com uma concepção geral de lógica filosoficamente bem fundamentada. Por outro lado, a questão sobre a interpretabilidade, por exemplo, da lógica clássica como a combinação das lógicas dos conectivos clássicos pode dar aos estudos das combinações entre lógicas um lugar nas considerações sobre a definição geral de sistemas lógicos.

O certo é que a interação entre a representação de lógicas e os métodos de combinação parece gerar assim uma estimulação mútua que deve resultar (e tem resultado) em um progresso técnico e conceitual importante para o estudo contemporâneo da lógica.

Como vimos, pela generalidade e alto grau de abstração em cujos domínios opera, o estudo das combinações entre lógicas traz consigo a necessidade do empreendimento de uma análise no nível conceitual e avaliação crítica de suas noções fundamentais, para garantir a inteligibilidade dos seus processos. No centro de uma tal avaliação está o problema da representação de sistemas lógicos, que por sua vez encontra em seu cerne a questão de uma caracterização apropriada da noção de conseqüência lógica. A avaliação de dois momentos da reflexão de Tarski sobre o assunto, nos levou a considerar duas perspectivas básicas sobre o assunto: uma basicamente estruturalista e abstrativa (que resultou, julgamos, no aporte da Lógica Universal de Béziau) e outra basicamente crítica e "semanticista" (que resultou, julgamos, no aporte de Epstein). Desenvolvemos principalmente o ponto de vista estruturalista, que pode ser representado, como vimos, em certa extensão, em linguagem de primeira ordem. Essa abordagem tira proveito de certos resultados da Teoria de Modelos e permite uma representação acurada de certas metapropriedades e de uma definição de morfismo que parece apropriada para a proposta de solução para certos problemas da combinação de lógicas.

A noção de tradução entre lógicas tem também importância crucial para o desenvolvimento de técnicas de combinação, uma vez que queremos preservar propriedades das lógicas componentes às lógicas compostas. Uma dentre as técnicas de combinação apresentadas tem interesse especial pela sua generalidade e propriedades universais: a fibrilação algébrica (ou categorial). Considerações sobre a representação de sistemas lógicos (suas propriedades e meta-propriedades) e a transmissibilidade de propriedades através de traduções são fundamentais para a boa compreensão do método e para a solução de certos problemas propostos.

O trabalho conceitual aqui empreendido teve como objetivos principais o esclarecimento dos métodos de combinação de lógicas e seus resultados a partir da avaliação da importância de questões sobre representação e traduções entre lógicas e a abertura de caminho para que os aportes aos problemas colocados por algumas das principais técnicas de combinação sejam realizados de forma conceitualmente esclarecida e conseqüente.

Nosso estudo dos problemas teóricos e do instrumental técnico que resultou neste trabalho deixa aberta a interessante questão de obter uma caracterização propriamente modelo-teorética da fibrilação, em vista da qual possamos comparar os resultados do uso das meta-traduções (definidas para esse arcabouço na seção 2.4) com aqueles advindos do emprego dos *transfers* elementares, em relação ao abrandamento do problema do anti-colapso e agravamento do problema oposto (que no caso extremo gera o colapso).

Referências

[1] BÉZIAU, J.-Y. Recherches sur la Logique Universelle (Excessivité, Négation, Séquents). PhD thesis, Paris 7, 1994.

[2] BÉZIAU, J.-Y. Les axiomes de Tarski. Disponível em http://www.unine.ch/unilog/jyb/Les%20axiomes%20de%20Tarski.pdf

[3] BÉZIAU, J.-Y. A paradox in the combination of logics. CLE e-Prints. Vol. 4(5), 2004. Disponível em ftp://logica.cle.unicamp.br/pub/e-prints/comblog04/jybeziau.pdf

[4] BÉZIAU, J.-Y. e Coniglio, M. E. Combining conjunction with disjunction. CLE e-Prints. Vol. 5(10), 2005. Disponível em ftp://logica.cle.unicamp.br/pub/e-prints/Beziau-Coniglio.pdf

[5] BOLZANO, B. Theory of Science. Ed. e trad. Rolf George. Oxford: Basil Blackwell, 1972.

[6] BROWN, D. e Suszko, R. Abstract logics. Dissertationes mathematicae, Vol. 102, p. 9-41, 1973.

[7] CALEIRO, C. e Ramos, J.. From fibring to cryptofibring. A solution to the collapsing problem. Logica Universalis. Vol. 1(1), p. 72-92, 2007.

[8] CARNAP, R. Meaning and necessity: A study in Semantics and Modal Logic. ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1988.

[9] CARNIELLI, W. A. e Coniglio, M. E. e Gabbay, D. e Gouveia, P. e Sernadas, C. Analysis and synthesis of logics: How to cut and paste reasoning systems. A sair.

[10] CARNIELLI, W. A. e Coniglio, M. E. e Bianconi, R. Lógica e aplicações: Matemática, Ciência da Computação e Filosofia (Versão preliminar - Capítulos 1 a 5). Disponível em http://www.cle.unicamp.br/prof/coniglio/LIVRO.pdf

[11] CARNIELLI, W. A. e Coniglio, M. E. e D'Ottaviano, I.M.L. A new dimension on translations between logics. A sair.

[12] CARNIELLI, W. A. e D'Ottaviano, I.M.L. e Alves, E.H. Translations between logics: a manifesto. Logique et Analyse, Vol. 40, p. 67-81.

[13] CHANG, C. C. e Keisler, H. J. Model Theory. 3 ed. Amsterdam: North Holland, 1990.

[14] COFFA, A. Dos concepciones de elucidación filosófica. Crítica, Vol. VII(21), P. 43-67, 1975.

[15] CONIGLIO, M. E. Combinação de lógicas. Material de Apoio da 1ª Mini-Escola de Lógica PUC-Rio. Disponível em http://www.cle.unicamp.br/prof/coniglio/teaching.htm

[16] CONIGLIO, M. E. Towards a stronger notion of translation between logics. Manuscrito - Rev. Int. Fil., Campinas, Vol. 28(2), p. 231-262, jul.-dez. 2005.

[17] CONIGLIO, M. E. e Carnielli, W. A. Transfers between logics and their applications. Studia Logica, Vol. 72(3), p. 367-400, 2002.

[18] CONIGLIO, M. E. The Meta-Fibring environment: Preservation of meta-properties by fibring. CLE e-Prints. Vol. 5(4), 2005. Disponível em ftp://logica.cle.unicamp.br/pub/e-prints/vol.5,n.4,2005.pdf

[19] DA SILVA, J.J. e D'Ottaviano, I.M.L. e Sette, A.M. Translations between logics. In: CAICEDO, X., MONTENEGRO, C.H. (Ed.) Models, algebras and proofs. New York: Marcel Dekker, p. 435-448 (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 203), 1999.

[20] DEL CERRO, L.F. e Herzig, A. Combining classical and intuitiionistic logic, or: Intuitionistic implication as as conditional. In: BAADER, F. e Schulz, K.U. (Ed.) Frontiers of Combining Systems: Proceedings of the 1st International Workshop, Munich, Applied Logic, p. 93-102. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[21] D'OTTAVIANO, I.M.L. e Feitosa, H.A. Conservative translations and model-theoretic translations. Manuscrito. Vol. XXII(2), p. 117-132, 1999.

[22] D'OTTAVIANO, I.M.L. e Feitosa, H.A. Many-valued logics and translations. In: CARNIELLI, W.A. (Ed.) Multi-valued logics. Journal of Applied

Non-Classical Logics, Vol. 9(1), p. 121-140, 1999.

[23] D'OTTAVIANO, I.M.L. e Feitosa, H.A. Paraconsistent logics and translations. Synthèse, Dordrecht, Vol. 125(1-2), p. 77-95, 2000.

[24] D'OTTAVIANO, I.M.L. e Feitosa, H.A. Is there a translation from Łukasiewicz logics into classical logic? Poznan Studies in Philosophy of the Sciences and the Humanities. Amsterdam/New York, Vol. 91, p. 157-168, 2006.

[25] EPSTEIN, R. L. Propositional logics: The semantic foundations of Logic. Vol. 1. 2 ed. Belmont: Wadsworth, 2001.

[26] ETCHEMENDY, J. The concept of logical consequence. Stanford: CSLI Publications, 1999.

[27] FAJARDO, R. e Finger, M. Non-normal modalisation. In: BALBIANI, P. e Suzuki, N.-Y. e Wolter, F e Zakharyaschev, M. (Ed.) Advances in Modal Logic. King's College Publications, Vol. 4, p. 83-95, 2003.

[28] FEITOSA, H.A. Traduções conservativas. Tese de doutorado. Campinas: Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

[29] FEITOSA, H.A. e D'Ottaviano, I.M.L. Conservative translations. Annals of Pure and Applied Logic, Amsterdam, Vol. 108, p. 205-227, 2001.

[30] FERNÁNDEZ, V. Semântica de sociedades para lógicas n-valentes. Dissertação de Mestrado. Campinas: Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 2001.

[31] GABBAY, D. Fibred semantics and the weaving of logics: Part 1. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 61(4), p. 1057-1127, 1996.

[32] GABBAY, D. Fibring Logics. Oxford: Clarendon Press, 1999.

[33] GENTZEN, G. On the relation between intuitionistic and classical arithmetic. In: SZABO, M. E. (Ed.) The collected papers of Gerhard Gentzen. Amsterdam: North-Holland, 1969.

[34] GLIVENKO, V. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. Académie Royale de Belgique, Bulletins de la Classe de Sciences, s. 5, Vol. 15, p. 183-188, 1929.

[35] GÖDEL, K. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus. In: FEFERMAN, S. *et alii* (Ed.) Collected works. Oxford: Oxford University Press, 1986.

[36] GÖDEL, K. On intuitionistic arithmetic and number theory. In: FEFERMAN, S. *et alii* (Ed.) Collected works. Oxford: Oxford University Press, 1986.

[37] GÖDEL, K. Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines. In: GÖDEL, K. Obras completas. Trad. Jesus Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1989.

[38] GOLDBLATT, R. Topoi: The categorial Analysis of Logic. 2 ed. Amsterdam: North-Holland, 1984.

[39] GÓMEZ TORRENTE, M. Tarski on logical consequence. Notre Dame Journal on Formal Logic, Vol. 37, p. 125-151, 1996.

[40] HAACK, S. Filosofia das lógicas. tradução Cezar Augusto Mortari, Luiz Henrique de Araújo Dutra. - São Paulo: Editora UNESP, 2002.

[41] KOLMOGOROV, A. N. On the principle of excluded middle. In: HEIJENOORT, J. (Ed.) From Frege to Gödel: a source book in mathamatical logic. Cambridge: Harvard University Press, 1977.

[42] ŁOS, J. e Suszko, R. Remarks on sentential logics. Indagationes Mathematicae, Vol. 20, p. 177-183, 1958.

[43] ŁUKASIEWICZ, J. e Tarski, A. Investigations into the sentential calculus. In: TARSKI, A. Logic, Semantics, Metamathematics. 2 ed. Trad. J. H. Woodger. Ed. J. Corcoran. Indianapolis: Hackett, 1983.

[44] MARCOS, J. Semânticas de Traduções Possíveis. Dissertação de Mestrado. Campinas: Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

[45] MEDEIROS, M. P. N. de. Traduções via teoria da prova: aplicações à lógica linear. Natal: EDUFRN, 2002.

[46] MENDELSON, E. Introduction To Mathematical Logic. 4 ed. London: Chapman and Hall, 1997.

[47] PRAWITZ, D. e Malmnäs, P.E. A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic. In: SCHMIDT, H. *et alii* (Ed.) Contributions to mathematical logic. Amsterdam: North-Holland, p. 215-229, 1968.

[48] QUINE, W. V. Dois dogmas do empirismo. in: PORCHAT, O. (org.) Ensaios/Ryle, Austin, Quine, Strawson. São Paulo : Abril Cultural, 1980. 2 ed., p. 231-248. (Col. Os Pensadores)

[49] QUINE, W. V. O. Philosophy of Logic. 2 ed. Cambridge: Harvard University Press, 2004.

[50] SEOANE, J. Consecuencia lógica: La perspectiva tarskiana inicial. CLE e-Prints. Vol. 2(8), 2002. Disponível em
ftp://logica.cle.unicamp.br/pub/e-prints/vol.2,n.8,2002.pdf

[51] SEOANE, J. Consecuencia lógica: La perspectiva tarskiana semántica. CLE e-prints. Vol. 3(2), 2003. Disponível em:
ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/e-prints/vol.3,n.2,2003.pdf

[52] SERNADAS, A. e Sernadas, C. e Caleiro, C. Fibring of logics as a categorial construction. Journal of Logic and Computation, Vol. 9(2), p. 149-179, 1999.

[53] SERNADAS, C., Rasga, J. e Carnielli, W. A. Modulated fibring and the collapsing problem. Journal of Symbolic Logic, Estados Unidos, Vol. 67(4), p. 1541-1569, 2002.

[54] TARSKI, A. Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques. Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, Vol. 7, p. 270-272, 1928.

[55] TARSKI, A. Fundamental concepts of the methodology of deductive sciences. In: TARSKI, A. Logic, Semantics, Metamathematics. 2 ed. Trad.

J. H. Woodger. Ed. J. Corcoran. Indianapolis: Hackett, 1983.

[56] TARSKI, A. On some fundamental concepts of Metamathematics. In: TARSKI, A. Logic, Semantics, Metamathematics. 2 ed. Trad. J. H. Woodger. Ed. J. Corcoran. Indianapolis: Hackett, 1983.

[57] TARSKI, A. The concept of logical consequence In: TARSKI, A. Logic, Semantics, Metamathematics. 2 ed. Trad. J. H. Woodger. Ed. J. Corcoran. Indianapolis: Hackett, 1983.

[58] TARSKI, A. The concept of truth in formalized languages. In: TARSKI, A. Logic, Semantics, Metamathematics. 2 ed. Trad. J. H. Woodger. Ed. J. Corcoran. Indianapolis: Hackett, 1983.

[59] WÓJCICKI, P. Theory of logical calculi: basic theory of consequence operations. Dordrecht: Kluwer Academic Press (Synthese Library, Vol. 199), 1988.