PP026 - UTILIZANDO PROBLEMAS DA HISTÓRIA ANTIGA DA MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES NO 9º ANO DA ESCOLA BÁSICA[1].

Marcelo Miranda Serrão
Universidade Federal do Pará - UFPA
mmserrao@hotmail.com

João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará - UFPA
brand@ufpa.br

Resumo
Nesta comunicação apresentamos uma pesquisa inicial a respeito da utilização de problemas matemáticos da antiguidade como estratégia para o ensino de equações no 9º ano da escola básica a partir da integração de atividades diferenciadas em sala de aula inter-relacionando alguns conceitos matemáticos. Para isso, faremos uma leitura de parte da obra Aritmética de Diofanto visando uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos e buscando subsídios para a seleção e elaboração de atividades que nos permitirão tratar os conteúdos envolvidos neste nível de ensino de Matemática.

Palavra-Chave: Problemas históricos. Aritmética de Diofanto. Ensino de equações.

Abstract
In this communication we present some initial research regarding the use of mathematical problems of antiquity as a strategy for teaching equations in the 9th year of primary school from the integration of different activities in the classroom interrelating some mathematical concepts. To do so, We will read part of the book Arithmetic of Diophantus seeking a better understanding of the concepts involved and seeking grants for the selection and preparation of activities that allow us to treat the contents involved in this level of mathematics teaching.

Keywords: Historical problems. Arithmetic of Diophantus. Teaching equations.

Introdução

Com a ocupação romana, a matemática grega parou de se desenvolver e, somente no século III ganhou novo impulso com o matemático Diofanto de Alexandria que introduziu a álgebra o estilo sincopado, cuja característica principal é o uso de abreviações de palavras para a escrita de equações. Foi o primeiro passo em direção à

[1] Comunicação Oral

notação algébrica. Das obras de Diofanto de Alexandria, A *Aritmética*[2] é a mais importante. Escrita em grego, é um tratado analítico de teoria algébrica dos números e constituída por 13 livros, como nos diz o próprio Diofanto em seu prefácio. Até pouco tempo, desses livros eram conhecidos apenas 6 (na língua original); atualmente, temos mais 4 livros, traduzidos em árabe, que alguns historiadores julgam fazer parte da obra de Diofanto.

Quase tudo que conhecemos sobre a vida pessoal de Diofanto está contido no seguinte sumário de um epitáfio que aparece na "Antologia Grega":

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida. (BOYER, 1996, p. 121)

A *Aritmética* de Diofanto é um trabalho completamente diferente dos demais trabalhos gregos da época, assemelhando-se aos trabalhos "algébricos" dos babilônios, mas revelando relativamente a eles, um grande avanço nesta área. Esta obra não é uma exposição sistemática de proposições, mas uma seleção de 130 problemas de natureza variada e as demonstrações são apenas ilustrações (verificações, restaurações), em casos particulares concretos. Uma das contribuições mais significativas deste trabalho diz respeito às notações: são introduzidas algumas abreviaturas para designar quantidades e operações, iniciando o que viria a chamar-se "álgebra sincopada".

Traduçao latina (1670) de uma obra de Diofanto

De acordo com Brandemberg (2010) a linha do tempo começaria pelos babilônios e egípcios, que desenvolveram regras para vários cálculos e para resolução de problemas, sem o uso de notações para apresentá-las formalmente. Saltaria quase 2000 anos depois, para o grego Diofanto que introduziu um sinal especial para a incógnita em uma equação, além de uma escrita das equações semelhantes a nossa. O

[2] Arithmeticorvm é uma obra de Diophanti Alexandrini datada de 1670, acesso a partir da disponibilização através do site www.google.com/books/diofanto. no formato pdf.

próximo salto, cerca de 1400 anos depois, remete ao matemático francês François Viète (1540-1603), que introduziu um cálculo com letras, inaugurando assim a era das fórmulas em Matemática e o último salto levaria a gênese da noção de estrutura algébrica que, posteriormente, levaria a um mundo “abstrato”.

Segundo Roque (2012) a contribuição mais conhecida de Diofanto é ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como arithmos, de onde vem o nome “aritmética”. O livro *Aritmética* contém uma coleção de problemas que integrava a tradição matemática da época, Já no livro I, ele introduz símbolos, aos quais chama “designações abreviadas”, para representar os diversos tipos de quantidade que aparecem nos problemas. O método de abreviação representava a palavra usada para designar essas quantidades por sua primeira ou última letra de acordo com o alfabeto grego.

Diofanto usou o símbolo análogo à letra grega ζ para representar à incógnita; para o quadrado da incógnita usou Δ^{Y}, à qual chamou dynamis (quadrado); para cubo da incógnita usou K^{Y} e chamou-lhe Kybos; para a potência de expoente quatro usou $\Delta^{Y}\Delta$ e chamou-lhe dynamis-dynamis; para as potências de expoente cinco e seis usou, respectivamente, ΔK^{Y} (dynamis-kybos) e $K^{Y}K$ (kybos-kybos) (Roque, 2012, p. 232).

Símbolos Diofantinos	**Descrição**	**Notação Moderna**	**Descrição**
ζ	Arithmos	x	Incógnita
Δ^{Y}	Dynamis	x^2	Quadrado
$\mathbf{K}^{Y}$	Kybos	x^3	Cubo
$\Delta^{Y}\Delta$	Dynamis-Dynamis	x^4	4ª Potência
$\Delta\mathbf{K}^{Y}$	Dynamis-Kybos	x^5	5ª Potência
$\mathbf{K}^{Y}\mathbf{K}$	Kybos-Kybos	x^6	6ª Potência

Tabela 1: confeccionada a partir de Roque (2012)

Muitos dos problemas tratados na Aritmética conduzem a equações do 1º e 2º graus, a uma ou mais incógnitas, determinadas ou não; outros se referem a equações cúbicas, mas para estas Diofanto escolhe adequadamente os dados para que seja fácil obter a solução. Há também nela problemas algébricos que Diofanto resolve por recurso à geometria e problemas sobre triângulos retângulos de lados racionais. Para os problemas propostos, são aceitas somente soluções racionais positivas. São os problemas "sobre" resolução de equações os que mais nos interessam em nossa abordagem. Problemas como "dividir um número dado em dois outros, sabendo sua diferença" e suas estratégias de resolução. Que nos permitam a partir de suas comparações um ensino mais efetivo na resolução de equações do primeiro e segundo grau na escola básica.

Alguns problemas selecionados da *Aritmética* de Diofanto para nossas atividades em sala de aula

Aqui, selecionamos, inicialmente, apenas três problemas e suas respectivas atividades, buscando relacionar a história da matemática grega ao ensino de equações na escola básica.

Problema I-1 **- Dividir um número dado em dois números de diferença dada.**

a) **Resolução proposta por Diofanto (retórica)**: Seja 100 o número e a diferença 40; achar os números. Supondo $arithmo$ o número menor, o maior será $arithmo\ mais\ 40$; logo, os dois somados dão $2\ arithmos\ mais\ 40$, que vale 100. Então, 100 é igual a $2\ arithmos\ mais\ 40$. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros ficando $2\ arithmos\ igual\ a\ 60$. Logo o número será 30. Então, $arithmo\ igual\ a\ \mathbf{30}\ \ e\ arithmo\ mais\ 40\ igual\ a\ \mathbf{70.}$

b) **Uma resolução usando as abreviações (mais geral)**: Supondo ζ o número menor, o maior será $\zeta + 40$; logo, os dois somados dão $2\zeta + 40$, que vale 100. Então, 100 é igual a $2\zeta + 40$. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros ficando 2ζ igual a 60. Logo o número será 30. Então, $\zeta\ igual\ a\ \mathbf{30}\ e\ \zeta + 40\ igual\ a\ \mathbf{70.}$

c) **Resolução em notação moderna:** Supondo x o número menor, o maior será $x + 40$; logo, os dois somados dão $2x + 40$, que vale 100. Então, 100 é igual a $2x + 40$. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros $2x + 40 - 40 = 100 - 40$ ficando $2x$ igual a 60. Logo o número será 30. $x = \mathbf{30}$ e $x + 40 = \mathbf{70.}$

Atividade Proposta: Vamos supor novos valores para o número e para a diferença dada no problema, propondo nomear a incógnita, e assim, buscar identificar expressões generalizadoras através de situações corelatas. Essa atividade tem como objetivo desenvolver no aluno habilidades investigativas, identificando as estruturas matemáticas, a função da incógnita, e construir uma linguagem algébrica para descrevê-la simbolicamente, propiciando ao aluno a partir das ideias de Diofanto a criação de expressões que possuam **regularidades** na resolução de problemas.

Problema I-27 **- Encontrar dois números com soma e produto dados.**

a) **Resolução proposta por Diofanto (retórica)**: Considere que a soma é 20 e o produto, 96. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 arithmos, começamos por dividir a soma desses números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos um arithmos somado a e subtraído de 10, respectivamente, cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída 1 arithmos mais a metade acrescentada de 1 arithmos obtendo 20, que é a soma desejada. Para que o produto seja 96, multiplicamos essas mesmas quantidades, obtendo 100 subtraído do quadrado do arithmos (um dynamis). Chegamos, assim, à conclusão de que o dynamis deve ser 4, logo, o valor do arithmos é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, **8** e **12**.

b) **Uma resolução usando as abreviações (mais geral)**: Se esses números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja 2ζ, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ζ de um destes 10 e adicionando ζ ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos 10 – ζ + 10 + ζ = 20. Mas sabemos também que o produto desses números é 96, logo, podemos escrever (10 – ζ) (10 + ζ) = 96. Observamos, então, que $10^2 - \Delta^y = 96$, e concluímos que o valor de ζ deve ser 2. Logo, os números procurados $10 - \zeta$ e $10 + \zeta$ são, respectivamente, **8** e **12**.

c) **Resolução em notação moderna:** Supondo $x\ e\ y = 10$, seja $2x$ a diferença entre eles, então existe z, tal que $x = 10 - z\ e\ y = 10 + z$. Substituindo na equação $x.y = 96$ obtemos: $(10 - z).(10 + z) = 96$; logo, $100 + z^2 = 96$. Então, z é igual a 2. Logo, os números procurados $x = 10 - z$ e $y = 10 + z$ são, respectivamente, **8** e **12**.

Atividade Proposta: Quanto a esta atividade, pretendemos que os alunos passem a interpretar os diversos aspectos que envolvem a resolução de equações e que possam formular a partir dessas ideias generalizações que permitam resolver o **problema I-27** por diversas formas. Então, para o devido entendimento desse problema, como sugestão vamos partir no sentido inverso da resolução proposta por Diofanto. Iniciamos propondo dois números quaisquer para encontrar a soma e o produto, e assim identificar expressões em situações correlatas.

Problema I-28 **- Encontrar dois números cuja soma seja um número igual a 20 e o quadrado somado seja um número igual a 208.**

a) **Resolução proposta por Diofanto (retórica)**: Considere que a soma é 20 e os quadrados somados sejam, 208. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 arithmos, começamos por dividir a soma desses números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos um arithmos somado a 10 e subtraído de 10, respectivamente, cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída 1 arithmos mais a metade acrescentada de 1 arithmos obtendo 20, que é a soma desejada. Para que a soma dos quadrados seja 208, somamos os quadrados dessas mesmas quantidades, obtemos $(10\ menos\ arithmos)^2\ mais\ (10\ mais\ arithmos)^2\ igual\ 208$ e ainda, $10^2\ menos\ 2.10.arithmos\ menos\ (menos\ \text{Dynamis})\ mais\ 10^2\ mais\ 2.10.$ $arithmos\ mais\ Dynamis\ igual\ 208$, então $100\ menos\ 20 arithmos\ mais\ \text{Dynamis}\ mais$ $100\ mais\ 20 arithmos\ mais\ \text{Dynamis}\ igual\ 208$, temos, $200\ mais\ 2\text{Dynamis}\ igual\ 208$. Chegamos, assim, à conclusão de que o valor do arithmos é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 menos 2. e 10 mais 2 ou seja, $\mathbf{8}$ e $\mathbf{12}$.

b) **Uma resolução usando as abreviações (mais geral)**: Queremos encontrar dois números com soma 20 e a soma dos quadrados seja igual a 208. Se esses números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja 2ζ, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ζ de um destes 10 e adicionando ζ ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos 10 – ζ + 10 + ζ = 20. Mas sabemos também que a soma dos quadrados desses números é 208, logo, podemos escrever $(10 - \zeta)^2 + (10 + \zeta)^2 = 208$. Observamos, então, que $100 - 20\zeta + \Delta^y + 100 + 20\zeta + \Delta^y = 208$, portanto $200 + 2\Delta^y = 208$ e concluímos que o valor de ζ deve ser 2. Logo, os números procurados $10 - \zeta$ e $10 + \zeta$ são, respectivamente, **8** e $\mathbf{12}$.

c) **Resolução em notação moderna:** Supondo $x + y = 20\ e\ x^2 + y^2 = 208$, seja x o menos desses números, então existe z, tal que $x = 10 - z\ e\ y = 10 + z$. Substituindo na equação $x^2 + y^2 = 208$ obtemos: $(10 - z)^2 + (10 + z)^2 = 208$; logo, os dois somados dão $200 + 2z^2 = 208$. Então, z é igual a 2. Logo, os números procurados $x = 10 - \mathrm{z}$ e $\mathrm{y} = 10 + \mathrm{z}$ são, respectivamente, $\mathbf{8}$ e $\mathbf{12}$.

Atividade Proposta: Esta atividade tem por finalidade de revisar aspectos matemáticos relacionados ao quadrado da soma de dois termos e o quadrado da diferença, assunto trabalhado no 8º ano. Então, partindo no sentido inverso da resolução proposta por Diofanto. Iniciamos sugerindo dois números quaisquer para encontrar a soma e os quadrados somados, e a partir daí aplicar o método para qualquer par de números sugeridos.

Pressupostos teóricos metodológicos

A resolução de problemas é uma estratégia didático/metodológica importante para o ensino da matemática. Porém, em sala de aula, constata-se que um uso exagerado de regras, e resoluções por meio de procedimentos padronizados, desmotivam tanto alunos quanto professores. O emprego de problemas rotineiros não desenvolve a criatividade e autonomia em matemática.

Hoje, para aprender a resolver os "problemas matemáticos", de um modo geral, são trabalhados em sala de aula exercícios repetitivos visando fixar os conteúdos que acabaram de ser estudados, em um abuso de procedimentos padronizados na resolução de problemas semelhantes. Essa atividade não desenvolve no aluno, a capacidade de se transportar do raciocínio utilizado para o estudo de outros assuntos ou mesmo de problemas relacionados.

A busca por novas alternativas de transposição didática para o ensino de Matemática sugere que tomemos a história da Matemática como uma aliada. A aliança consiste em trabalhar o desenvolvimento histórico de determinados conteúdos com vistas a localizar possibilidades pedagógicas que superem as dificuldades encontradas por professores e estudantes de Matemática (MENDES, 2001) (BRANDEMBERG, 2010).

A resolução de problemas, em um trabalho organizado a partir da elaboração de atividades de cunho histórico, acreditamos, ser uma importante contribuição para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, ao desenvolver no aluno as capacidades de um “pensamento matemático avançado” ou, ao menos, mais elaborado, que não se restringe a aplicação e resolução de exercícios rotineiros que simplesmente valorizam o aprendizado por reprodução ou imitação.

A importância da resolução de problemas matemáticos de cunho histórico deve possibilitar aos alunos mobilizarem conhecimentos e desenvolverem a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance dentro e fora da sala de aula. Assim, os alunos terão oportunidades de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Segundo Dante (1991), “é possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela”.

Os alunos ao resolverem problemas de cunho histórico podem descobrir fatos novos e encontrarem várias outras maneiras de resolverem o mesmo problema, despertando a curiosidade e o interesse pelos conhecimentos matemáticos e assim desenvolverem a capacidade de solucionar as situações que lhes são propostas além da possibilidade de conhecer e comparar as diversas estratégias de resolução e as ferramentas matemáticas disponíveis em cada época.

Considerações

Esse novo olhar despertará no aluno o espírito investigativo e o gosto pela resolução de problemas por meio de fontes históricas através de uma apresentação dos conteúdos que possa garantir o processo de (re) construção das ideias presentes nos livros didáticos atuais, a partir da riqueza do tratamento dos documentos originais de forma contextualizada.

Existem diferentes tipos de problemas e que cada tipo tem uma função no processo de aprendizagem do aluno. Exigem lucidez e paciência: um problema se inicia com uma aparente desordem e é necessário observar as regularidades, os padrões que permitirão a construção do caminho até a solução.

Destacamos que a proposição de problemas deve estar vinculada aos objetivos didáticos, e a realidade escolar do aluno. Trata-se, portanto, de trabalhá-los em sala de aula incentivando os alunos a resolvê-los. Com isso, eles desenvolvem o gosto pela Matemática e os problemas ao desafiarem sua curiosidade, estimulam a pesquisa e motivaram a busca por novas estratégias de resolução que possam lhes proporcionar o desenvolvimento de capacidades, que resultem em uma aprendizagem matemática mais significativa e útil. É necessário, portanto, que o aluno participe ativamente do processo de resolução do problema, podendo criar suas próprias estratégias de resolução, suas competências e suas habilidades.

Referências Bibliográficas

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2010.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática.** 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

MENDES, I. A. O Uso da história no Ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências. Belém, 2001.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.