PP053 - ALGUNS APONTAMENTOS SOBRE O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO

Mônica Suelen Ferreira de Moraes
Universidade Federal do Pará - UFPA
monicasuelen@yahoo.com.br

Marcos Guilherme Moura Silva
Universidade Federal do Pará - UFPA
marcosgmouras@yahoo.com.br

Dailson Evangelista Costa
Universidade Federal do Pará - UFPA
dailson_mat@hotmail.com

Nayra da Cunha Rossy
Universidade Federal do Pará – UFPA
nayrabaker@hotmail.com

Itamar Miranda da Silva
Universidade Federal do Pará – UFPA
Itamar@ufpa.br

Maria José de Freitas Mendes
Universidade Federal do Pará – UFPA
mjfm@orm.com.br

Resumo
O desenvolvimento do cálculo foi construído ao longo da história e preconizado por pesquisadores que buscaram indícios e inferências às questões postas ao longo do tempo, em particular ao conceito de limite de função. Objetiva-se neste artigo realizar uma análise do desenvolvimento histórico e conceitual de limite, evidenciando as principais contribuições trazidas por tais pesquisadores ao longo do tempo. Põe-se em questão a atual definição discorrida por Weierstrass, percebendo-se, consubstanciados na análise histórica aqui retratada, o uso inapropriado de tal acepção.

Palavras-chave: Cálculo; Limite; História do conceito de limite.

Abstract
The development of calculus was built throughout history and advocated by researchers seeking evidence and inferences to the questions posed over time, in particular the concept of limit function. Objective in this paper is to perform an analysis of the historical development and conceptual boundary, highlighting the main contributions made by these researchers over time. Puts into question the current definition studied by Weierstrass, realizing itself, embodied in historical analysis depicted here, the inappropriate use of such purposes.

Keywords: Calculus; Limit; history of the concept of limit

Introdução

O desenvolvimento do Cálculo seguiu um caminho longo e irregular e, no sentido mais formal, foi moldado no século XVII, no entanto, as questões das quais surgiu haviam sido colocadas mais de dezessete séculos antes do começo de nossa era. Desde sua origem até sua formalização, o seu desenvolvimento se deu advindo das ideias de vários estudiosos e temos como objetivo evidenciar neste trabalho histórico suas principais contribuições.

O limite é um conceito fundamental do Cálculo, visto que seus principais conceitos, derivada e integral, são definidos em termos do limite. Boyer (1959) observa que tais definições são agora tão claramente tratadas que é fácil esquecer como estes conceitos foram desenvolvidos ao longo da história.

Durante um longo período, a noção de limite permaneceu indefinida. As discussões em torno do infinito, que eram de cunho filosófico, originaram o estabelecimento desta noção, que, inicialmente, era entendida com a intuição geométrica subjetiva e bastante indefinida (BOYER, 1959).

Origem

O estudo da Matemática grega mostra como as ideias originais do Cálculo têm início em considerações que envolvem tanto noções de grandezas discretas quanto de grandezas contínuas, servindo ambas para se chegar aos resultados do Cálculo. Boyer (1959) afirma que com a crise dos incomensuráveis, que pode ser situada na escola pitagórica, surgiu outra grande polêmica muito fértil entre os filósofos pré-socráticos. O problema da incomensurabilidade entre magnitudes gerou algumas concepções polêmicas acerca da natureza do mundo físico, como a doutrina atomística, defendida por Demócrito (*c.* 400 a.C.), que propunha a existência do infinitamente pequeno compondo o ser das coisas. De acordo com Baron & Bos (1985, p. 19, v. 1), para os atomistas o universo era composto de átomos e de espaço vazio, sendo este "espaço infinitamente em tamanho e os átomos infinitamente em número".

De acordo com Brolezzi (1996), a teoria dos infinitesimais de Demócrito, e seus seguidores, foi combatida por outra escola filosófica pela influência das ideias de Parmênides de Eléia (*c.* 530 a.C). Esta doutrina chamava a atenção para os paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis. O pesquisador destaca que foi proposto considerar a imutabilidade e unidade essencial do mundo físico.

Conforme Baron & Bos (1985), lidamos em Matemática com dois tipos de atividades: 1) contagem de elementos discretos, separados e indivisíveis; e, 2) medida de quantidades que são contínuas e infinitamente divisíveis. Os pesquisadores colocam ainda que existem dois tipos de quantidades com as quais a Matemática costuma trabalhar e que têm produzido grande parte dos modelos, o espaço e o tempo. Zenão de Eléia (*c.* 460 a.C.), aluno de Parmênides, utilizou esses dois tipos de quantidades e desenvolveu o seguinte argumento: ou o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis, ou existe um menor elemento indivisível de tempo e de espaço. Em dois dos paradoxos, a *Dicotomia* e *Aquiles e a tartaruga*, Zenão argumentou que se o tempo e o espaço são divisíveis, o movimento seria impossível.

Assim, de acordo com os pesquisadores, temos o seguinte dilema: ambas as hipóteses levam a conclusões que parecem contrariar o bom-senso, que nos indica que pode haver movimento. Então, alguma coisa deve ser rejeitada: ou o conceito de divisibilidade *ad infinitum* e a existência de indivisíveis em espaço e tempo; ou o conceito de movimento do mundo exterior; ou ainda, o processo de dedução através do qual tiramos conclusões.

Nos outros dois paradoxos, a *Flecha* e o *Estádio*, segundo Baron & Bos (1985), Zenão adota a hipótese que o tempo e o espaço não são infinitamente divisíveis, ou seja, existe uma menor unidade indivisível de tempo e de espaço.

No paradoxo da *Flecha*, Zenão considera uma flecha e assegura que ela deve estar em certo ponto em um dado instante. Como a flecha não pode estar em dois lugares no mesmo instante, não pode se mover naquele instante. No entanto, se está em repouso naquele instante, então ela também não poderia se mover. Segundo Brolezzi (1996, p. 23), "Zenão fecha, assim, o cerco à perplexidade da noção de movimento e de velocidade, trazendo à tona controvérsias intrínsecas que tendem passar despercebidas".

Conforme Bell (1948) estas foram as principais dificuldades encontradas pelos primeiros que se ocuparam com assuntos relacionados à continuidade e ao infinito. O autor ainda afirma que muitos compartilhavam das ideias de Zenão sobre o fato da soma de números infinitos de quantidades maiores que zero resultar em um número suficientemente grande, deixando evidente a lacuna e a dificuldade dos gregos em questão de conhecimento sobre infinitésimos.

Como repercussão desses fenômenos, Brolezzi (1996) afirma que os gregos desenvolveram o que se chamou de "horror ao infinito", que na Matemática teve consequências muito importantes. Segundo Boyer (1996), a Matemática adquiriu outra configuração após Zenão, influenciando profundamente no desenvolvimento da Matemática grega, influência comparável à descoberta dos incomparáveis na qual o autor acredita que se relacione:

> As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em *Os Elementos* os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos (BOYER, 1996, p.52).

Segundo Brolezzi (1996), possivelmente o "horror ao infinito" contribuiu para o desenvolvimento da álgebra geométrica, que consistia na resolução de problemas aritméticos ou algébricos lidando diretamente com grandezas contínuas, realizando todas as operações sem necessidade de referência direta a números e suas representações. Portanto, assinala o autor, não é necessário distinguir entre números racionais ou irracionais, nem pensar se dois segmentos são comensuráveis ou incomensuráveis.

Os pesquisadores apontam que toda teoria de número dos gregos é incorporada na estrutura geométrica e todos os conceitos impraticáveis na geometria são rejeitados, sem invocar em momento algum o infinito. Sobre isso, Boyer (1996) afirma que os conceitos de variação e continuidade, do infinito e do infinitesimal deram nascimento ao Cálculo, no entanto, foram suprimidos da Matemática, observando ainda o trabalho de Euclides como um marco a esta exclusão.

Eves (2004) aponta que o sofista Antífon (*c*. 430 a.C.) contribuiu para problemas envolvendo a quadratura do círculo, antecipando a ideia de que ao duplicar várias vezes os lados de um polígono chegaria ao ponto em que a área desse polígono teria uma diferença mínima em relação à área do círculo. Esse procedimento foi muito criticado por matemáticos da época, argumentando que se uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente esse processo não teria fim, impossibilitando o cálculo dessa área. De acordo com Bell (1948), essa abordagem de Antífon continha o conhecido método de exaustão creditado a Eudoxo.

Segundo Bell (1948), depois que Eudoxo demonstrou esse método de exaustão ficou notável que não havia necessidade de considerar quantidades minúsculas infinitas, pois, para fins matemáticos, cada vez que se dividem quantidades pequenas, elas se tornam tão pequenas que pouco influenciava no resultado.

Silva & Silva (2010) apontam que, os números irracionais, passaram a ser tratados com o mesmo rigor que se tratavam os números racionais, surgindo a partir daí o que se tornaria a moderna teoria dos números irracionais. Os pesquisadores afirmam também que, com esse método, Eudoxo desfez algumas contradições existentes em alguns dos paradoxos criados por Zenão relacionado a quantidades infinitamente pequenas.

Para Brolezzi (1996, p. 26), "o que há de fantástico nesta definição é que exclui o infinitesimal de todas as demonstrações geométricas dos gregos". Além disso, de acordo com o autor, permite raciocinar sem ultrapassar a compreensão intuitiva clara, pois "Eudoxo não propõe ir até o infinito para de fato atingir limite, mas apenas afirma que se pode chegar a uma grandeza tão pequena quanto qualquer outra dada".

Baron & Bos (1985) assinalam que, Arquimedes (287 – 212 a.C.) foi o primeiro a demonstrar isso rigorosamente usando processo de redução ao absurdo. Embora fosse evidente a ideia da demonstração de Arquimedes, o tipo de demonstração usada não era suficiente na Matemática grega sendo então necessário usar a demonstração por absurdo duplo, posteriormente, tratada como exaustão por Grégoire de Saint-Vicent (1584 – 1667). O procedimento tornou-se comum e tais provas continuaram sendo essenciais até o final do século XVII, quando os matemáticos passaram da repetição constante para a prática de passagem direta ao limite.

Antecipações ao Cálculo

A transição da Matemática grega para o rigor algébrico se deu a partir da preocupação dos matemáticos da época ao longo dos séculos XV ao século XVII, com uma grande variedade de problemas práticos. Dentre os matemáticos gregos, Arquimedes foi o que mais se destacou na aplicação da Matemática a problemas físicos e em suas demonstrações, no entanto, outros matemáticos apresentaram esforços na construção de demonstrações mais rigorosas (BARON & BOS, 1985).

A noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluída da Matemática grega, mesmo em Arquimedes. No entanto, o trabalho de Arquimedes, como afirmam Silva & Silva (2010), foi provavelmente o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior das ideias de limite e de infinito no século XIX. Os autores afirmam também que os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria do século XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

A diferença entre o método de exaustão e o limite do cálculo diferencial e integral, para Brolezzi (1996), está no fato de os gregos não realizarem essa passagem ao infinito, por não ter a noção de um contínuo aritmético. No entanto, o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do atual limite quanto no método de exaustão geométrico.

Segundo Baron & Bos (1985), a Matemática na Europa Medieval era um objeto de discussões filosóficas fortemente influenciadas por Aristóteles (*c.* 384-322 a.C.). Eles ainda apontam que a discussão era em torno da natureza das quantidades infinitas relacionadas com o mundo físico e matemático. Dentre as discussões, Aristóteles distingue claramente o infinito atual e o potencial:

> Ele argumenta que, como o mundo é finito, nenhuma grandeza física pode, por processos multiplicativos, tornar-se infinita. O processo de divisão, por outro lado, pode ser continuado eternamente e não existe nenhum estágio não ultrapassável. Ele rejeita a noção de um contínuo composto ou de pontos matemáticos ou de qualquer outra espécie de indivisíveis (BARON & BOS, 1985, p. 56, v. 1).

Os autores explicam que essas foram as discussões entre os filósofos dos séculos XIII e XIV. Neopitagóricos, seguidores da doutrina de Leucipo de Mileto (*c.* 490-460 a.C.) e Demócrito que negavam a divisibilidade ao infinito, construíram sólidos de planos, planos de retas e retas de pontos. Considerou-se o material contínuo composto de pontos indivisíveis. Surgindo assim alguns paradoxos:

> [...] se um ponto não tem dimensão, como é possível que, por multiplicação ou adição de tais pontos, segmentos de retas finitos possam ser obtidos? Se um ponto tem dimensão, como pode ele ser indivisível? (BARON & BOS, 1985, p. 57, v. 1)

Os pesquisadores ainda apontam que surgem também dificuldades com relação à correspondência de pontos sobre círculos concêntricos em qualquer sistema de retas ou curvas produzidas por paralelas ou projeção central. E ainda, se nenhuma reta finita pode constituir-se de um número finito de pontos indivisíveis, então, o número de tais pontos deve ser infinito. Portanto, Baron & Bos (1985) afirmam que a teoria do ponto dá prioridade à ideia de ordens diferentes de infinitos, podendo quantidades infinitas serem consideradas iguais ou não do mesmo modo que as quantidades finitas.

Segundo Boyer (1992), o período do renascimento para o desenvolvimento da Matemática se constitui numa interação imbricada das tradições medievais com ideias mais novas e mais antigas. Nesta época, a retomada de interesse pelas obras de Arquimedes levou a simplificação do cálculo integral, sendo para geometria, o conceito de indivisíveis de fundamental importância.

O cálculo integral primitivo foi desenvolvido então por volta do século XIV, marcado principalmente pelos estudos de Nicole Oresme (*c.* 1323 – 1382), bispo de Lisieux.

> Oresme associava os instantes de tempo dentro do intervalo aos pontos de um segmento de reta horizontal (chamado "linha de longitudes"), e para cada um desses pontos erguia (num plano) um segmento de reta vertical ("latitude"), cujo comprimento representava a velocidade do objeto no tempo correspondente. Ao conectar as extremidades dessas perpendiculares ou latitudes, obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo – num dos mais antigos exemplos da história da matemática do que hoje seria chamado "gráfico de uma função" (BOYER, 1992, p.9).

No século XVII houve uma retomada de interesse ampla pelas obras de Arquimedes, tendo o conceito de indivisível em geometria um papel salutar. O volume de trabalho produzido através dos problemas práticos, neste período foi tão grande que nos limitaremos a tratar apenas de alguns.

De acordo com Baron & Bos (1985), Simon Stevin (1548 - 1620) analisava a Matemática sempre para fins práticos, e se interessou, assim como Arquimedes, pelo problema da determinação de centros de gravidade, dando assim o primeiro passo radical para modificar a estrutura de demonstração de Arquimedes. Em sua demonstração, embora se mantivesse o método de exaustão, o elemento de redução era aos poucos substituído pela passagem direta ao limite.

Os pesquisadores ressaltam também que Johannes Kepler (1571 - 1630) e Galileo Galilei (1564 - 1642) foram os primeiros a abandonar a estrutura de demonstração proposta por Arquimedes, introduzindo assim, o uso dos indivisíveis ou quantidades infinitamente pequenas.

Um tratado escrito em 1635 por Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) abordou sobre os indivisíveis ou infinitesimais fixos aplicados com êxito em problemas de mensuração de áreas e volumes (BOYER, 1992.). Hoje conhecido como "teorema de Cavaliere", o pesquisador aponta que esse princípio permite passar de uma estrita correspondência de indivisíveis numa dada razão à conclusão de que todos esses indivisíveis também estavam entre si nessa mesma razão.

Conforme Boyer (1992), Cavaliere aplicou a ideia dos indivisíveis a uma ampla variedade de problemas suscitados por outros matemáticos como Pierre de Fermat (1601 – 1665), Roberval (1602 - 1675) e Évangelista Torricelli (1608 – 1647), podendo afirmar assim que o método dos indivisíveis não era propriamente de Cavalieri, pois estava sendo amplamente usado por pensadores matemáticos da época.

Para o pesquisador, a consequência lógica dessas ideias foi a geometria analítica de Fermat e René Decartes (1596 - 1650). Decartes publicou *La géometrie* em 1637, somente dois anos depois da publicação da *Geometria indivisibilus*, de Cavalieri, mudando inevitavelmente o curso da análise infinitesimal. Com isso, a geometria pura foi sendo ofuscada, pouco se desenvolveu no próximo século, no qual a análise infinitesimal entrou num processo de aritmetização que quase resultou numa revolução.

O destaque para Fermat advém das contribuições quanto aos métodos de integração iniciados por Eudoxo dois milênios antes (BOYER, 1992). A ele também é atribuída à invenção do processo que atualmente chamamos de diferenciação.

Issac Barow (1630 – 1677) produziu contribuições muito significativas para o desenvolvimento posterior do Cálculo, em especial com a criação do método para determinação de tangentes a curvas pelo uso do "triângulo diferencial" denominado também "triângulo de Barrow".

Enquanto os matemáticos gregos tinham sido essencialmente estáticos em sua linguagem e conceitos, os matemáticos da "Idade dos Gênios", conforme as palavras de Boyer (1959. p. 16), procuram nortear-se no sentido de uma análise de variabilidade.

Assim, conforme Brolezzi (1996), a partir da análise infinitesimal, a época se apresenta madura para o que hoje conhecemos como Cálculo. Boyer (1992) acrescenta que nenhuma invenção nova específica era necessária, as técnicas estavam disponíveis, faltando apenas um "senso de universalidade das regras", necessitavam sim de um algoritmo geral aplicável indistintamente a todas as funções, racional ou irracional, algébrica ou transcendente.

Invenção do Cálculo

Baron & Bos (1985) observam que a tradição atribuiu a Newton e Leibniz um papel central na "invenção" do Cálculo, ainda que o Cálculo não tenha começado nem terminado com estes dois homens.

Por volta de 1666, Newton sintetizou um estudo coerente baseado no que ele chamava de "método de fluxões", no qual as noções de movimento desempenharam um papel central e significativo.

O primeiro livro no qual Newton delineia seu cálculo foi o *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, publicado em 1711, onde o autor descreve a extensão do uso da palavra "análise", argumentando que os algoritmos matemáticos que lidam com processos infinitos são tão respeitáveis quanto aqueles que se aplicam à álgebra ordinária, concedendo assim um espaço considerável ao método das "séries infinitas" (BOYER, 1959, p. 19). Baron & Bos (1985) explicam que o método das séries infinitas foi uma ferramenta indispensável para Newton na quadratura das curvas e na retificação dos arcos.

Baron & Bos (1985, p.39, v. 3) resume as contribuições de Newton da seguinte maneira:

> 1. Newton formulou regras e procedimentos sistemáticos para cobrir as soluções gerais da maioria dos problemas relativos ao cálculo infinitesimal que eram conhecidos no seu tempo.

> 2. Embora muitas dessas regras tivessem sido estabelecidas ou introduzidas de uma ou de outra maneira pelos seus predecessores, ele estabeleceu uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual todos os problemas podiam ser formulados.
> 3. O uso das séries infinitas foi uma ferramenta importante ao estender-se à classe das curvas "quadráveis", isto é, curvas cuja quadratura podia ser determinada [...].
> 4. Com Newton a ideia de que a diferenciação e a integração eram operações inversas foi firmemente estabelecida considerando a ordenada móvel proporcional ao momento ou a fluxão de uma área [...].
> 5. A síntese que Newton atingiu oi possibilitada pelo uso do simbolismo algébrico e das técnicas analíticas. Ele estabeleceu muito tarde a notação "padrão" com ponto para representar a diferenciação e, aparentemente, não sentiu grande necessidade de introduzir qualquer notação específica para a integração.
> 6. Os fundamentos do cálculo foram apresentados por Newton de várias maneiras em épocas diferentes, ele constantemente procurava estabelecer os seus métodos analíticos sobre uma base mais segura.

Boyer (1959) enfatiza que a contribuição de Newton está no reconhecimento de que tudo isso constitui parte de uma nova análise: a aplicação de processos infinitos ao estudo geral de funções de qualquer tipo.

Para Baron & Bos (1985), três ideias fundamentaram a invenção do Cálculo por Leibniz: 1) seu interesse pelo simbolismo e pela notação vinculada à sua ideia de uma linguagem simbólica geral; 2) o reconhecimento de que somar sequências e tomar as suas diferenças são operações inversas e que a determinação de áreas e a de tangentes são operações inversas; e, 3) o uso de um triângulo característico para deduzir transformações gerais de áreas.

Boyer (1959) destaca que o elemento essencial na invenção do cálculo por Leibniz, foi o reconhecimento, em 1676, de que também estava construindo uma análise nova e universal. Em seus primeiros artigos publicados, Leibniz expôs que seu novo método não apresentava impedimentos para funções irracionais ou transcendentes.

Newton e Leibniz chegaram ao Cálculo através de caminhos diferentes. Não só é diferente a linguagem com que ambos expressaram as ideias fundamentais do Cálculo, mas também em termos de concepção pode-se verificar uma diferença grande entre os trabalhos deles. Brolezzi (1996) explica que tanto Newton quanto Leibniz podem ser considerados como os primeiros a expressar a ideia da reciprocidade entre a diferencial e a integral, que constitui o *Teorema Fundamental do Cálculo*. Mas as maneiras de ver o Cálculo eram distintas.

A compreensão do significado dessa situação levou cada um deles a desenvolver uma linguagem, uma lógica e um simbolismo para a nova matéria, conforme explica Boyer (1992, p. 21), no entanto, nenhum dos dois "estavam em condições de apresentar uma fundamentação lógica convincente". O pesquisador aponta que Newton chegou mais próximo disso, quando descreveu sua ideia de "primeira e última razões".

Boyer (1959) mostra que, de modo geral, podemos dizer que Newton baseou seu Cálculo em noções de continuidade, enquanto Leibniz tomou como base a ideia discreta das mônadas. Ambas as maneiras de abordar o problema mostraram-se igualmente úteis, pois, enquanto não estava estabelecida a noção de limites, as ideias de movimento contínuo e de infinitésimos discretos surgiram como tentativas de esquematizar as primeiras impressões sensíveis quanto à variação.

Concordamos com Brolezzi (1996) ao afirmar que as concepções de Leibniz, quanto ao discreto, e a de Newton, quanto ao contínuo, recaíram na teoria do Cálculo, que posteriormente define melhor o que eram os números reais e a ideia de limite.

Portanto, vemos que ambas as abordagens de Newton e Leibniz são caminhos a invenção do Cálculo. O cálculo moderno é o mesmo criado por eles somente com linguagem e abordagem conceitual bem distinta de ambos.

Formalização do conceito de limite

Posterior à nova análise proposta por Newton e Leibniz e sua difusão, houve muitas críticas quanto aos fundamentos do novo método por serem ainda bastante instáveis. Dentre os críticos, podemos destacar George Berkeley (1685-1753), James Jurin (1684-1750) e Benjamim Robins (1707-1751).

Baron & Bos (1985) apontam que, embora os críticos não concordassem sobre a maioria dos assuntos, duas coisas ficaram claras em suas discussões: que as quantidades infinitamente pequenas não podiam ser aceitas e que as razões últimas de Newton só podiam tornar-se rigorosas sendo introduzidas como limites. Robins deu a seguinte explicação sobre o que entendia por limite:

> [...] definimos uma grandeza última como sendo o limite do qual uma grandeza variável pode aproximar-se em qualquer grau de proximidade, embora ela nunca possa tornar-se absolutamente igual a ele (CAJORI, 1919 *apud* BARON & BOS, 1985, p. 27, vol.4).

Concordando com este pensamento, Leonhard Euler (1707-1783) afirmou em seu livro sobre cálculo diferencial que quantidades infinitamente pequenas não existiam, sendo as quantidades menores que qualquer quantidade finita igual a zero (BARON & BOS, 1985.).

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) defendeu desde 1754 o uso de limites para rover uma base rigorosa para o Cálculo. Baron & Bos (1985, p. 28, v. 4) enfatizam que, para D'Alembert, "o Cálculo opera com os limites das razões de diferenças finitas de quantidades variáveis inter-relacionadas". O matemático explicou o conceito de limite da seguinte forma:

> Diz-se que uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável (BARON & BOS, 1985, p. 28, v. 3).

As desvantagens da definição de limite apresentadas por Robins e D'Alembert reside no fato de que em suas concepções as variáveis são concebidas como crescentes ou decrescentes, podendo assim o limite estar situado somente na fronteira do domínio da variável, no entanto sabemos que, se o domínio de uma variável é aberto, topologicamente, há um limite, mas se o domínio é fechado, não há limite, pois a fronteira do domínio pode ser atingida pela variável.

Através de inúmeros trabalhos o Cálculo desenvolveu-se numa disciplina da Matemática que veio ser chamada de análise. A transição do cálculo para a análise no século XVIII, não foi somente uma questão de crescimento e divisão em subcampo, como nos apontam Baron & Bos (1985), envolveu também uma transformação fundamental em sua natureza.

> O cálculo por volta de 1700 era ainda essencialmente orientado para a geometria. Tratava de problemas sobre curvas, empregava símbolos algébricos, mas as quantidades que se utilizava eram principalmente interpretadas como ordenadas e abscissas de curvas, ou como outros elementos de figuras geométricas. Durante a primeira metade do século diminuiu o interesse pela origem geométrica dos problemas, e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras. A análise tornou-se o estudo e manipulação de fórmulas (BARON & BOS, 1985, p. 43, v.3)

A mudança de interesse de figuras para fórmulas estava ligada ao surgimento do conceito de função, destacando-se a ideia da análise como estudo de funções e fórmulas em geral advinda de Euler.

Embora Leibniz e Newton tenham sido reconhecidos pela invenção da nova análise não foram eles que formalizaram os algoritmos do Cálculo. Somente no século XIX, suas ideias foram formalizadas, e dentre aqueles que contribuíram para essa formalização destacamos Cauchy e Weierstrass.

Conforme Brolezzi (1996), em 1826, Cauchy estabelece a noção de limites elaborando em linguagem Matemática uma estrutura flexível dentro da qual as noções de discreto e contínuo pudessem ser trabalhadas. As variáveis e seus limites são apresentados por Cauchy da seguinte maneira:

> Chamamos quantidades *variável* aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado chamamos quantidades *constante* aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado o *limite* de todos os outros. [...] Indicaremos o limite para o qual converge determinada variável pela abreviação "lim." escrita antes da variável em questão (BARON & BOS, 1985, p.46, v. 4).

A definição de Cauchy é a mesma de Robins e D'Alembert, embora não exclua a possibilidade da variável alcançar seu limite, no entanto, evitou desvantagens em seu conceito combinando-o com o conceito de função, através de uma importante interpretação do termo "infinitamente pequeno", permitindo-se formular uma definição precisa para continuidade (BARON & BOS, 1985).

Usando sua interpretação de "infinitamente pequeno", Cauchy definiu a função derivada como um limite, sem recorrer às diferenciais. Ele também elabora uma interpretação para as diferenciais que o permitia manipulá-las em fórmulas, porém sem considerá-las infinitamente pequenas. Quanto à integração, foi apresentado outro enfoque, considerando-a como soma. Cauchy definiu a integral como um somatório que tende a um limite (BARON & BOS, 1985).

Em resumo, percebemos que o enfoque do Cálculo alcançado até então é o mesmo que o moderno: o conceito fundamental do cálculo diferencial é a derivada definida como limite; o conceito de integral refere-se ao do limite somatório e não o inverso da diferenciação; e, o teorema fundamental do cálculo tornou-se um teorema que precisa ser provado, ao invés de ser um corolário da definição de integral.

Com a noção de limite formulada, Weierstrass formaliza o Cálculo, introduzindo a linguagem dos Épsilons e Deltas. Ele quis estabelecer no Cálculo a teoria de funções sobre o conceito apenas de número, desvinculando-o assim da geometria. Para isto, foi necessário dar uma definição de número irracional que fosse independente da noção de limite.

Boyer (1959) ressalta que Weierstrass foi levado assim a fazer investigações profundas dentro da teoria da aritmética, não enfatizando a natureza do próprio número inteiro, mas começou com o conceito de número inteiro como um agregado de unidades desfrutando de uma propriedade característica em comum, enquanto um número complexo foi ser pensado da forma de um agregado de unidade de várias espécies, tendo mais de uma propriedade característica.

Ao estabelecer a base do Cálculo mais formal, Weierstrass também criticou a definição de contínuo trazida até então por Cauchy. Weierstrass definiu uma função contínua $f(x)$ num determinado intervalo se, para qualquer valor x_0 neste intervalo e para um número positivo arbitrariamente pequeno ε, for possível encontrar um intervalo próximo de x_0, tal que para todos os valores nesse intervalo, a diferença $f(x) - f(x_0)$ for menor em valor absoluto que ε (BOYER, 1959).

Weierstrass deu a seguinte definição para o limite:

> O número L é o limite da função $f(x)$, onde $x = x_0$ se, dado qualquer número arbitrariamente pequeno ε, outro número δ possa ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ, o valor de $f(x)$ diferir de L por menos que ε (BOYER, 1959, p. 287) [tradução nossa]

Boyer (1959) afirma que não há nesta definição nenhuma referência para os infinitesimais, então a definição do cálculo infinitesimal que mesmo hoje em dia é usado, é mostrado como inapropriado. Enfatiza ainda que embora um número de matemáticos, do tempo de Newton e Leibniz ao tempo de Bolzano e Cauchy, procurou evitar o uso de quantidades infinitamente pequenas, o simbolismo livre de equívocos de Weierstrass suprime efetivamente do Cálculo a noção de infinitesimal fixo.

Considerações Finais

A partir das considerações expostas, percebemos ainda que a dificuldade em entender e até mesmo aceitar a ideia de limite se fez presente desde suas origens até a real formalização deste conceito. Percebemos ainda que o conceito de limite é responsável por inúmeras dificuldades de aprendizagem, o que justifica o grande número de pesquisas realizadas relacionadas ao processo de aprendizagem desse conceito.

Referências Bibliográficas

BARON, Margaret. E; BOS, H. J. M. *Curso de história da matemática*: origens e desenvolvimento do cálculo. Vol 1-5. Trad. de José Raimundo Braga Coelho. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BELL, Eric Temple. *Los grandes matemáticos - desde Zenon a Poincare*: su vida y sus obras. Buenos Aires: Losada, 1948.

BOYER, Carl. B. *The history of calculus and its conceptual development*. New York: Dover publications, 1959.

_____________. *Cálculo.* Trad. de Hygino H. Domingues. v. 6. São Paulo: Editora Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula).

_____________. *História da matemática*. 2. ed. Trad. de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BROLEZZI, Antonio Carlos. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

EVES, Howard. *Introdução a história da matemática*. Trad. de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.