TK003--UMA ABORDAGEM DO CÁLCULO INTEGRAL DOS PRIMÓRDIOS AOS TEMPOS ATUAIS: ATIVIDADES À LUZ DA HISTÓRIA

Giselle Costa de Sousa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

giselle@ccet.ufrn.br

Resumo

O Cálculo é um ramo da Matemática em transformação, sobretudo, em três linhas de frentes: o Cálculo Diferencial, o Cálculo Integral e o Cálculo Vetorial, isto porque, embora seus primórdios estejam em bases sólidas, sua estática não se mantém à medida que se reconhece a própria matemática como ciência em transformação, fruto da produção e necessidade humana ao longo dos tempos. Isto posto, o presente trabalho se propõe a tecer considerações sobre o desenvolvimento deste ramo em uma de suas frentes, o Cálculo Integral, haja vista que creditamos que o reconhecimento de seu desenvolvimento lança mão da compreensão de suas bases a favor da elucidação de pontos inerentes à sua aprendizagem. Para tanto, propõe-se a falar dos seus primórdios aos tempos atuais e apresentar uma sequência de atividades inspiradas neste contexto. De fato, os primórdios do Cálculo Integral podem ser atribuídos às primeiras investigações egípcias e babilônicas ao cálculo de áreas por aproximação. Tempos depois, um outro marco na história do desenvolvimento deste ramo consiste nas contribuições de Eudoxo e Arquimedes com o método da exaustão (um aprimoramento da investigação antiga). Posteriormente, tais investigações são desprendidas de situações concretas e passam a generalização com os frutos de sua formalização propostos pela academia ao cálculo curricular (Teorema Fundamental do Cálculo) e por fim, na atualidade, muitos ganhos conceituais, assim como, para seu ensino-aprendizagem, podem ser obtidos mediante o recurso da informática, sobretudo, de *softwares* específicos. Um exemplo desta parceria contemporânea consiste na elaboração de atividades com o *software* GeoGebra à luz das investigações históricas. Neste sentido, apresentamos uma sequência didática desenvolvida para o ensino aprendizagem do Cálculo Integral fundamentada no processo de somas superiores e inferiores com o intuito de promover o ensino do cálculo de áreas de regiões limitadas pelo gráfico de uma função, o eixo *x* e retas verticais, ou seja, introduzir o conceito de integral definida.

Palavras-chave: Cálculo. Integral. História

Abstract

The Calculus is a branch of mathematics in transformation, especially in three main lines of fronts: the Differential Calculus, Integral Calculus and Vector Calculus, this is because, although their beginnings are in solid foundations, your static not remains as it recognizes their mathematics as science in transformation, fruit of the production and need human throughout the ages. That said, the present work proposes to make considerations for development of this branch in one of its fronts, the Integral Calculus, because we believe that the recognition of their development uses the understanding of their bases for elucidation of points inherent in their learning. To this end, we are talking about their beginnings to the current times and present a sequence of activities inspired in this context. In fact, the beginnings of Integral Calculus can be assigned to the first Egyptian investigations and Babilonics to the calculation of areas by approximation. Some time later, another milestone in the history of the development of this branch consists of the contributions of Eudoxus and Archimedes with the method of exhaustion (a former research enhancement). Subsequently, such investigations are disconnected of concrete situations and are widespread with the fruits of its formalization proposed by the Academy curricular calculus (Fundamental Theorem of Calculus) and finally, in actuality, many conceptual gains, as well as for its teaching and learning, can be obtained through the use of information technology, especially, of specific *software*. A contemporary example of this partnership is the develop of activities with the software GeoGebra with the light of historical investigations. In this sense, we present a didactic sequence purpose-built to the teaching and learning of Integral Calculus based on process of upper and lower sums to promote the teaching of calculation of areas of limited regions by the graph of a function, the x axis and vertical straight, i.e. to introduce the concept of definite integral.

Keywords: Calculus. Integral. History.

Introdução

Formalmente o conceito de Cálculo Integral está relacionado ao processo de somas de Riemann (1826-1866) o qual associa, na verdade, limites de somatório. Um destes limites de somatório está conexo, historicamente, com o cálculo da área de regiões planas, limitadas por gráfico de funções f (cujas imagens são positivas ou nulas – $f(x) \geq 0$), um eixo coordenado e retas verticais ou horizontais (limites de integração, por exemplo, x = a e x = b), conforme ilustra a figura a seguir

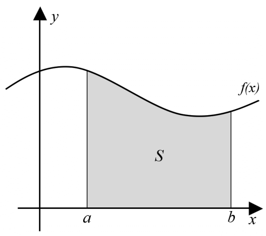

Figura 1. Região plana S

Esta investigação, por sua vez, principia um cálculo aproximando de área de regiões irregulares e limitadas (fechadas) cujo processo de obtenção tem heranças no método usado pelos egípcios e babilônicos (constatado em documentos como os papiros) e, mais adiante, num método que ficou conhecido como Método da Exaustão cuja autoria é atribuída a Eudoxo e Arquimedes. De modo geral, dizemos que o Método da Exaustão busca obter a área da superfície por aproximações exaustivas a partir de figuras regulares como triângulos e retângulos. Posteriormente, este método é sistematizado para o que hoje se formalizou como a integral definida da função, a qual modelou o problema do cálculo de áreas limitando a região pelo gráfico de uma função juntamente com um eixo coordenado e os limites de integração, que consistem no intervalo de suas fronteiras (SILVA, 2010).

É com base nestes três pilares históricos que o presente trabalho almeja tratar do desenvolvimento do Cálculo Integral e, posteriormente, propor uma sequência de atividades numa perspectiva moderna de abordagem do referido conceito sem estar à margem de suas raízes históricas. De fato, para a elaboração das atividades usamos como recurso o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e o princípio de aproximação de áreas (inerente a abordagens históricas) para tratar do desenvolvimento intuitivo do cálculo de áreas de regiões (como definimos anteriormente) por meio da integral definida. Vale salientar que o GeoGebra é um *sotware* gratuito de geometria dinâmica que reúne recursos de Geometria, Álgebra e Cálculo e foi criado por Markus Hohenwarter na Universidade americana *Forida Atlantic University.* Seu *donwload* está disponível no endereço http://www.geogebra.org .

Primórdios

A palavra Cálculo é o diminutivo de *calx* que em latim significa pedra, por isso, calcular no passado significou fazer contas por meio de seixos (pedras). Da acepção da palavra remetemos a sua origem salientando que as contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo são inúmeras. Muitos deles, mesmo que de forma imprecisa ou não rigorosa, já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas – por exemplo, Cavalieri (1598-1647), Barrow (1630-1677), Fermat (1601-1665) e Kepler (1571-1630).

No sentido mais formal o Cálculo foi moldado no século XVII de nossa era, mas as questões das quais surgiu já haviam sido colocadas bem antes. De fato, mesmo quando ainda não havia uma sistematização, no sentido de uma construção logicamente estruturada, a ideia inerente ao esteio das investigações práticas do Cálculo, por exemplo, para o cálculo de áreas e volumes, é notada em documentos remotos como os papiros egípcios e tábuas cuneiformes. Neste sentido, os primórdios do Cálculo Integral aparecem já no Papiro de Rhind (Ames) que apresenta problemas para o cálculo do volume da pirâmide quadrada como 1/3 do volume do prisma retangular e para o cálculo da área do círculo como sendo igual à de um quadrado com diagonal específica. Também constatamos a ideia primordial do Cálculo Integral nos trabalhos dos babilônios ao aplicarem sua álgebra narrativa a vários problemas práticos incluindo mensuração de figuras e a boa aproximação para π como 3 1/8 (mas não distinguiam se trabalhavam com exato e aproximado). (CONTADOR, 2006).

Ainda no caminho dos primórdios salientamos que a matemática empírica dos egípcios e babilônios se contrapõe a matemática dedutiva da escola grega a qual contribui com as investigações de processos infinitos cruciais ao desenvolvimento do Cálculo Integral. De fato, os diálogos de Platão revelam que a descoberta da incomensurabilidade perturbou os matemáticos e os confrontou diretamente com um processo infinito. Contudo, o paradoxo da incomensurabilidade não impediu que gregos como Eudoxo sugerisse uma abordagem a processos infinitos que consta na definição 4 do Livro V de Euclides – método da exaustão (equivalente grego do Cálculo).

Eudoxo e Arquimedes e o método da exaustão

Eudoxo de Cnido (em grego Ευδοξος) é da atual Turquia, Ásia Menor, e viveu entre 408 a.C. e 355 a.C. Foi um astrônomo, matemático e filósofo que viajou ao Egito de onde teria trazido o cálculo mais exato do ano solar grego (o valor que atribuía era de 365 dias e ¼). Frequentou a Academia de Platão e viveu quase sempre em sua cidade natal, onde fundou uma escola e um observatório.

Figura 2. Eudoxo.

É atribuído a Eudoxo a invenção do *método de exaustão,* que permitia aproximar duas quantidades desiguais, tanto quanto se desejasse, pelo esgotamento de suas diferenças. Este trabalho emergiu diretamente de sua teoria de proporções, sendo capaz de comparar números irracionais. Esclarecendo, uma das grandes dificuldades da Matemática naquele tempo era o fato de que certos comprimentos não são comparáveis. O método de comparar dois comprimentos x e y procurando um comprimento t tal que $x = m.t$ e $y = n.t$ para m e n inteiros não funcionava para segmentos de comprimentos 1 e 2, como mostrado pelo Teorema de Pitágoras. Com sua teoria das proporções Eudoxo superou a dificuldade de seus contemporâneos e, em paralelo, intuiu a teoria dos processos infinitos com seu método da exaustão o qual foi incessantemente aplicando, tempos depois, por um outro matemático chamado Arquimedes. (EVES, 2002).

Figura 3. Arquimedes

Arquimedes nasceu em Siracusa, Sicília, por volta de 287 a.C. e foi disciplo da escola grega havendo indícios muito fortes de que, em sua juventude, Arquimedes tenha estudado com os sucessores de Euclides, em Alexandria. (BOYER, 1974).

Existem inúmeras referências a Arquimedes nos escritos de sua época, dada a reputação que ele ganhou neste período. Curiosamente a razão para isso não era um interesse generalizado em Matemática, mas sim nas máquinas que inventou para serem usadas na guerra, especialmente na defesa de Siracusa contra os Romanos, liderados pelo rei Marcelo. Dentre suas invenções destaca-se um sistema de bombeamento chamado parafuso de Arquimedes e o sistema da catapulta, donde deriva sua famosa frase “Dêem-me uma alavanca e um ponto de apoio e eu moverei o mundo”. (SANTOS, 2009, p.1). Foi capaz de aplicar o *método da exaustão* que é uma forma primitiva de integração, como veremos asseguir.

Arquimedes foi morto em 212 a.C. durante a captura de Siracusa pelos Romanos na segunda guerra Púnica, depois que todos seus esforços para manter os romanos na baía com suas máquinas de guerra falharam.

O método da exaustão

O método da exaustão consiste em *exaurir* a figura dada por meio de outras de áreas e volumes conhecidos. O caso mais conhecido é o famoso problema da *quadratura do círculo*, isto é, o problema de obter um quadrado com a mesma área de um círculo de raio *r* dado. Esclarecendo, uma primeira aproximação para a área do círculo é dada pela área do quadrado inscrito no círculo. Com o acréscimo de quatro triângulos isósceles convenientes, obtemos o octógono regular inscrito no círculo, cuja área fornece uma aproximação melhor à área do círculo. Continuando com o processo de acrescentar novos triângulos, tomamos um polígono regular de 16 lados. Do ponto de vista geométrico, é possível observar que já se tem a impressão de termos exaurido o círculo, embora saibamos que existem algumas áreas que não foram cobertas. Continuamos a exaurir o círculo para obter aproximações cada vez melhores para a área do círculo, através de polígonos regulares inscritos.

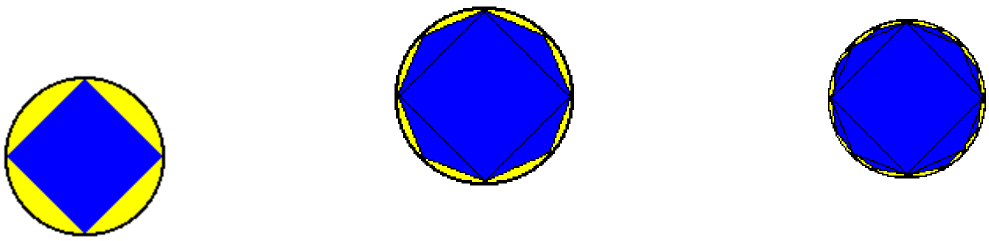

Figura 4. Método da exaustão

Para obter a área de uma região localizada sob um segmento de parábola ACB Arquimedes, usou como primeira aproximação o triângulo ABC, em que C foi tomado de modo que a reta tangente à parábola que passa pelo ponto C seja paralela à reta AB. De modo semelhante são escolhidos os pontos D e E e construídos os triângulos ACD e BCE. Na sequência foram construídos mais triângulos com as mesmas propriedades que os outros obtidos nos passos anteriores. Observamos que tais triângulos estão exaurindo a área da região parabólica.

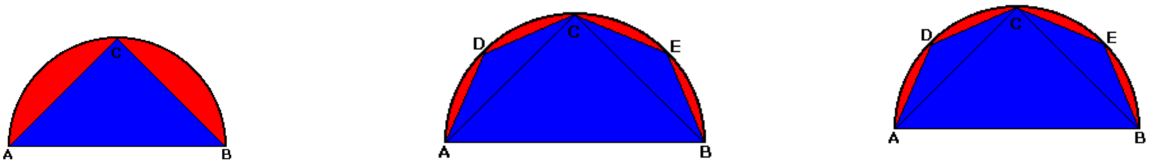

Figura 5. Método da exaustão 2.

Já mencionamos que o método supracitado consolida os primórdios do Cálculo Integral como uma forma primitiva de integração e representante grego deste Cálculo, contudo, sua sistematização ocorre tempos depois, sobretudo, através da inserção do esteio de todo o assunto do Cálculo que consiste no conceito de função, bem como, mediante as contribuições de Newton e Leibniz.

Formalização do Cálculo Integral

O que permitiu a passagem do método de exaustão para o conceito de integral foi a percepção que em certos casos, a área da região pode ser calculada sempre com o mesmo tipo de aproximação por retângulos.

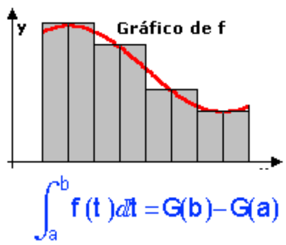

Figura 6. Teorema Fundamental do Cálculo

Esta foi uma descoberta conceitual importante, mas em termos práticos, a descoberta fundamental foi a possibilidade de exprimir a integral de uma função em termos de uma primitiva da função dada. Tal fato é conhecido pelo nome de *Teorema Fundamental do Cálculo* o qual segue: "se *f(x)* é contínua num intervalo fechado [a,b] e se *F(x)* é qualquer antiderivada de *f* em [a,b], então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$". (SWOKOWSKI, 1996, p. 362).

Usando um procedimento similar a este, com polígonos inscritos e circunscritos, Arquimedes calculou a área do círculo de raio unitário mostrando que a área A (=Pi) está compreendida entre: 3 +10/71 = 3,140845 < A < 3 + 1/7 = 3,142857. O inconveniente do método de exaustão de Arquimedes é que para cada novo problema havia a necessidade de um tipo particular de aproximação.

Em composição a abordagem histórica do Cálculo Integral salientamos que o nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli (1744-1807) e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacob (Jacques) Bernoulli (1654-1705) em 1690. Ideias de Bernoulli foram resumidas por Leonard Euler (1707-1783), criando os fundamentos da Análise.

Newton (1643-1727) foi o primeiro a usar sistematicamente o Teorema Fundamental do Cálculo Integral, descoberto por Barrow (1630-1677), mas Leibniz (1646-1716) foi quem primeiro publicou a respeito destas ideias. Tal fato gerou uma histórica polêmica sobre a paternidade do Cálculo cujos detalhes da disputa são abordados no livro *A Guerra do Cálculo* (BARDI, 2008).

Uma abordagem atual: o uso do *software* GeoGebra para compreensão dos conceitos de Cálculo Integral à luz da história da matemática (sequência de atividades)

O uso das TIC para o ensino de Cálculo ganha força pelo reconhecimento que os caminhos de aprendizagem do aluno no mundo da tecnologia atual fazem do computador um instrumento lúdico, instigante, atrativo. Em paralelo, encontram-se no uso da história como recurso metodológico diversos argumentos favoráveis. (MIGUEL; MIORIM, 2005). Isto posto, o presente trabalho se alicerca na aliança destas tendências em educação matemática (TIC com a história da matemática) afim de elaborar atividades para potencializar o ensino de Cálculo, particularmente, integral.

Um ambiente educacional informatizado possibilita ao aluno a construção do seu conhecimento, pois com o auxílio de um recurso computacional o estudante pode modelar problemas e fazer simulações, além de visualizar uma situação que muitas vezes não seria possível sem essa ferramenta. Ambientes informatizados proporcionam um conhecimento matemático dinâmico, contribuindo para a apreensão do significado dos conteúdos matemáticos, proporcionam maior interação do aluno com conhecimento que está sendo construído e favorecem a simulação, permitindo ao educando expresssar seus pensamentos e ideias. Similarmente, a história da matemática serve de inspiração para a construção de atividades e abordagem de conteúdos que serão simulados com base nos processos históricos. Particularmente, para esta proposta as simulaçoes ocorrem via atividades inspiradas no método da exaustão para o caso da integração. Além disso, Mendes (2006, p.55) ressalta que a potencialidade da história frente ao ensino de matemática reside no fato dela ser encarada como

> [...] uma proposta que procura enfatizar o caráter investigatório do processo de construção do edifício matemático, podendo levar os estudiosos desta área de pesquisa à elaboração, testagem e avaliação de atividades de ensino centradas na utilização de informações históricas relacionadas aos tópicos que pretendem ensinar.

Nesta ótica, as concepções que guiam a abordagem das atividades propostas neste trabalho para o ensino de Calculo Integral à luz da história, são calcadas na constução dos alunos os quais investigam e são conduzidos a descobertas orientados pelos professores, assim como os fundadores do Cálculo tiveram que passar por tais investigações. Para tanto, tomamos como embasamento teórico as ideias de Investigação Matemática. (PONTE, 2010).

No que se refere ao Cálculo Integral, o Geogebra dispõe das ferramentas de soma superior, soma inferior e integral cujos objetivos são similares aos processos históricos de aproximação de áreas como o método da exaustão. De posse de tais recursos e inspirados no desenvolvimento histórico do conceito de integral definida, propomos uma sequência de atividades que encaminha a noção intuitiva de área de região plana e sua relação com o Cálculo Integral à luz dos primórdios históricos e a realidade.

Atividades: Introdução do conceito de Integral definida, utilizando o *software* GeoGebra

1 – Objetivos:

- Apresentar a integral definida a partir da interpretação intuitiva do cálculo da área de uma região **S** limitada pelo eixo *x*, uma função *f* contínua, positiva e não constante e as retas $x = a$ e $x = b$, por meio da soma inferior e soma superior de áreas de retângulos com base no TFC e com inspiração na história do Cálculo Integral, exposta e discutida;

- Calcular áreas de regiões definidas (limitadas) pelos gráficos de duas funções, utilizando as ferramentas do GeoGebra e à luz do método da exaustão.

2 – Apresentação e desenvolvimento das atividades – Parte 01

2.1 Insira a função $f(x) = x^2 – 3x + 2$ na caixa de entrada;

2.2 Na caixa de ferramentas, selecione a opção **novo ponto** (2ª janela), clique no gráfico em dois lugares diferentes (considerando *x*(A) e *x*(B) tais que sua imagem é maior ou igual a zero conforme o teorema supracitado);

2.3 Na penúltima caixa de ferramentas, escolha a opção seletor, em seguida, clique ao lado do eixo *y*, da zona geométrica. Na caixa exibida, faça esse valor variar de – 50 a 50, finalmente nomeio de *n* e aplique;

2.4 Para determinar a soma inferior das áreas dos retângulos formados abaixo do gráfico entre os pontos A e B com o número de retângulos determinados por *n*, insira na caixa de entrada o seguinte comando **somainferior[f(x), x(A), x(B), n]** (esse comando significa que a área será limitada pela função *f(x)*, pelas retas x = a e x = b e *n* determinará o número de retângulos) e tecle *Enter*;

2.5 Agora vamos calcular o valor das áreas superiores, ou seja, de retângulos formados na parte superior do gráfico, mas tendo ainda como limite o gráfico. Para isso, insira o comando **somasuperior[f(x), x(A), x(B), n],** na caixa de entrada, e tecle *Enter*;

2.6 Por último, vamos calcular o valor da integral definida no intervalo [a,b] inserindo, na caixa de entrada, o seguinte comando **integral[f(x), x(A), x(B)]**;

2.7 Para uma melhor visualização dos valores, na primeira caixa de ferramentas com a ferramenta *mover*, desloque os resultados encontrados arrastando-os para um local onde não tenha região hachurada;

3 – Observando a construção:

3.1 Manipule o seletor para valores n > 0 (opção mover, 1ª janela). O que observa, justifique sua resposta.

3.2 Manipule o seletor para valores $n < 0$ ou $n = 0$. O que observa, justifique sua resposta.

<u>Visualizando melhor</u>: para verificar a relação entre as áreas, selecione com o botão direito do mouse, em qualquer parte do gráfico onde aparecem as áreas arraste e solte. Ao fazer isso, a opção **zoom in** é acionada e essa região será ampliada.

3.4 Descreva abaixo se você utilizou algum outro recurso ou estratégia diferente dos vistos anteriormente para cada cálculo dessas áreas e aponte as possíveis conexões com as discussões históricas.

4 – Apresentação da atividade – Parte 02

4.1 Calcule a área da região compreendida entre os gráficos das funções *f(x)* e *g(x)*, em cada uma das situações que segue. Para isso utilize o que já foi visto sobre integral e sua criatividade. Em seguida, explique o procedimento utilizado. Dica, podemos inserir na entrada o seguinte comando: **Integral[g(x), f(x), x(B), x(A)]** a) $f(x) = x^2 \;\; g(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2} \;\; g(x) = 5 - 4x^2$

4.2 Insira na entrada de comandos o seguinte: Integral[f(x), g(x), x(B), x(A)], verifique o que acontece em seguida justifique sua resposta.

Vale salientar que a sequência apresentada não faz menção ao contexto histórico do desenvolvimento do Cálculo Integral, contudo, este foi introduzido previamente a aplicação das atividades em um momento de tal e/ou na aula anterior. Já a formalização dos conceitos pode ser abordada em paralelo ou posteriormente a aplicação da sequência.

Considerações finais

Embora existam trabalhos que apostam no uso de história da matemática como recurso para o ensino de cálculo e isoladamente também encontramos o uso das TIC como alternativa, poucas vezes encontramos ambos os recursos como aliados na tarefa de empreendedores do ensino aprendizagem desta área, sobretudo, no Cálculo Integral. O presente trabalho vem mostrar que tal interseção, além de possível é mister. De fato, o trabalho com alunos nesta perspectiva tem mostrado que a sequência de atividades com construções no Geogebra inspiradas em investigações históricas torna-se potencializador, sobretudo, no desenvolvimento da noção intuitiva da integral definida quando interpretada como cálculo de áreas de regiões planas a qual historicamente está apoiada.

Referências Bibliográficas

BARDI, Jason Socrates. *A guerra do Cálculo.* Tradução: Aluizio Pestana da Costa. Rio de Janeiro: Record, 2008.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. *Matemática: uma breve história.* V. 2. 2. ed. São Paulo: Editora livraria da Física, 2006.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad: Hygino H. Domingues.3. ed. Campinas. SP: Editora da UNICAMP, 2002. 844p. (Coleção Repertório).

MIGUEL, Antonio. MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: *propostas e desafios*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 200p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 10).

PONTE, João Pedro da. *Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal*. 2010. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf>. Acesso em: 20 de março de 2010.

SANTOS, Evando. "Arquimedes (Biografia)". In: Física Interativa. 2009. Disponível em: < http://www.fisicainterativa.com.br/site/index.php?option=com_content&view=article&id=67%3Aarquimedes-biografia&catid=123%3Afisicos-famosos&Itemid=54 >. Acesso em: 30 dez. 2010.

SILVA, Maria Deusa Ferreira da. *Problemas e modelos que contribuíram com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral: dos gregos a Newton.* 2010.237f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

SWOKOWSKI, Earl W. *Cálculo com Geometria Analítica*. 2. ed. Vol. 1. Rio de Janeiro: Makron Books, 1996.