TK004 - RESGATE HISTÓRICO E PEDAGÓGICO DOS QUATERNOS PITAGÓRICOS À LUZ DE EUGÈNE BAHIER (1916)[1]

Georgiane Silva

Universidade Federal do Tocantins – UFT

georgianeamor@hotmail.com

Resumo

A obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers* do francês Eugène Bahier, data de publicação 1916, cujo problema principal é as propriedades dos grupos dos três números inteiros que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$, é relevante para a História da Matemática devido sua completude, originalidade e ao resgate histórico de problemas relacionados aos triângulos retângulos em números inteiros que foram motivos de interesse e de estudo de ilustres personalidades ao longo da história. Todavia, com a finalidade de evidenciar potencial histórico e pedagógico, da obra em foco, dentre os conceitos apresentados por Bahier (1916), no presente ensaio nos deteremos a fazer um resgate histórico e pedagógico de dois conceitos matemáticos contidos na obra, que tanto algebricamente quanto geometricamente podem estar relacionados, a saber: quaternos pitagóricos e Teorema de Pitágoras. Para tanto, os referidos conceitos serão inter-relacionados através do conceito de distância entre dois pontos em duas e em três dimensões. Particularmente, os Quaternos Pitagóricos são assim denominados por ser o conjunto de quatro números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras, sendo expresso por (a, b, c, d), partindo da relação $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Quaternos Pitagóricos; História da Matemática.

Abstract

The book *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers* from french Eugène Bahier, published in 1916, the main problem is the properties of groups of three integers that satisfy the relation $a^2 + b^2 = c^2$, is relevant to the history of mathematics because of its completeness, originality and the historic rescue of problems related to triangles in integers that have been sites of interest and study of illustrious personalities throughout history. However, with the purpose of highlighting the historical and pedagogical potential,

[1] A Comunicação Oral é proveniente de uma pesquisa de doutorado, em andamento (previsto para defender em março de 2013), desenvolvida pelo Programa de Pós Graduação em da Universidade Federal do Rio grande do Norte, sob a orientação do Professor Dr. John A. Fossa.

this book, one of the concepts presented by Bahier (1916), in this test in a historic rescue deterred and two teaching mathematical concepts contained in the work, which both algebraically and geometrically can be related: Pythagoreans Quaternos and Pythagorean theorem. These concepts are interrelated via the concept of distance between two points in two and three dimensions. Particularly, the Pythagoreans Quaternos are so named for being the set of four integers that satisfy the Pythagorean theorem, and is expressed by (a, b, c, d), starting from about $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

Keywords: Pythagorean Theorem; Pythagoreans Quaternos; History of Mathematics

Importância histórica e pedagógica da obra de Bahier (1916)

Em nossa investigação de mestrado[2] realizamos uma análise descritiva, histórica e pedagógica da obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*. A referida obra, de autoria do francês Eugène Bahier, data de publicação 1916, é constituída de 266 páginas, sendo organizada em introdução seguida de nove capítulos, três tábuas numéricas e um índice que se encontra no final da obra.

O problema apresentado na obra em tela é as propriedades dos grupos dos três números inteiros que satisfazem a relação $a^2+ b^2 = c^2$. Bahier (1916) justifica que apesar de aparentemente fúteis e da provável falta de aplicações práticas, vários desses problemas já se encontram em obras de ilustres personalidades, como por exemplo: Platão (427-347 a.C), Pitágoras (cerca de 572-497 a.C), Euclides (cerca de 323-285 a.C), Diofanto (séc. IV d.C), Bachet de Mèziriac (1581-1638), Fermat (1601-1655), Frenicle de Bessy (1605-1675). O referido autor considera que recentemente, os progressos advindos da Teoria dos Números por Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833), Gauss (1777-1855), etc., tem permitido oferecer elegantes soluções a certas propriedades do triângulo retângulo em números inteiros.

Além das personalidades supracitadas, Bahier (1916) destaca Edouard Lucas (1842-1891), o qual tratou de muitos problemas sobre triângulos retângulos em números inteiros ao longo de sua obra sobre a Teoria dos Números. Particularmente, Bahier foi aluno de Edouard Lucas, o que nos leva a acreditar que esta tenha sido a fonte inspiradora e motivadora para que Bahier escrevesse a obra que analisamos.

[2] Ver Silva (2009).

O quadro a seguir, nos apresenta, os títulos dos nove capítulos contidos na obra.

Quadro 1: Títulos dos capítulos da obra

RECHERCHE MÉTHODIQUE ET PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES ENTIERS
Capítulo I: Définitions et propriétés fondamentales [Definições e propriedades fundamentais]
Capítulo II: Recherche méthodique des triangles primitifs [Pesquisa metódica de triângulos primitivos]
Capítulo III: Quelques propriétés des nombres hypoténuses [Algumas propriedades das hipotenusas]
Capítulo IV: Quelques propriétés géométriques des triangles rectangles en nombres entires [Algumas propriedades geométricas de triângulos retângulos em números inteiros]
Capítulo V: Étude de quelques propriétés de suites récurrentes [Estudo de algumas propriedades de seqüências recorrentes]
Capítulo VI: Problémes relatifs au périmétre [Problemas ralacionados ao perímetro]
Capítulo VII: Problémes relatifs a la surface [Problemas relacionados à área]
Capítulo VIII: Problémes Divers [Problemas diversos]
Capítulo IX: Étude del l'équation indéterminée $a^2+b^2+c^2 = d^2$

Conforme a análise que realizamos, da obra em foco, sua relevância para a História da Matemática, se deve a completude, originalidade e ao resgate histórico do assunto matemático em questão, tendo destaque a preocupação de Bahier em enfatizar problemas que foram motivos de interesse e de estudos de ilustres personalidades ao longo da história. No mais, sua estrutura e suas ideias apresentadas, podem ser consideradas como uma importante contribuição nas reflexões acerca dos problemas relacionados aos triângulos retângulos em números inteiros.

Particularmente, levando em consideração as ideias criativas, novos conhecimentos a serem desenvolvidos, e a abordagem inovadora e efetiva para o ensino, presentes na referida obra, com a finalidade de divulgar seu potencial histórico e pedagógico, dentre os conceitos apresentados por Bahier (1916), no presente ensaio nos deteremos a fazer um resgate histórico e pedagógico de dois conceitos matemáticos contidos na obra, que tanto algebricamente quanto geometricamente podem estar relacionados, a saber: quaternos pitagóricos e Teorema de Pitágoras[3]. Para tanto, os referidos conceitos serão inter-relacionados através do conceito de distância. Com isso, na próxima sessão descreveremos de que modo essa inter-relação pode ser evidenciada.

Inter-relação entre o Teorema de Pitágoras e os Quaternos Pitagóricos

Assim como outros teoremas da Geometria Plana, o Teorema de Pitágoras, em sua forma pura, não é aplicável na superfície esférica, porém foi o ponto de partida para entendimento do universo. Sobretudo, ilustres personalidades como Gauss, Riemann e Einstein iniciaram importantes estudos envolvendo geometrias não-euclidianas, sendo que um fato importante era fazer uma comparação dos resultados válidos na geometria euclidiana e dos resultados válidos na geometria não-euclidiana, sendo um desses resultados o Teorema de Pitágoras.

[3] Tanto no mestrado (2009), quanto no doutorado (em andamento) elaboramos um módulo de ensino tendo como principal referência Bahier (1916). No mestrado nos detemos aos ternos pitagóricos e no doutorado aos quaternos pitagóricos.

Particularmente, Gauss deu uma visão matemática ao estudo da superfície redonda da Terra, tendo como objetivo verificar como o espaço na Terra era diferente da superfície de um plano e Riemann descobriu princípios de espaço conhecidos como Geometria de Riemann, depois de estudar com Gauss. Por sua vez, o conceito de espaço desenvolvido por Einstein começou com um triângulo numa superfície plana.

Em especial, no âmbito da História da Matemática, ao definir que um fato histórico da matemática é digno de memória quando exerce ou exerceu na sociedade, uma função desencadeadora de uma série de acontecimentos matemáticos úteis à humanidade e que ainda podem gerar muito mais, Mendes (2009) afirma que o Teorema de Pitágoras é um bom exemplo de um fato memorável, dado que

> ...a partir de sua elaboração desencadeou-se o estudo da distância, levando-se a criação do sistema de coordenadas, até a elaboração da geometria analítica, o que nos conduziu ao cálculo diferencial, provocando assim finalmente o aparecimento da Análise, entre outros. (MENDES, 2009, p.)

Em suma, sua importância fundamental se deve à sua relação com o conceito de distância, o que o torna um importante instrumento matemático para a investigação do mundo. No entanto, corroboramos com Silva e Fossa (no prelo) ao afirmar que a abordagem formalística do Teorema de Pitágoras, puramente algébrica e mecânica, pode contribuir para que sua importância fundamental para o embasamento do conceito de distância não seja evidenciada. Com isso, destacamos a relação do Teorema de Pitágoras com o conceito de distância entre dois pontos, não só em duas dimensões, mas também em três dimensões.

Em duas dimensões, a distância *d* entre os pontos A e B é a medida do segmento AB (figura 1). Como o triângulo destacado é retângulo, posto que a distância *d* é a hipotenusa do referido triângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras temos: $d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$.

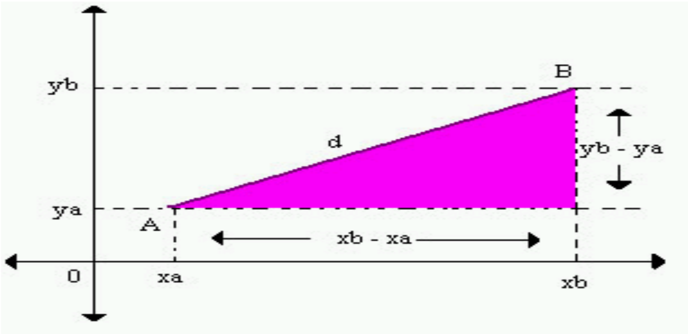

Figura 1. Distância entre dois pontos em duas dimensões.

Por sua vez, o processo de atribuir quatro valores que satisfazem o Teorema de Pitágoras nos conduz a noção de distância, dado que ao calcularmos a distância de dois pontos (G e E) em 3 dimensões verificamos que o Teorema de Pitágoras se estende naturalmente ao espaço de três dimensões ao considerarmos um paralelepípedo retângulo e sua diagonal, conforme podemos verificar a seguir.[4]

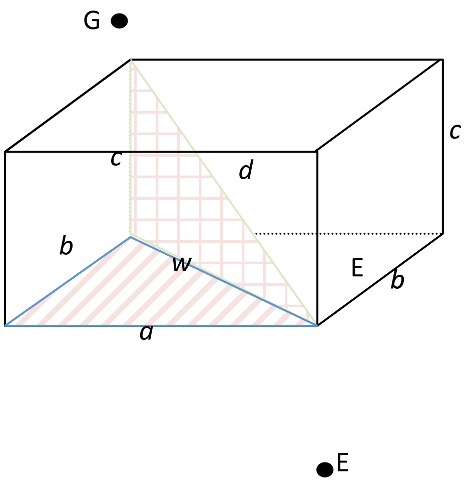

Figura 2. Distância entre dois pontos em três dimensões

[4] Todavia, é válido ressaltar que posto que os pontos que verificam as condições do Teorema estão em um mesmo plano determinado pelos pontos AGE onde A é vértice do paralelepípedo, o Teorema de Pitágoras retoma à 2 dimensões.

Conforme podemos verificar, na figura acima, a distância entre os pontos G e E, ambos contidos em dois vértices opostos do prisma ilustrado, coincide com a diagonal d do prisma. Por sua vez, aplicando o Teorema de Pitágoras d^2 pode ser expresso como sendo c^2+w^2, dado que d corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são c (altura do prisma) e w (diagonal da base do prisma). Como w corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são b (largura do prisma) e a (comprimento do prisma), w^2 pode ser expresso por b^2+a^2. Logo, temos que $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

Por consequência, a relação supracitada remete ao estudo dos Quaternos Pitagóricos[5], assim denominado por ser o conjunto de quatro números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras, sendo expresso por (a, b, c, d), partindo da relação $a^2+b^2+c^2 = d^2$. Por sua vez, d é denominado números diagonais[6].

Particularmente, com base em Bahier (1916), evidenciamos a equação indeterminada $a^2+b^2+c^2 = d^2$. O referido autor destaca que investigar as soluções em números inteiros da referida equação é tão importante quanto investigar as soluções em números inteiros da equação indeterminada a dois termos, $a^2+b^2 = c^2$, e de suas propriedades. Não obstante, corroboramos com Bahier ao afirmar que "é fácil de estabelecer que a um valor qualquer tomado como o número a sempre corresponderá um número ilimitado de grupos de valores para b, c e por consequência d".

Nesse contexto, apresentaremos três métodos, destacados por Bahier (1916) para obter soluções em números inteiros da equação $a^2+b^2+c^2 = d^2$, obtidos quando o número a, é dado. A seguir, descreveremos os referidos métodos apresentados por Bahier (1916).

1º MÉTODO: $a+b = d \rightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = d^2 \rightarrow 2ab = c^2$.

Se a é um número inteiro qualquer, o valor de b depende que o produto $a\times 2b$ seja um quadrado. Se $a = 1 \rightarrow 2b = c^2$. Se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = 2n^2$. Logo: $c = 2n$ e $d = 1+2n^2$. Com isso, o quaterno pitagórico correspondente é (1, $2n^2$, $2n$, $1+2n^2$)

[5] Por analogia aos ternos pitagóricos criamos a referida terminologia.
[6] A referida denominação é dada por Bahier (1916).

Se $a = 2$, temos que $4b = c^2$. Se n é um número inteiro qualquer, pode-se fazer $b = (2n+1)^2$. Logo: $c = 2(2n+1)$ e $d = 2+(2n+1)^2$, ou melhor, o quaterno pitagórico correspondente é $[2, (2n+1)^2, 2(2n+1), 2+(2n+1)^2]$

Se $a > 2 \rightarrow$ Todas as outras soluções possíveis se reduzem a um dos casos precedentes.

2º MÉTODO: Identidade (1): $m = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2 \rightarrow$ Todo número ímpar é a diferença dos quadrados de dois números inteiros consecutivos.

Se n for ímpar $\rightarrow m$ será da forma $4p+3$. Se n for par $\rightarrow m$ será da forma $4p+1$. Posto que todo número primo da forma $4p+1$ e, também, todo número composto ímpar, que só admite como fatores primos números da forma $4p+1$, é uma soma de dois quadrados, se m satisfaz essa condição, $m = a^2+b^2$. Com isso, comparando $m = a^2+b^2$ com (1), temos: $m = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2$; $(n+1)^2 - n^2 = a^2+b^2 \rightarrow a^2+b^2+n^2 = (n+1)^2$. Logo, o quaterno pitagórico correspondente é (a, b, n, $n+1$).

3º MÉTODO: a e de b são os dois catetos de um triângulo retângulo em números inteiros e γ é a hipotenusa. Tem-se, portanto (2) $a^2+b^2 = \gamma^2$. Como todos os números γ assim considerados figuram como valores de um dos catetos em um ou vários triângulos retângulos em números inteiros, podemos fazer (3) $\gamma^2+c^2 = d^2$ como sendo um desses triângulos e a partir de (2) e (3) temos (4) $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

Questões sugestivas

No que diz respeito à importância histórica e pedagógica da obra de Bahier (1916) indubitavelmente seu potencial é desmesurado. Sobretudo, não podemos exaurir seu conteúdo aqui. Porém, com o intuito de evidenciar a riqueza da obra em tela e sua abordagem dos quaternos pitagóricos, a seguir apresentamos algumas questões que o referido material sugere.

(i) Dado dois pontos G e E, para calcularmos a menor distância entre esses dois pontos, em duas e em três dimensões podemos recorrer ao Teorema de Pitágoras. Em duas dimensões há um terno pitagórico (x, y, z) correspondente, e em três dimensões há um quaterno pitagórico (a, b, c, d) correspondente. Geometricamente, quais dimensões podem ser associadas aos números inteiros que compõe o terno pitagórico (x, y, z) e o quaterno pitagórico (a, b, c, d)?

(ii) Porque o número d do quaterno (a,b,c,d) é denominado, por Bahier (1916) número diagonal?

(iii) Para calcular o volume do prisma representado pelo quaterno (ka, kb, kc, kd) basta considerar o cálculo do volume do prisma representado pelo quaterno (a,b,c,d) e acrescentar o fator k?

(iv) Com o método 3, como podemos notar a importância dos ternos pitagóricos para gerar quaternos pitagóricos?

(v) Podemos obter um quaterno pitagórico partindo de um γ sendo um número par e hipotenusa de um triângulo primitivo?

(vi) Geometricamente, como podemos descrever o método 3?

Referência Bibliografia

ALMOULOUD, S. A; BASTIAN, I.V. O Teorema de Pitágoras: Uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente. In: *Educação Matemática em Revista*. SBEM, 2003. Ano 10, n. 14, p. 45-53.

BAHIER, E. *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*. France: A. Hermann et fils, 1916.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 2. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

FOSSA, J. A. *Ensaios sobre a Educação Matemática*. Belém: EDUEPA, 2001.

LORENZONI, C. A.; SILVA, C. M. S. O velho conhecido Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. In: *Revista História & Educação Matemática*. Rio Claro: SBHMat, 2002. v.2, n.2, p. 112-122.

MENDES, I. A. *Investigação histórica no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

_____________ *Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

SILVA, G. A *Estudo Histórico e Pedagógico sobre Ternos Pitagóricos à luz de Eugène Bahier*. 2009. 115 p. il. Orientador: John Andrew Fossa. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

SILVA, G. A. FOSSA. J. A. *Ternos pitagóricos: uma ferramenta pedagógica na formação de professores*. (no prelo)