TK012 - EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E GEOMETRIA PROJETIVA NA INGLATERRA DOS ANOS 1841-1853.

ALGEBRAIC EQUATIONS AND PROJECTIVE GEOMETRY IN ENGLAND THE YEARS 1841-1853.

Leandro Silva Dias[1]

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

leandrosilvadias123@hotmail.com

Gerard Emile Grimberg

Universidade Federal do Rio Janeiro – UFRJ

gerard.emile@terra.com.br

Resumo: Nosso artigo pretende ressaltar a importância das considerações geométricas que acompanham o desenvolvimento da teoria das equações algébricas e a teoria nascente dos invariantes. Partindo dos trabalhos de Cayley, que precedem as famosas memórias sobre os invariantes, apontamos alguns aspectos que se reencontram nos trabalhos do período 1841-1853 de outros protagonistas dessa teoria. Nossa pesquisa leva a considerar uma prática comum entre os matemáticos ingleses deste período trabalhando a teoria das equações algébricas por via das propriedades projetivas das curvas referenciadas por essas equações.

Palavras-chave: Equações algébricas, propriedades projetivas, prática comum, Arthur Cayley.

Abstract: Our paper aims to highlight the importance of geometrical considerations accompanying the development of the theory of algebraic equations and the nascent theory of invariants. Reading the works of Cayley preceding the famous memoir of the invariants, we point out some aspects that are found in the work of the period 1841-1853 from other protagonist of this theory. Our research leads us to consider a common practice among English mathematicians of this period working on the theory of algebraic equations *via* the projective properties of the curves referenced by these equations.

Keywords: Algebraic equations, projective properties, common practice, Arthur Cayley.

Introdução

O século XIX foi marcado por importantes avanços para a geometria, em particular a geometria projetiva. Elaborada a partir de métodos essencialmente sintéticos por Poncelet e Chasles e, depois por Steiner e Möbius, a geometria projetiva se torna analítica a partir de 1832 com os trabalhos de Plücker. Neste artigo, pretendemos estudar como esta nova visão analítica foi adotada e utilizada na teoria das curvas algébricas por vários matemáticos na Inglaterra, entre outros, Boole, Sylvester, Salmon e Cayley no decorrer dos anos 1841-1853.

No estudo do desenvolvimento da geometria e na abordagem da origem da sua classificação das diferentes geometrias a partir da geometria projetiva, Felix Klein

[1] Mestrando em Ensino de matemática (Apresentador de trabalho oral e autor para correspondência)

apresenta Cayley como o fundador da conexão entre geometria projetiva e teoria dos invariantes algébricos, uma teoria iniciada pelo trabalho de Boole (1841). "Cayley was primarily the champion and, in a far-reaching sense, the creator of present-day algebraic geometry, in both its invariant-theoretic and geometric aspects" (Klein 1979, p. 136). Mas devido ao seu objetivo apenas descreve o conteúdo da Sexta memória sobre *quantics*[2] e não fala das outras memórias de Cayley e de seus trabalhos anteriores.

O nosso artigo inicia mostrando o uso da visão analítica de Cayley, que nos leva aos seus trabalhos do período de 1841 a 1853, intervalo entre os primeiros artigos que tratam da teoria dos invariantes[3] e as memórias sobre *quantics*.

Em uma segunda parte, estudamos a relação entre os métodos de Cayley e os de matemáticos como Boole, Sylvester e Salmon e pensamos encontrar nestes uma prática comum na Inglaterra por aquele período (1840-1850), que culminou em desenvolvimentos futuros como as memórias sobre *quantics* e o livro de Salmon[4], dentre outros. Leo Corry (2004, p.12) defende esta abordagem onde se destaca dinâmicas internas de uma comunidade matemática local, em oposição a uma universal, vendo aspectos particulares da matemática produzida por esta comunidade.

Numa terceira etapa, destacamos os fatores importantes encontrados nos artigos de Cayley, Boole, Sylvester e Salmon, vendo os pontos comuns desta rede de matemáticos britânicos e sua prática analítica da geometria projetiva.

Por fim, destacamos algumas conclusões importantes que se pode tirar com base na releitura dos textos originais.

Metodologia da pesquisa com textos

A nossa metodologia se baseia no que Frédéric Brechenmacher chama de "rede de textos". Brechenmacher constrói uma rede de textos de diferentes matemáticos, a partir de um ponto inicial, que tratam de diferentes formas a noção de matriz (BRECHENMACHER, 2006, p.8). Ele encontra um período para sua pesquisa, 1850-

[2] *Quantic* foi a nomenclatura utilizada por Cayley para denominar polinômios homogêneos de coeficientes racionais de um dado grau. Exemplo: a *quantic* $ax^2 + bxy + cy^2$ é uma quádrica binária.
[3] Por exemplo, um invariante da forma binária Q(x, y) de grau n é a função $I(a)= I(a_0, ..., a_n)$, dependendo dos seus coeficientes $a = (a_0, ..., a_n)$, que, a menos do determinante dos coeficientes da substituição linear, permanecem inalterados sob uma dada transformação linear: $I(a)= (l.m'-l'.m)^k .I(a')$. Onde $a'=(a'_0, ..., a'_n)$ são os coeficientes do polinômio transformado e K é chamado o "peso" do invariante.
[4] *A Treatise on the higher plane curves*, de 1879. Teve participação de Cayley, principalmente na elaboração do capítulo 1 que foi creditado a Cayley. Primeiro livro de Salmon foi *A treatise on conic sections,* de1848.

1930, a partir das leituras dos diversos textos que tratam de matrizes. As interseções entre os usos do conceito de matriz representem os "nós" dessa "rede".

Mesmo que nosso trabalho não visa um período tão longo, iniciamos uma leitura dos artigos de Cayley que trata da álgebra de polinômios homogêneos e geometria projetiva e determinamos o período de 1841 a 1853, entre o início da pesquisa sobre teoria dos invariantes e a submissão da primeira memória sobre *quantic*.

Mas estes artigos apresentam o mesmo tipo de relação em conformidade com o que Brechenmacher (2006, p.9) chama dos "nós", entrelaçamentos de referências, que foram destacados nas diferentes práticas contidas nos textos que tratam de matrizes. Nossa pesquisa se utiliza destes pontos de confluência a fim de destacar um campo de pesquisa na Inglaterra em meados do século XIX. Assim, nosso trabalho reside em procurar nos diversos textos o uso da álgebra de polinômios homogêneos e algumas propriedades da geometria projetiva como involução de pontos ou retas, por alguns matemáticos britânicos.

Campo de pesquisa é entendido como apresentado por Goldstein (2007, p. 52), ou seja, quando pessoas pertencem a um determinado campo de pesquisa possuem certo número de interesses fundamentais comuns. Neste artigo, os pontos fundamentais são a álgebra dos polinômios homogêneos em conjunto com algumas propriedades da geometria projetiva.

Nosso trabalho busca com isso "tecer" alguns "fios" desta rede de pesquisa na Inglaterra e, com isso, esclarecer uma prática matemática comum de alguns matemáticos britânicos do meado do século XIX, partindo de Cayley.

Os artigos de Cayley

Mansion (1873, p. 314) ressalta a importância do trabalho de Plücker sobre coordenadas homogêneas e o tratamento analítico das propriedades projetivas. Destaca duas vantagens deste novo método: a idéia das curvas e das superfícies mais gerais e os imaginários que surgem nas equações algébricas. Plücker fez belas aplicações deste método para estudar curvas de terceira ordem (MANSION, 1873, id.). Ainda menciona Möbius e seu cálculo baricêntrico, destacando o fato que depois as principais ideias foram sintetizadas por Steiner e com desenvolvimentos de Chasles, em seu *Aperçu Historique* (MANSION, 1873, p.315).

Este trabalho de Chasles exerceu influência sobre as pesquisas de Cayley (CRILLY, 2006, p.65). Podem-se citar como exemplo os primeiros artigos de Cayley que trata de curvas algébricas: *On the intersection of curves* (1843) e *On the theory of algebric curves* (1843). No primeiro artigo, Cayley cita um teorema presente no *Aperçu Historique* que Chasles usa para demonstrar o teorema de Pascal. O teorema como apresentado por Cayley: "Se uma curva de terceira ordem passa através de oito pontos de interseção de duas curvas de terceira ordem, ela passará através do nono ponto de interseção". (CAYLEY, 1889a, v. 1, p. 25, tradução nossa).

Cayley estende a definição para curvas de ordem "m" e "n" e relaciona aos m.n pontos de interseção (1889a, v. 1, p. 26).

Nas *Nouvelles remarques sur les courbes Du troisième ordre*, de 1845 do jornal de *Liouville*, Cayley trata cônicas e polinômios homogêneos. Cayley prossegue a sua investigação das curvas de terceira ordem, iniciadas em seu artigo *Mémoire sur les courbes Du troisième ordre* (1844), acrescentado algumas definições. Ao apresentar o teorema IV ele inicia o que chama de "demonstração analítica" da primeira parte deste teorema. Abaixo uma tradução do teorema:

> *Teorema IV. O lugar geométrico de um ponto P, que se move de maneira que as tangentes formadas por este ponto a três cônicas dadas qualquer formam sempre um feixe em involução, é uma curva do terceiro grau que passa pelos dezoito centros de homologia das cônicas tomadas dois a dois, estes centros formando seis a seis dos quadriláteros inscritos correspondentes.* (CAYLEY, 1889b, v. 1, p. 191, tradução nossa).

Cayley (1889b, v. 1, p. 192) propõe uma demonstração analítica considerando o que ele chama de "coordenadas indefinidas de um ponto" que ele representa como: ξ/ζ, η/ζ. E para as equações das cônicas utiliza equações do tipo: $Y=A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2+2F\eta\zeta+2G\zeta\xi+2H\xi\eta$ $Y = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2F\eta\zeta + 2G\zeta\xi + 2H\xi\eta$, fazendo: $Y=0$, $Y'=0$, $Y''=0$. $Y = 0, Y' = 0, Y'' = 0$

Observamos que trabalha de fato sobre as coordenadas homogêneas de um ponto (ξ, η, ζ), assim como aparece nas equações das cônicas. Há nos trabalhos de Cayley certo vai e vem entre o uso de coordenadas homogêneas e das coordenadas cartesianas associadas.

Após isto, ele toma x/z, y/z $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ para as coordenadas do ponto P e apresenta as seguintes expressões:

$U= Ax^2+ By^2+ Cz^2+ 2Fyz+ 2Gzx+ 2Hxy,$

W= Axξ+ Byη+ Czζ+ F(yζ+ ηz)+ G(zξ+ ζx)+ H(xη+ yξ), $W = Ax\xi + By\eta + Cz\zeta + F(y\zeta + \eta z) + G(z\xi + \zeta x) + H(x\eta + y\xi)$ onde W=0 é a equação da reta polar do ponto P. Então Cayley coloca a expressão das duas tangentes a uma das cônicas:

$$UY - W^2 = 0.$$

Ao desenvolver a equação das tangentes encontra uma equação um tanto extensa que ele reduz ao utilizar simbolismos para representar partes da equação e coloca a origem no ponto P, reduzindo a equação das tangentes à forma mais simples: $\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 - 2\mathfrak{D}\xi\eta = 0$. Para as outras duas cônicas: $\mathfrak{A}'\xi^2 + \mathfrak{B}'\eta^2 - 2\mathfrak{D}'\xi\eta = 0$ $\mathfrak{A}'\xi^2 + \mathfrak{B}'\eta^2 - 2\mathfrak{D}'\xi\eta = 0$ e $\mathfrak{A}''\xi^2 + \mathfrak{B}''\eta^2 - 2\mathfrak{D}''\xi\eta = 0$ $\mathfrak{A}''\xi^2 + \mathfrak{B}''\eta^2 - 2\mathfrak{D}''\xi\eta = 0$. Daí se utiliza da relação que garante que estas tangentes estejam em involução:

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}' & \mathfrak{B}' & \mathfrak{D}' \\ \mathfrak{A}'' & \mathfrak{B}' & \mathfrak{D}'' \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}' & \mathfrak{B}' & \mathfrak{D}' \\ \mathfrak{A}'' & \mathfrak{B}' & \mathfrak{D}'' \end{bmatrix} = 0.$$

A demonstração prossegue utilizando propriedades do determinante e Cayley conclui sua demonstração encontrando a equação do terceiro grau que representa o lugar geométrico do ponto P conforme descrito na primeira parte do teorema IV do artigo.

Cayley explicita a fonte que o inspira em seus trabalhos com cônicas e coordenadas homogêneas no artigo *On geometrical reciprocity* de 1848. Neste artigo, Cayley inicia tratando do "teorema fundamental da reciprocidade", que trata da dualidade no plano. Trabalha relações importantes nas cônicas, cada uma destas possuindo um teorema dual. E destaca Plücker como a fonte dos teoremas apresentados. Cayley diz:

> *As construções anteriores têm sido tomadas inteiramente do System der Analytischen Geometrie de Plücker, capítulo 3, Allgemeine Betrachtungen über Coordinaten-bestimmung. Tenho acrescentado demonstrações analíticas de alguns dos teoremas em questão.* (CAYLEY, 1889c, v. 1, p. 380, tradução nossa)

Estes artigos sinalizam que o trabalho geométrico com coordenadas homogêneas de Cayley segue dos desenvolvimentos de Plückler. Apesar de Cayley se utilizar deste sistema de coordenadas sem nenhuma justificativa, aparentando ser uma prática matemática comum.

Pode-se constatar que Cayley pesquisava sobre as formas quadráticas, através de polinômios homogêneos, que nas memórias a partir de 1853 Cayley denomina por *quantics*, e estes com claras relações geométricas. As transformações lineares das variáveis também sendo uma constante em suas pesquisas.

Visto os principais pontos que Cayley se utiliza em seus artigos, pode-se comparar com os traços comuns de alguns matemáticos britânicos.

Boole, Sylvester e Salmon e a prática analítica

Em seu artigo de 1841, "Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Part II", George Boole introduz o tema da Teoria dos Invariantes através de transformações lineares das variáveis, trabalhando igualmente com a ideia de mudança do sistema de coordenadas.

Boole (1841, p.117) apresenta o exemplo do polinômio homogêneo $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$, onde a transformação linear equivale a uma mudança dos eixos coordenados, sendo θ a inclinação dos eixos x e y y , θ' θ' a inclinação dos novos eixos x' x' e y' y', após a transformação. Este tipo de transformação linear quando se trata de coordenadas homogêneas são as transformações projetivas. Isso mostra o quanto um assunto tão puramente algébrico como a teoria dos invariantes nascente - assim o descreve Crilly (2006) - recebe desde o início aspectos geométricos relevantes.

O artigo de Sylvester que trata das relações entre duas cônicas, *On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates*, de 1850, é ótimo exemplo desta prática analítica acompanhada de uma visão geométrica. Neste artigo, Sylvester se utiliza de polinômios homogêneos de segundo grau e trata das cônicas utilizando as coordenadas projetivas. Após este artigo, Sylvester escreve vários outros artigos tratando analiticamente propriedades projetivas, como: *An instantaneous demonstration of Pascal's theorem by the method of indeterminate coordinates*, no *Philosophical magazine*, também em 1850.

Salmon, por sua parte, utiliza de polinômios homogêneos e trata de superfícies e propriedades projetivas em seu artigo de 1846, *On the degree of a surface reciprocal to a given one*. Neste artigo, dentre as várias relações apresentadas, destacamos a seguinte propriedade: "A projeção em algum plano da interseção de duas superfícies do segundo grau será em geral uma curva do quarto grau tendo dois pontos duplos" (Salmon, p. 68, 1846, tradução nossa).

Salmon escreveu mais artigos relacionando propriedades projetivas à álgebra dos polinômios homogêneos, como: *Théorèmes sur les courbes de troisième degré*, de 1851, e *Sur La formation de l'équation de La courbe reciproque à une courbe donnée*, também de 1851.

Alguns pontos comuns dessa rede de pesquisa britânica

Boole influenciou fortemente os trabalhos de Cayley (CRILLY, 1986, p. 241) e consecutivamente os de Sylvester e Salmon.

Sylvester utiliza-se de um importante resultado ao qual ele cita um artigo de Cayley como referência (SYLVESTER, 1850, p. 119). Este teorema trata das possíveis interseções entre cônicas se utilizando de pontos reais e complexos. O trabalho de Cayley, referenciado por Sylvester, *Sur Le problème des contacts*, de 1850, afirma que a interseção de duas cônicas forma um quadrângulo.

Abaixo a afirmação de Cayley em seu artigo de 1850:

> *Duas cônicas quaisquer se cortam em quatro pontos que formam um quadrângulo inscrito as duas cônicas. Elas possuem quatro tangentes comuns que formam um quadrilátero circunscrito às duas cônicas. O quadrângulo inscrito e o quadrilátero circunscrito possuem mesmos centros e mesmos eixos.* (CAYLEY, 1889e, v. 1, p. 522, tradução nossa)

Este fato foi utilizado por Sylvester em seus desenvolvimentos. Logo, Sylvester assim como Cayley pesquisava as relações geométricas das cônicas através de polinômios homogêneos.

Salmon também trabalhou sobre o assunto das cônicas e sua relação algébrica como se pode ver em seu artigo *On The Degree of a superface reciprocal to a given one*, de 1846 (SALMON, 1846. p. 65). Cayley cita este trabalho de Salmon em seu *On the triple tangent planes of surfaces of the third order* (CAYLEY, 1889d, v. 1, p. 446). Tanto Cayley quanto Salmon pesquisaram o método do polar recíproco e destacam o caso onde a superfície é de segunda ordem.

Salmon também considera teoremas nas curvas de terceira ordem como Cayley e relaciona a geometria projetiva de retas e cônicas. Em seu artigo *Théorèmes sur les courbes de troisième degré* (1851), apresenta três teoremas, sendo que no terceiro se utiliza de uma definição de Plücker. Neste artigo, Salmon utiliza polinômios homogêneos relaciona a interseções de cônicas dentre outras propriedades ligadas à geometria projetiva.

Conclusões

Alguns pontos podem ser destacados após nossa investigação.

A leitura dos artigos de Cayley mostrou que a relação entre álgebra dos polinômios homogêneos e geometria projetiva é uma constante em suas pesquisas no período 1841-1853.

A partir de Cayley pode-se criar uma rede de matemáticos britânicos que possuem esta prática comum. Sylvester e Salmon também pesquisaram com polinômios homogêneos e geometria projetiva com cônicas.

Conclui-se também que a abordagem pode ser atribuída a uma influencia do trabalho do matemático alemão Plücker, de 1832.

Assim os artigos anteriores de Cayley e de seus contemporâneos nos ajuda a entender o campo de pesquisa dessa rede de matemáticos britânicos que culminou em trabalhos como as memórias sobre *quantics* de Cayley e *A Treatise on the higher plane curves* de Salmon. Este aspecto torna evidente o caráter geométrico de todas essas memórias de Cayley. Assim se Felix Klein apenas menciona a Sexta memória quando estuda o desenvolvimento da geometria até a sua própria classificação das geometrias a partir da geometria projetiva, ele faz o grande atalho deixando de lado uma parte importante da obra de Cayley que o levou à Sexta memória.

Referências Bibliográficas

BOOLE, G. Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Part II. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 3, n. 8, p. 106-118, 1841.

BRECHENMACHER, F. Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930). **CultureMATH – Site expert ENS Ulm / DESCO** - 20/12/2006. Disponível em:<http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Brechenmacher/matrices_index.htm >. Acessado em: 10/2012.

CAYLEY, A. On the intersection of curves. Cambridge mathematical journal, 1843. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 1, 1889a. p. 25-27.

______.Nouvelles remarques sur les courbes Du troisième ordre. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Liouville), 1845. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 1, 1889b. p. 190-194.

______. On geometrical reciprocity. Cambridge and Dublin mathematical journal, 1848. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 1, 1889c. p. 377-382.

______. On the triple tangent planes of surfaces of the third order. Cambridge and Dublin mathematical journal, 1849. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 1, 1889d. p. 445-456.

______. Sur Le problème des contacts. Journal für die reine angewandte Mathematik (Crelle), 1850. In: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. Cambridge: At The University Press, v. 1, 1889e. p. 522-531.

CORRY, L. Introduction: The History of Modern Mathematics – Writing and Rewriting. **Science in Context**, v. 17, n. 1, p. 1-21, 2004.

CRILLY, T. The Rise of Cayley's Invariant Theory (1841 – 1862). **Historia Mathematica**, v. 13, p. 241-254, 1986.

CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2006. 609 p.

GOLDSTEIN, C.; SCHAPPACHER, N.; SCHEWERMER, J. **The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's disquisitions Arithmeticae**. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 578 p.

KLEIN, F. **Development of Mathematics in The 19th Century**. Tradução M. Ackerman. Massachusetts: Math Sci Press, 1979. 630 p. Tradução de: Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik in 19 Jahrhundert, 1928.

MANSION, P. Notice sur les travaux de Jules Plücker. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 5, p. 313-319, 1873.

SALMON, G. On The Degree of a superface reciprocal to a given one. **Cambridge and Dublin mathematical journal**, v. 6, p. 65-75, 1846.

SALMON, G. **A Treatise on the higher plane curves**. Dublin: Hodges, Foster, and Figgis, Grafton Street, Booksellers to the University, 1879. 395 p.

SYLVESTER, J. J. On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates. Cambridge and Dublin mathematical journal, 1850. In: SYLVESTER, J. J. **The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester.** Cambridge: At The University Press, v. 1, 1904. p. 119-137.