TK017 - GLI ELEMENTI DELLA TEORIA DEI NUMERI: NOTAS SOBRE UM LIVRO DIDÁTICO ITALIANO DO INÍCIO DO SÉCULO XX.

Severino Barros de Melo

Universidade Federal de Pernambuco UFPe

Sbmelo55@gmail.com

Resumo

A presente comunicação tem como objetivo socializar um estudo oriundo da tradução do livro *Gli Elementi della Teoria dei Numeri*, de autoria de Paolo Gazzaniga, considerada uma das obras didáticas mais importantes neste campo, editadas na Itália no inicio do século XX. Foi feito um estudo comparativo entre este livro e três outros da mesma disciplina e disciplinas correlatas, adotados nos cursos de graduação no Brasil nos últimos trinta anos. Do ponto de vista metodológico, trata-se de uma pesquisa bibliográfica com leitura analítico-comparativa em textos referenciais de Teoria dos Números, Álgebra e Análise Matemática. Como conclusão constata-se que a obra de Gazzaniga é abrangente, cobrindo um conteúdo que atualmente no Brasil perpassa várias disciplinas dos cursos de graduação. Um aspecto importante do ponto de vista da História da Matemática reside no fato de Gazzaniga ter consultado fontes primárias para a elaboração do livro. O estilo é equilibrado, dosando a linguagem expositiva clara e o rigor formal necessário para qualificar a obra do ponto de vista matemático; entretanto carece de uma maior quantidade de exercícios e de um roteiro de respostas que efetivamente orientam os alunos iniciantes. Neste sentido o livro não apresenta as características de objetividade observada atualmente na maioria dos livros didáticos.

Palavras-Chave: Historia da Matemática, Teoria dos Números, Paolo Gazzaniga,

Abstract

This communication has as main objective to socialize a study from the translation of the book *Gli Elementi della Teoria dei Numeri* authored by Paolo Gazzaniga, considered one of the most important textbooks in this field, published in Italy in the early twentieth century. Secondarily it was done a comparative study between this book and three others in the same class and related classes adopted in undergraduate courses in Brazil in the last thirty years. From the methodological point of view, it is a bibliographic reaserach with a analytic comparative reading in reference texts of Number Theory, Algebra and Mathematical Analysis. In conclusion it appears that the work of Gazzaniga is comprehensive, covering content that currently, in graduate programs in Brazil, permeates many disciplines. An important aspect from the History of Mathematics point of view lies in the fact that Gazzaniga have consulted primary sources for the preparation of the book. The style is balanced, dosing clear expository language and formal rigor required to qualify the work from the mathematical point of view; however requires a greater amount of exercise and a answer script that effectively guide beginner students. In this sense the book does not present the characteristics of objectivity that is observed now in most of textbooks.

Keywords: History of Mathematics, Number Theory, Paolo Gazzaniga

Considerações Iniciais

Esta comunicação tem como ponto de partida a tradução do livro *Gli Elementi della Teoria dei Numeri*, escrito por Paolo Gazzaniga, uma obra considerada das mais relevantes neste ramo da Matemática publicada na Itália no início do século XX.

O trabalho de tradução se deu no contexto dos estudos empreendidos no programa de doutorado em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (Brasil), na linha de Educação Matemática, sob a orientação do prof. Dr. John A. Fossa, embora o foco da tese não tenha sido a supracitada obra.

Concluída a tradução, nos motivamos a fazer um estudo comparativo entre este livro e três outros da mesma disciplina e disciplinas afins, editados no Brasil nos últimos trinta anos.

Do ponto de vista metodológico trata-se de uma pesquisa bibliográfica com leitura analítico-comparativa em textos referenciais de Teoria dos Números, Álgebra e Análise Matemática.

Sobre o autor

Paolo Gazzaniga (1853-1930) nasceu em Soresina (Cremona) e faleceu em Veneza. Concluiu seus estudos de graduação em Pavia no ano de 1878 e, depois de um período de aperfeiçoamento na Alemanha, foi por 40 anos professor no Liceu em Pádua, ensinando também na Universidade onde atuou por alguns anos como livre docente, ministrando dentre outros, cursos de Análise. Além do livro de Teoria dos Números, objeto da presente comunicação, Gazzaniga é autor de vários livros didáticos para o ensino médio e superior.[1]

[1] Outros livros escritos por Gazzaniga: Aritmetica generale e algebra elementare (1916); Il calcolo dei simboli d'operazione elementarmente esposto [S.l. - dopo il 1880]; In memoria di Giuseppe Veronese (1917); Lezioni sulla teoria dei numeri (?) v. 1; I numeri reali e l'analisi indeterminata di 1. e 2. grado, Libro di Aritmetica e di Algebra elementare (?); Libro di aritmetica generale e di algebra elementare (1904); Teoria dei numeri (1921).

Sobre a importância do livro

Uma das formas de avaliar a importância do livro *Gli Elementi della Teoria dei Numeri* é por meio da leitura do prefácio no qual Gazzaniga expõe suas intenções na elaboração da obra:

> A teoria dos números, mesmo tendo exercido naqueles que a cultivam um grande fascínio, é ainda pouco difundida entre nós, provavelmente pela pouca familiaridade que os jovens das nossas universidades têm com a língua na qual é escrita a maior parte dos trabalhos que se referem a ela. Neste livro me propus a recolher e coordenar as proposições fundamentais e algumas dentre as mais importantes questões relativas aos estudos de aritmética com a finalidade de auxiliar os nossos jovens estudantes e de prepará-los e motivá-los a procurar depois, com êxito, as obras clássicas dos grandes mestres. As principais obras de que me servi para tal finalidade foram as seguintes: R. DEDEKIND: Vorlesungen über Zahlentheorie von L.Dirichlet, Braunschweig 1863 (e edições seguintes das quais a terceira foi traduzida para o italiano pelo prof. A. Faifofer); P.BACHMANN: Die Lehre der Kreistheilung, Leipzig 1872; Die Elemente der Zahlentheorie 1892; L. KRONECKER: Grundzüge einer arithm. Theorie der alg. Grössen. Berlin 1882; K. HENSEL: Vorlesungen über Mathem. von L. Kronecker Bd. I 1891; D. HILBERT: Die Theorie der alg. Zahlkörper, Berlin 1897; H. WEBER: Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1898. Essas obras, bem como outras de menor importância, como as memórias de vários autores, das quais me servi, são mencionadas oportunamente ao longo do texto.

Três aspectos importantes emergem da leitura do prefácio. Um primeiro é o interesse do autor em escrever sobre o que ele considera os aspectos fundamentais da Teoria dos Números; um segundo aspecto é o caráter propedêutico da obra, pois um dos objetivos de Gazzaniga é preparar os estudantes para a leitura dos clássicos. Finalmente, o autor se serve de fontes primárias para a elaboração do seu trabalho.

Outra maneira de se avaliar a importância do *Gli Elementi* é pelo fato da obra ter sido selecionada pela Cornell University num projeto de preservação digital. Tal projeto, executado em parceria com esta universidade e a Xerox Corporation, tem por objetivo salvar obras raras que estavam sendo deterioradas pela ação do tempo em bibliotecas de diversos países.

Sobre a matemática abordada no *Gli Elementi*

O livro editado pela Fratelli Drucker em 1903 contém 413 páginas e está estruturado em 12 capítulos com o seguinte conteúdo:

CAPITULO I

Generalidades. Divisores e múltiplos. Congruências idênticas com relação a um módulo. Números primos. Congruências idênticas com relação a um sistema de módulos. Indicadores de diferentes ordens.

CAPÍTULO II

Análise indeterminada de 1º grau. Pesquisa das soluções inteiras da equação $ax + by = c$. Pesquisas de soluções positivas.

CAPÍTULO III

Generalidade sobre congruências condicionais. Formas lineares homogêneas equivalentes. Número das formas lineares homogêneas entre si não congruentes com relação a um dado sistema modular. Congruências de grau superior ao primeiro. Número de soluções distintas de uma congruência.

CAPÍTULO IV

Congruências Binomiais. Raízes primitivas e índices com relação a potencia de módulos primos e com relação a módulos compostos quaisquer que sejam.

CAPÍTULO V

Congruências de 2º Grau. Teoria dos resíduos quadráticos. Leis de Reciprocidade.

CAPÍTULO VI

Decomposição de um número inteiro na soma de dois de três ou de quatro quadrados. Números pitagóricos. Números poligonais.

CAPÍTULO VII

Das frações contínuas periódicas e dos números algébricos de 2º grau. Dos números algébricos equivalentes. Redução de números algébricos ao mesmo numerador e a decomposição deles.

CAPÍTULO VIII

Análise Analise indeterminada de 2^{o} grau. Resoluções com números inteiros da equação $ax^2 + 2\,bxy + cy^2 = d$ no caso que $b^2 - ac$ seja positivo e não quadrado perfeito e d seja positivo e menor do que $2\sqrt{b^2 - ac}$. Resoluções em números inteiros de $x^2 - dy^2 = e$ excluindo-se somente o caso em que d é positivo e não um quadrado perfeito e o valor absoluto de e seja maior do que $2\sqrt{d}$. Equivalências entre formas binárias quadráticas e formas reduzidas tendo igual determinante. Substituições que transformam uma dada fórmula em outra equivalente a ela. Classes de formas primitivas tendo o mesmo determinante e propriedades de um sistema completo de classes. Resolução em números inteiros da equação $ax^2 + bxy + czy^2 + dx + cy + f = 0$. Resolução em números racionais da mesma equação.

CAPÍTULO IX

Números inteiros do campo quadrático. Unidade. Procedimento das divisões sucessivas. Números decomponíveis. Números indecomponíveis. Números primos entre si. Números primos. Propriedades particulares dos inteiros do campo no qual o determinante é da forma $-k^2$ ou então da forma $-3k^2$. Propriedade dos inteiros do campo no qual o determinante é da forma $-2\,k^2$ ou $-5\,k^2$ ou $-6\,k^2$. Decomposições não unívoca dos números pertencentes a esses últimos campos.

CAPÍTULO X

Funções inteiras de uma variável com coeficientes racionais inteiros. Funções inteiras primitivas. Procura dos divisores lineares quadráticos de grau superior das funções inteiras. O procedimento das divisões sucessivas e a procura do Máximo Divisor Comum de duas funções inteiras. Funções inteiras irredutíveis. Funções inteiras primas entre si. Resultado de duas funções inteiras. Equivalência de sistema de modulo nos quais os elementos não são funções inteiras de uma variável. Decomposição e redução de tais sistemas. Teorias da divisibilidade de uma função por outra com relação a um dado módulo primo. Funções inteiras de mais variáveis com coeficientes inteiros. Funções simétricas. O discriminante de n elementos $x_1\, x_2\, x_n$ e suas várias expressões.

CAPÍTULO XI

Números algébricos em geral. Formas inteiras de uma ou mais indeterminações. Propriedades das raízes da solução de Galois. Números algébricos inteiros em geral. Unidade. Divisibilidade. Do corpo finito R(θ) gerado pela equação irredutível com coeficientes racionais inteiros $x_n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$. Corpo algébrico que contém um número finito de números algébricos dados. Forma reduzida de todo elemento do corpo $R(\theta)$. Propriedades gerais dos elementos inteiros de $R(\theta)$. Base e bases mínimas de um corpo. Norma. Partição dos inteiros de $R(\theta)$ em classes entre si incongruentes. O campo gerado pelas equações da divisão do círculo em p partes iguais. Base mínima deste campo e propriedades dos períodos constituídos por $p–1 = ef$ raízes da equação geradora de grau p –1 disposta em um quadro de f colunas com e linhas. Teorema de Gauss no caso de $p - 1 = 2^n$. Correspondência entre as soluções da congruência $f_x \equiv 0$ (mod Q) e os períodos de n_1 n_2 ... n_{e-1} que são as raízes da equação $f_x = 0$. Norma completa e norma incompleta de um número inteiro. Condições a fim de que um número complexo seja divisível por um fator primo periódico de q. Teoria de Kummer dos fatores ideais primos.

CAPÍTULO XII

Dos sistemas modulares de infinitos elementos. Ideais de um dado corpo finito de grau n. Base de um ideal. Ideais principais. Igualdade entre dois ideais. Da norma e das normas absolutas de um ideal. Operações com ideais. Ideais primos entre si. Ideais primos. Decomposição finita e unívoca de todo ideal composto. Propriedade de um sistema completo de classes de ideais pertencentes a um mesmo corpo. Das funções e normas entre si. Das funções e suas normas. Das funções racionais. Propriedades gerais das funções inteiras.Correspondência entre funcionais e ideais.

Breve análise do *Gli Elementi*

Como se pode inferir da seção anterior, *Gli Elementi della Teoria dei Numeri* é um livro muito completo cujo conteúdo perpassa várias disciplinas da atual matriz curricular dos cursos de ciências exatas, em particular, licenciatura e bacharelado em Matemática.

Os 12 capítulos são constituídos por 91 tópicos que, na intenção do autor, seriam dedicados à Teoria dos Números. Na realidade, a perspectiva de Gazzaniga é muito abrangente. Fazendo uma análise destes tópicos, ao menos 49% destes são encontrados em livros de Álgebra Moderna, como o de Ayres Junior (1965), de Aritmética como os de Alencar Filho (1987) ou Domingues (1991).

É claro que numa perspectiva histórica como a de Baumgart (1992), na qual se vê a evolução da álgebra em três estágios (álgebra retórica, sincopada e simbólica), há grande integração entre a Teoria dos Números e Álgebra. É nessa perspectiva que se entende o olhar abrangente de Gazzaniga ao escrever *Gli Elementi*.

Ainda no que concerne aos pontos de interseção entre os tópicos abordados nos *Gli Elemnti* e outros campos da Matemática, a Álgebra Linear se faz presente como nas definições de dependência e independência linear, dentre outras.

Além da forte integração já mencionada entre Aritmética e Álgebra, o livro apresenta resultados envolvendo conceitos presentes nos cursos de Análise Matemática, como o de derivada. Tal conceito emerge quando da explicitação de uma série de proposição ligadas aos polinômios, dentre elas:

> Se o polinômio $A(x)$ é irredutível, $A(x)$ e $A'(x)$ são primos entre si. (...) Se um polinômio $A(x)$ é igual ao produto de dois fatores distintos e irredutíveis, $A(x)$ é primo com sua derivada $A'(x)$ (...) Dividindo $A(x)$ pelo o MDC de $A(x)$ e $A'(x)$, obtemos, como quociente, um polinômio, cujos fatores irredutíveis são todos distintos (...) Se um polinômio $A(x)$ é igual ao produto de dois fatores distintos e irredutíveis, $A(x)$ é primo com sua derivada $A'(x)$ (GAZZANIGA,1903, p.278-279).

Considerando ainda a presença no livro de temas que perpassam vários campos da Matemática, Gazzaniga apresenta as frações contínuas, um tópico de Cálculo Avançado encontrado em Spiegel (1974), dentre outros.

Com relação ao estilo, Gazzaniga escreve de uma forma narrativa e agradável, como numa conferência, como se pode verificar no excerto seguinte:

> Atribui-se a Eratóstenes o conhecido e simples procedimento para se obter todos os números primos compreendidos entre 1 e um dado número *n*. Consiste em cancelar na série 1, 2, ...*n*, de todos os múltiplos de 2, exceto 2 (pulando uma posição), depois todos os múltiplos de 3, exceto 3 (pulando duas posições), ... e assim por diante, até que não se tenha mais qualquer número inferior a *n* que possa ser cancelado. Os números assim cancelados não são primos, o que é evidente; é fácil ver que se *m* é o primeiro dos não cancelados depois de um certo número de cancelamentos, *m* é certamente primo. (...) A questão de decidir se um dado numero *n* é primo ou composto, é muito árdua, se *n* for tão grande que não seja encontrado nas tábuas dos números primos conhecidos; é árdua no sentido de que, na falta de outros critérios, teríamos que dividir sucessivamente por 2, por 3... e, no caso que *n* seja primo, se deveria fazer ao menos tantas divisões, com resto, quantos são os números primos que existem entre 1 e *n* (GAZZANIGA, p.18).

Entretanto, este modo de produzir o texto não o leva a abandonar o rigor formal e as demonstrações, presentes em todo livro, garantindo uma notável qualidade matemática.

Cada capítulo foi elaborado a partir de pesquisas em fontes primárias, as quais são citadas ao longo do texto em notas de rodapé. A consulta meticulosa a tais fontes levaram Gazzaniga a apresentar uma quantidade de proposições não usual nos atuais textos de Teoria dos Números.

Síntese de um estudo comparativo com outros livros

Um estudo comparativo entre o livro de Gazzaniga, dois livros de Aritmética e um de Álgebra Moderna, adotados como textos didáticos em vários cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, nos últimos trinta anos nas universidades brasileiras está sintetizado no quadro abaixo.

Quadro-1: Síntese do estudo comparativo

Título/Autor	**Nº de páginas**	**Nº de capítulos**	**Interseção com os assuntos abordados nos *Elementi***
Aritmética dos Inteiros/ Edgard de Alencar Filho[2]	406	21	Todos os capítulos
Fundamentos de Aritmética/ Hygino H. Domingues	297	5	Totalmente:1 capítulo Parcialmente: 4 capítulos
Álgebra Moderna Frank Ayres Junior	361	17	Totalmente: 2 capítulos Parcialmente: 12 capítulos Inexistente: 3 capítulos

O quadro revela a atualidade e abrangência da obra de Gazzaniga. É significativo o número de assuntos que, total ou parcialmente são abordados nos capítulos dos livros consultados e também nos capítulos dos *Gli Elementi*. Esta quantidade de temas em comum, entre cada livro estudado e o de Gazzaniga, nos leva a inferir que, no campo do ensino de Matemática, livros atuais muitas vezes são inspirados em obras maiores, que mesmo se escritas há décadas, são atuais. De fato, no livro de Gazzaniga além do aspecto do conteúdo, se observa também uma consolidação do rigor formal na produção do texto, elemento hoje

[2] Apesar do número de páginas do livro de Alencar Filho ser praticamente igual ao de Gazzaniga, o texto italiano apresenta muito mais conteúdo pelo fato da diagramação ser mais compacta.

muito presente e necessário nos livros didáticos de Matemática adotados no ensino superior.

Considerações finais

Como conclusão constatamos que:

- A obra de Gazzaniga é abrangente, cobrindo um conteúdo que atualmente nos cursos de graduação no Brasil, perpassa várias disciplinas;
- Um aspecto importante do ponto de vista da História da Matemática reside no fato de Gazzaniga ter consultado fontes primárias para a elaboração do livro *Gli Elementi*, fato que não ocorre com frequência hoje, no que se refere à produção de obras de cunho didático.
- O livro foi escrito num estilo equilibrado, dosando a linguagem expositiva clara e o rigor formal necessário para qualificar a obra do ponto de vista matemático;
- Numa comparação com os livros atuais da mesma disciplina *Gli Elementi* carece de mais exercícios com respostas. Com o olhar de hoje isso pode ser considerado um déficit; de fato, tal lacuna compromete a objetividade atualmente exigida na elaboração de obras matemáticas de caráter didático.

Referências Bibliográficas

ALENCAR FILHO, Edgard. *Aritmética dos Inteiros*. São Paulo: Nobel, 1987.

AYRES JUNIOR, Frank. *Álgebra Moderna.* São Paulo: McGraw- HILL, 1965.

BAUMGART, John, K. *Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra.* São Paulo: Atual, 1992.

DOMINGUES, Hygino H. *Fundamento de Aritmética.* São Paulo: Atual, 1991.

GAZZANIGA, Paolo.*Gli Elementi della Teoria dei Numeri.* Padova: Fratelli Drucker, 1903.

NOTAS BIOGRAFICAS sobre Gazzaniga. Disponível em:<http://matematica.uni-bocconi.it/storia/letterag/gazzaniga.htm> . Acesso em 11 Nov. 2012.

SPIEGEL, Murray, R. *Cálculo Avançado.* São Paulo: McGraw- HILL, 1974.