

TK033 - OS LOGARITMOS E SUA DIFUSÃO NOS PAÍSES DA EUROPA**Evanildo Costa Soares**Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
nildo_23@hotmail.com**Resumo**

Este trabalho busca a priori desenvolver o significado conceitual dos logaritmos a partir da análise das obras de Napier: *O Constructio e o Descriptio*. Dessa forma, abordarei como os logaritmos foram recebidos pelos diversos estudiosos da época e como essas duas obras expandiram para diversos países ocidentais e foram importantes para o avanço significativo da Ciência.

Palavras-chave: Constructio; Descriptio; Logaritmos; Logaritmo dos senos; Tábua de logaritmos.

Abstract

This paper seeks to develop a priori conceptual meaning of logarithms from the analysis of the works of Napier: *The Descriptio and Constructio*. Thus, I will discuss how logarithms were welcomed by many scholars of the time and how these two works expanded to several Western countries and were important to the significant advancement of Science.

Keywords: Constructio; Descriptio; Logarithms; Logarithm of sines; Board logarithms.

Introdução

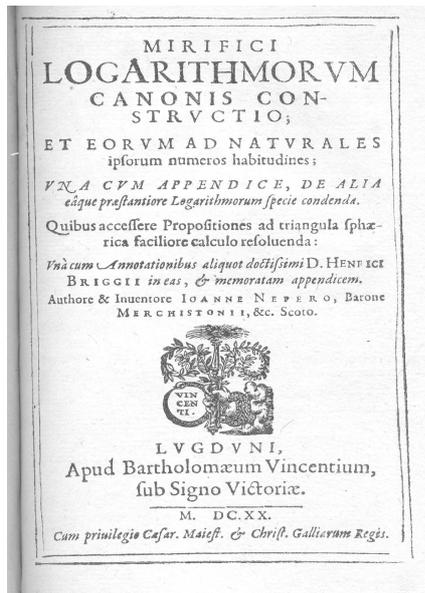
A celebração do tricentenário da invenção dos logaritmos pelo Barão de Merchiston, Napier, foi destaque entre os pequenos grupos de pensadores em que suas descobertas, substancialmente, aumentaram a capacidade intelectual da mente humana como um agente prático. Em uma ocasião como esta, quando a personalidade e o trabalho de Napier estão atraindo interesse mundial, é importante mostrar o real significado e responder com capacidade os méritos de suas invenções e conquistas no campo da Matemática.

Este artigo discorre sobre a descoberta dos logaritmos e sua difusão nos principais países da Europa. Este trabalho está relacionado ao projeto de pesquisa “Investigação histórica de práticas sociais: outras Histórias da Matemática na formação de professores”, desenvolvido na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, bem como a publicação de um livro sobre uma pesquisa concluída em 2011 que retrata sobre uma “investigação histórica sobre os logaritmos e suas implicações no ensino médio”.

Inicialmente focarei, em síntese, como Napier desenvolveu o significado conceitual dos logaritmos a partir de suas principais obras, o *Descriptio* e o *Constructio*. Além disso, abordarei como os logaritmos foram recebidos pelos diversos estudiosos da época e como essas duas obras expandiram para diversos países ocidentais tornando-se um instrumento importante para o avanço significativo do cálculo.

As duas principais obras de Napier

Tudo o que Napier escreveu sobre *os logaritmos* está contida em dois livros, conhecido como o *Descriptio*, publicado em 1614, e outro conhecido como o *Constructio*, publicado após sua morte em 1619, conforme mostram as figuras a seguir.



Para Knott (1915), provas internas, bem como a declaração distinta de seu filho que publicou o *Constructio*, deixa claro que era na verdade escrito muitos anos antes do *Descriptio* e representa “um estrato anterior do pensamento”. Ambas as obras foram escritas em latim, a língua comum dos aprendizes de sua época, mas Napier presenciou e aprovou uma tradução em inglês do *Descriptio* em 1616. Uma excelente tradução do *Constructio* fora publicado em 1640 em Edimburgo. O *Constructio* é a mais completa e valiosa das duas publicações.

O *Descriptio*, portanto, tem evidências de ter sido escrito totalmente de uma única vez, para servir como uma introdução e guia para as tábuas que seriam produzidas por Napier. Mas, o *Constructio*, foi evidentemente escrito em vários momentos diferente. A ordem de seu conteúdo é peculiar e podem ser notada como uma evidencia de diferentes etapas da descoberta.

Por outro lado, no *Descriptio*, o autor publicou apenas sobre o raciocínio em que seus cálculos complicados eram efetuados permitindo assim que o mundo matemático pudesse apreciar a natureza e utilização das tábuas que deveriam ser encontradas neste trabalho. Na verdade, Napier propôs expressamente em seu primeiro trabalho uma

proposta de uma publicação mundial da maneira pela qual as tábuas fossem calculadas até que ele descobre que tem sido justificado pela sua existência e utilidade reconhecida.

O Descriptio

Publicada em 1614, o *Descriptio* foi a primeira obra de Napier sobre os logaritmos, sob o título *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos Logaritmos). Nela, ele retrata como desenvolveu esta ideia de logaritmos e quais passos utilizados para sua definição usual. Em síntese, este trabalho inicialmente teve um direcionamento prático realizado com auxílio de retas que foram posteriormente configurados e representados por progressões numéricas envolvendo cálculos trigonométricos.

O livro trata como Napier começou a desenvolver a ideia de logaritmos, que só teve a primeira tradução dois anos mais tarde em inglês do texto original de latim, por Edward Wright realizado durante a vida de Napier e submetido e aprovado por ele. O título da página do *Descriptio* e o primeiro e segundo capítulos do livro são reproduzidos em tópicos de I a VI fascículos. Estes dois capítulos contam todos os requisitos propostos para a construção das tábuas dos logaritmos: a utilização do seno como ponto de facilitação do cálculo; o raio para auxiliar na resolução do cálculo ($0 < r < 10.000.000$); fator de medida que servia para auxiliar nos cálculos repetitivos e no preenchimento de espaços vazios entre os números reservados sobre a reta; escolha das quantidades numéricas representados geometricamente sobre a reta; medida fixa representada geometricamente sobre a reta e a configuração de proporções contínuas para seus cálculos.

Assim, o livro esclarece que através de seus cálculos contínuos representados sobre as retas, Napier propõe a ideia de logaritmo da seguinte maneira: Como as operações numéricas foram substituídas por medidas percorridas sobre duas retas com velocidade inicial constante e variadas. Essas duas retas foram representados e reconhecidos posteriormente por duas progressões uma aritmética e a outra geométrica, tal como ele observou: a distância que correspondia cada operação era uma quantidade fixa, de modo que o comprimento medido na reta logarítmica (progressão aritmética) expressa o número de vezes que a operação tinha sido realizada. A este comprimento é concedido o nome de *logaritmo*, que é usado pelo fato de razões entre os números conforme tratarei posteriormente quando Napier descreve de forma prática essa definição de logaritmos.

Transcrevendo essa ideia para as operações com cálculos de funções trigonométricas, tal como aparece no *Descriptio*, deixa bem claro que seu plano seria manifestar nas potências do fator escolhido a proporção do raio do seno, isto é, a condição para seno considerado como uma razão trigonométrica. Na medida em que os fatores escolhidos fossem menores que a unidade (apesar de muito próximo a ele) e as potências elevadas correspondem aos senos e *vice-versa*. O índice da potência do fator escolhido que é igual a um dado seno chama-se de *logaritmo dos senos*.

O restante desse livro consiste de uma descrição das tábuas impressas no *Descriptio* com aplicação dos logaritmos dos senos entre outras funções trigonométricas que são exemplificados e explicados através de tabelas que envolvem o uso de ângulos expressos em graus e minutos. As tábuas são compostas por sete colunas concedidas, sendo que para cada minuto na primeira metade do quadrante as seguintes quantidades: O ângulo, seu seno natural, o logaritmo dos senos, o logaritmo de sua tangente, o logaritmo de seu cosseno, seu cosseno natural e a complementação do ângulo. Os logaritmos são escritos com sete casas decimais. Vejamos este exemplo envolvendo o seno, sem expressar os cálculos, superficialmente como eram estruturados em termos numéricos:

de 44°

min.	Seno	Logaritmo	Diferencial +/-	Logaritmo	Seno	min.
0	6946584	3643351	349137	3294214	7193398	60

de 45°

O seno é 6946584. Para encontrar o logaritmo, o seno que está na segunda coluna corresponde ao arco 44° e 0 minuto e na terceira coluna da mesma linha obtém-se 3643349, que é o logaritmo do seno que estávamos procurando.

O Constructio

A segunda e a mais importante obra de Napier sobre os logaritmos, publicado em 1619, sob o título *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Uma construção da maravilhosa regra dos Logaritmos), pelo seu filho Robert Napier, convida o leitor para que siga o seu método de construção, seus cálculos, sua tabela de logaritmos e o raciocínio utilizado. Em síntese, o livro apresenta uma linguagem mais acessível e bem diferenciada do primeiro trabalho em que os cálculos eram cansativos e complicados

quando ele tratou de definir os logaritmos concebidos sobre as retas envolvendo funções trigonométricas.

Nessa obra, o autor discorre como desenvolveu as três fases construtivas de suas tábuas que foram elaborados categoricamente a partir da escolha de números progredido por proporções contínuas, envolvendo progressões aritméticas e progressões geométricas. Os métodos descritos por Napier para operacionalização de seus cálculos eram ágeis e manipuláveis tornando os resultados precisos. Para isso, a progressão aritmética procedia por meio de intervalos iguais; enquanto que a progressão geométrica avançava em desigualdade proporcional aumentando ou diminuindo os intervalos. Sem detalhar em termos práticos os possíveis resultados e cálculos, traçarei um comentário sucinto como era realizada a operacionalização dessas três fases construtivas de suas tábuas, tais como:

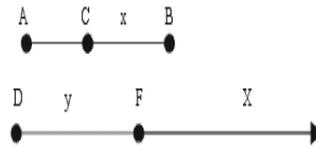
Primeira tábua: A operação realizada sobre esta fase destacava-se a importância das operações aritméticas, subtração, multiplicação bem como a parte fracional e sua equivalência decimais que se desenvolvia a partir do raio com sete zeros acrescidos subtraindo de sua parte 10.000.000 e do número final, o resultante de sua parte 10.000.000 e assim por diante. Uma centena de números podia facilmente em proporção contínua geometricamente subsistir entre o raio e o seno menos do que pela unidade, ou seja, entre 10.000.000 e 9.999.999;

Segunda Tábua: O raio procede com seis zeros acrescentados, percorrendo cinquenta outros números diminuindo proporcionalmente na grandeza que for mais fácil, e tão perto quanto possível, subsistindo entre o primeiro e o último número da primeira tábua.

Terceira Tábua: Consistem de 69 colunas em que cada coluna é disposta 21 números, precedendo na proporção que for mais fácil e mais perto possivelmente para que subsista entre o primeiro e o último número da primeira tábua.

Conforme analisei, a operacionalização dessas tábuas foi importante para que fosse idealizada a construção dos logaritmos, de acordo com o *Constructio* são avaliadas a partir de uma relação prática entre duas progressões aritmética e geométrica:

Imaginemos os pontos C e F percorrendo respectivamente o segmento AB e a semi-reta DX, partindo ao mesmo tempo do ponto A e do ponto D, com a mesma velocidade inicial, admitamos ainda que, numericamente, a velocidade de C seja dada sempre pela medida de CB e que a velocidade de F seja constante; nessas condições Napier definiu como logaritmo de $x = CB$ o número $y = DF$. Assim, explicitamente, nesse conceito não intervém a ideia de base. (EVES, 1997, p. 243)



De acordo com Miguel e Miorim (2002, p. 53), a sequência original proposta por Napier é bastante semelhante, só que o comprimento do segmento AB era igual a 10^7 ; o coeficiente de desaceleração na velocidade do ponto C era de $(1 - 10^{-7})$ e os intervalos de tempos considerados a fim de tornar discretos os movimentos contínuos dos pontos C e F, eram de 10^{-7} . Desse modo, a situação original considerada por Napier é expressa melhor usando uma comparação entre progressão geométrica e progressão aritmética pelo seguinte método:

PA: 0	1	2	3	4	5
PG: 10^7	$10^7(1 - 10^{-7})$	$10^7(1 - 10^{-7})^2$	$10^7(1 - 10^{-7})^3$	$10^7(1 - 10^{-7})^4$	$10^7(1 - 10^{-7})^5$

Aplicando-se a definição de Napier a essa situação original teríamos:

$\log 10^7 = 0$	$\log 10^7(1 - 10^{-7})^3 = 3$
$\log 10^7(1 - 10^{-7}) = 1$	$\log 10^7(1 - 10^{-7})^4 = 4$
$\log 10^7(1 - 10^{-7})^2 = 2$	$\log 10^7(1 - 10^{-7})^5 = 5$

Observando essa ideia, deparamo-nos com o conceito de logaritmos proposto por Napier sobre as duas semirretas, ou seja, que os elementos postos sobre a progressão geométrica são os que saem com velocidade variada, enquanto isso, os da progressão aritmética são os que partem com velocidade constante. Em outras palavras, os termos da progressão aritmética são os respectivos logaritmos da progressão geométrica.

A difusão dos logaritmos nos países ocidentais

De acordo com Naux (1971), o trabalho de Napier proposto pelas duas tábuas que sucederam a ideia de logaritmos foi recebido pelos diversos estudiosos da época, tais como: Kepler, Burgi, Cavalieri, Wingate e Henry Briggs que juntamente com Napier propôs a formulação dos logaritmos de base dez entre outros. Não demorou e suas obras foram adotadas nos países da Europa conforme veremos a seguir.

Os Logaritmos na Inglaterra

Segundo Soares (2011, p. 63), os logaritmos nasceram nesse país, após os ensino e descoberta de Napier e Briggs que contribuíram para a criação e prática desse instrumento. Na Inglaterra, coube a Edmund Wingate (1596 – 1656) a publicação de dois trabalhos da compilação do trabalho de Napier, são eles: *Logarithmetique Arithmetique* (Logaritmo Aritmético) e *Fragmentum Logarithmotechnicæ* (Fragmentação Técnica dos Logaritmos). A primeira, publicada em 1626, incentiva os ingleses para o estudo significativo dos logaritmos e a outra publicada em 1633, aborda os logaritmos dos senos e das tangentes, sendo medidos todos em graus e minutos pelos quadrantes, sendo que cada grau era dividido em 100 minutos.

Os Logaritmos nos Países Baixos: Bélgica e Holanda

Para Naux (1971, p. 10), a expansão dos logaritmos nesses países, faz-se basicamente por dois editores matemáticos: Adrien Vlacq e Ezechiel Donders. Os dois desenvolveram estudos fundamentados nos trabalhos de Napier e Briggs sobre os logaritmos. Com base nisso, os dois estudiosos publicaram dois trabalhos sobre o logaritmo aritmético, que abrangia os logaritmos de Briggs e de Napier bem com o uso de cálculos envolvendo funções trigonométricas.

Os Logaritmos na Alemanha

Segundo o comentário de Soares (2011, p. 12), Ludovic Probeni é o primeiro autor alemão que adaptou o uso dos logaritmos. Em 1634, publicou seu *Clavis Universi Trigonometricæ* (A Chave Universal Trigonométrica), em que no seu prefácio, elogia a Napier, Briggs e Vlacq. Seu trabalho abrange três notificações para cada um dos seus problemas; o primeiro em cálculo trivial; o segundo em prostaférese, e o último pelos logaritmos.

Os logaritmos na Itália

De acordo com Naux (1971, p. 13), a primeira modificação proposta para os logaritmos ocorreu na Itália. Coube a Boventura Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galilleu (1564 – 1642) e geômetra, principal autor da geometria indivisível ao fazer uma análise nos logaritmos referente às obras de Napier e Briggs. Foi nesse país que Cavariieri desenvolveu estudos e diretrizes gerais que abrangiam os logaritmos com cálculos de funções trigonométricas. Em 1632 publica um livro, cujo título é:

Directorium Generale Uranometricum (Diretrizes Gerais Astronômicas), em que procura demonstrar os fundamentos e as regras do logaritmo trigonométrico como novas proposições e definição para os logaritmos.

Os Logaritmos na França

Para Soares (2011 apud NAUX, 1971, p. 21), a França nessa época não brilhou com nenhum trabalho ligado a história dos logaritmos. Nenhum de seus grandes “geômetras”, Fermat, Descartes e Pascal, que eram os melhores do continente, não realizou nenhum trabalho que pudesse acrescentar às obras de Napier e Briggs. Mas, Fermat proporcionou algumas teorias envolvendo o estudo de áreas de triângulo sobre uma curva e estabelecendo assim uma relação intrínseca de estudos entre progressões aritméticas e geométricas sobre essas áreas envolvidas. Baseado nessa análise foi *Alphonse Antonio de Sarasa*, quem primeiro conectou essa proposta em 1649 mostrando que a área da hipérbole equilátera média eram os logaritmos dos números que formavam as abscissas.

Considerações finais

Pelos estudos realizados sobre a análise dessas duas obras de Napier: *O Descriptio* e o *Constructio*, conclui-se que essas obras formaram a base para o que hoje chamamos de conceituação dos logaritmos. Foram essas duas maravilhosas descobertas que contribuíram para que muitos estudiosos encontrasse nos logaritmos o caminho ideal para o desenvolvimento científico e tecnológico da época.

Portanto, além da importância e do estudo significado desenvolvido por essas duas obras de Napeir, foi a aceitação desses trabalhos pela a comunidade científica da época. Fato que repercutiu de uma forma significativa para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. A sua difusão não demorou muito para que o simples trabalho alcançasse outros países e fronteiras que sofriam com o manuseio dos enormes cálculos usados pelos cientistas da época relacionados a estudos astronômicos e a navegação.

Referências

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 1997.

KNOTT, C. G. **Napier tercentenary memorial volume**. Edinburg: Royal Society of Edinburg, 1915.

MIGUEL, A.; MIORIM, A. M. **História na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

NAPIER, J. **Mirifici logarithmorum canonis constructio**. Scotland: Edinburgi, 1619.

NAUX, C. **Historie des logarithmes de Neper a Euler**. Paris: Librairie scientifique et technique A. Blanchard, 1971, tome II.

SOARES, E. V. **Uma investigação sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. Dissertação (Mestrado Profissionalizante) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.