

TK038 - DOS PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA PROJEÇÃO CENTRAL**AO PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE POR JEAN-VICTOR PONCELET****Jansley Alves Chaves****Gerard Emile Grimberg**

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

RESUMO

O objetivo deste texto é comparar a aplicação do princípio da projeção central abordada por Jean-Victor Poncelet (1788-1867) na parte I do 3º caderno de *Applications d'analyse et de géométrie*, publicado em 1862, com a abordagem contida na 3ª parte do 5º caderno de *Applications d'analyse et de géométrie*, publicado em 1864, mas submetido à Académie de Science de Paris em 1820. No 3º caderno, escrito em Saratoff entre 1813 e 1814, Poncelet desenvolve o método de projeção central. Este método é uma maneira simples de demonstrar certas propriedades das figuras, sem o qual seria, se não impossível, muito difícil de demonstrá-las diretamente. E anuncia quatro princípios fundamentais e elementares da projeção central. No 5º caderno, escrito em Paris em 1818, anuncia dezoito teoremas dos princípios da doutrina das projeções. Este 5º caderno é submetido à Académie de Science de Paris em 1820.

Palavras-chave: Projeção central, Continuidade, geometria projetiva, Poncelet

ABSTRACT

The aim of this paper is to compare the application of the principle of central projection approached by Jean-Victor Poncelet (1788-1867) in Part I of the 3rd notebook *Applications d'analyse et de géométrie*, published in 1862, with the approach contained in Part 3 of the 5th notebook of *Applications d'analyse et de géométrie*, published in 1864, but submitted to the Paris Academy of Sciences in 1820. In the 3rd notebook, written in Saratoff between 1813 and 1814, Poncelet develops the central projection method. This method is a simple way to show certain properties of figures, without which it would be, if not impossible, very difficult to demonstrate them directly. And announces four fundamental principles of elementary and central projection. In the 5th notebook, written in Paris in 1818-1820, announces eighteen theorems of the principles of the doctrine of projections. This is the 5th notebook submitted to the Paris Academy of Science in 1820.

Keywords: Central projection, Continuity, projective geometry, Poncelet.

INTRODUÇÃO

Ao analisar os cadernos de Saratoff, e compará-los juntamente com os trabalhos dos períodos posteriores, revelam-se o que sustenta a abordagem das propriedades projetivas por Poncelet: a ideia de transformação de figuras. A geometria sintética clássica (oriunda de Euclides) opera sobre uma figura particular, o que nos conduz a necessidade, às vezes, de discutir vários casos de figuras para obter a demonstração em toda a sua generalidade.

Em compensação a geometria analítica trata dos objetos independentemente de suas posições. Uma demonstração analítica envolverá todos os casos mediante soluções de equações. Rompendo com esses métodos unilaterais Poncelet combina considerações sintéticas e analíticas para conseguir uma demonstração única para todos os casos de figuras.

O 1º caderno de Saratoff é, no entanto, exclusivamente sintético, mas Poncelet é ex-aluno da École Polytechnique que teve forte influência de Gaspard Monge e que segundo ressalta Belhoste (1998, p. 4) combinava considerações sintéticas e analíticas em seu ensino e que insistia sobre a correspondência entre as operações de análise e as construções por via da geometria descritiva. Poncelet percebeu que o recurso da projeção central e cilíndrica permite substituir as demonstrações analíticas por demonstrações puramente sintéticas e gerais.

Nisso reside o chamado *Princípio de Continuidade*, ou seja: a demonstração de uma propriedade obtida por via de uma projeção central é geral em todos os casos da figura; a figura pode variar continuamente e a propriedade das relações permanecerem válidas. A ideia de Poncelet é, portanto, tentar introduzir um método que possibilite uma única demonstração, qualquer que seja a particularidade da figura; podendo fazer variar a figura, sem que haja necessidade de considerar casos distintos, ou seja, sem descontinuidade. Fica claro nos trabalhos de Poncelet que tanto a ideia dinâmica da geometria como o Princípio de Continuidade são partes da sua busca.

“Pode-se concluir em geral que se a figura dada goza de uma certa propriedade de posição, a projecção desta figura deve gozar também da mesma propriedade... Uma figura sendo dada, se se quer encontrar quais são as propriedades de posição que ela tem,

examinar-se-ia se pode ser projetada segundo uma figura mais simples” (PONCELET, 1862, p. 378).

O fato da construção geométrica de uma curva depender da disposição relativa da figura parecia colocar uma questão de descontinuidade, o que o leva a estudar o problema da continuidade na construção geométrica. Assim, Poncelet buscava fornecer aos métodos sintéticos a mesma generalização dada aos métodos analíticos. Procedendo assim, desenvolve o método da projeção central, introduzindo alguns princípios (PONCELET, 1862, p. 116) que credits à Charles-Julien Brianchon na memória de 1810: *Solution de plusieurs problèmes de géométrie*:

“Há uma certa ordem das proposições de geometria plana, que se relacionam apenas às direções das linhas, e nas quais não se considera os comprimentos absolutos ou relativos destas linhas, nem tampouco a grandeza dos ângulos; pode se aplicar a este gênero de proposições um método particular de demonstrações, e eis alguns exemplos” (BRIANCHON, 1810, p. 1).

O método de Brianchon consiste em encontrar a perspectiva da figura que simplifica o problema.

Antes do seu maior trabalho, *Traité des propriétés des figures projectives* de 1822, Poncelet apresentou os princípios da projeção de figuras em alguns artigos, a maior parte não publicados. Estas informações são reagrupadas, quase meio século depois, em dois volumes, intitulados *Applications d’Analyse et de Géométrie*:

- O primeiro volume, publicado em Paris em 1862, compreende os 7 cadernos de Saratoff, dos quais o 1º caderno é dedicado exclusivamente à geometria sintética, conhecido como Memória de abril de 1813 e o 3º caderno à projeção central. Estes cadernos foram redigidos durante a sua prisão na Rússia até 1814.

- O segundo volume, publicado em Paris em 1864, contém diversos artigos, sendo todos anteriores ao seu Tratado. Dentre estes, o 5º caderno: *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques*, que foi apresentado a *Académie des Sciences* de Paris em 1820 e que,

posteriormente, recebeu um parecer dos membros desta academia, que ficou conhecida como Relatório de Cauchy. Este relatório consta na íntegra em seu Tratado.

Neste texto apresentaremos uma análise da evolução que sofre a exposição e a justificativa dos princípios projetivos, abordados no 3º caderno de Saratoff e no 5º caderno apresentado à *Académie des Sciences* de Paris em 1820 para entendermos como Poncelet chega ao Princípio da continuidade.

Em um primeiro momento, estudaremos os Princípios da projeção central, enunciados no 3º Caderno de Saratoff. A seguir estudaremos os Princípios da doutrina de projeção enunciados no 5º caderno. Por fim, concluiremos com algumas considerações de ordem geral.

O Terceiro Caderno de Saratoff e a primeira redação dos Princípios da projeção central

Estes Princípios são enunciados no 3º caderno de Saratoff. São quatro Princípios dos quais os três primeiros são Princípios elementares da perspectiva: o primeiro enuncia que qualquer cônica pode ser considerada como a projeção de um círculo sobre um plano. Os dois outros princípios tratam da projeção de retas e enuncia as propriedades que permanecem quando um feixe plano de retas é projetado sobre um plano. Poncelet ressalta que retas concorrentes podem ser projetadas em um feixe de retas paralelas e reciprocamente. Nas demonstrações dessas propriedades Poncelet utiliza análise e geometria descritiva.

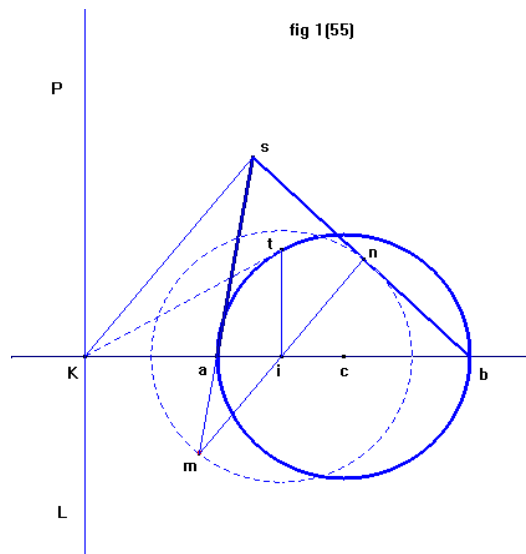
Mas o quarto princípio representa o pivô do método da projeção. Ao demonstrar o quarto Princípio da projeção central, Poncelet é levado a enunciar o Princípio da Continuidade.

“Se uma curva de segundo grau e, um, dois, ou vários pontos, todos arrumados em linha reta, são situados no mesmo plano se pode de uma infinidade de maneiras projetar a figura sobre um novo plano, tal que a projeção da curva seja um círculo, e que ao mesmo tempo, as projecções dos pontos passem ao infinito; de sorte que todo sistema de retas concorrendo em qualquer um desses primeiros pontos terá por projecção um sistema de linhas retas paralelas” (PONCELET, 1862, p. 122).

Uma proposição geral para superfícies de 2ª ordem, que era conhecida por Poncelet, diz que um cone oblíquo cuja base é uma curva qualquer de 2ª ordem, pode ser seccionada por

um plano segundo um círculo. Estes são conhecidos como seções sub-contrariantes ou conjugadas da base.

O que Poncelet faz para demonstrar o 4º Princípio é determinar o lugar geométrico dos vértices do cone oblíquo tal que a reta pl seja projetada no infinito quando a sub-contrariante é projetada como um círculo.



Supõe-se primeiramente que a curva seja um círculo c sobre o plano horizontal. De fato, podemos supor que a curva foi projetada de tal forma que se torne um círculo (1º princípio). A reta pl é também horizontal e intercepta perpendicularmente pelo diâmetro ab em K . Trata-se de encontrar o vértice do cone oblíquo cuja base seja c e tal que a secção sub-contrariante seja paralela ao plano que passa por s e pela reta pl ; Portanto, o plano secante intersecta o cone segundo um círculo e projeta a reta pl no infinito.

Este problema pode ser resolvido com as ferramentas dos três Princípios anteriores. Neste problema ao encontrar o lugar geométrico dos pontos que satisfazem tais condições é que Poncelet afirma que as sub-contrariantes sempre existirão, sendo os raios reais ou imaginários e as construções serão sempre possíveis quando as condições não forem contraditórias ou incompatíveis.

Ao final do 2º caderno de Saratoff (PONCELET, 1862 p. 105, IV), Poncelet buscava uma solução de forma analítica e neste 3º caderno, Poncelet compara esta solução com uma solução sintética. Assim como observa Fridelmeyer (2010, p. 70), o resultado é conflitante: a análise demonstra que o centro i , dos círculos conjugados, não deixa de existir qualquer que

seja o raio da circunferência dada. A razão é que o ponto i e o ponto K são relacionados de forma algébrica. Portanto, independe da posição particular da reta pl (fig. 1). Diríamos hoje que a reta it é polar do pólo K .

Isto o leva a refletir sobre a possibilidade e impossibilidade de certas construções. Assim, para a construção geométrica, basta observar as condições que são apresentadas. Quando a impossibilidade é caracterizada por condições contraditórias ou incompatíveis, ela é absoluta e, portanto, não há nada real, geometricamente falando. Apenas no sétimo caderno, que estava destinado a ser submetido à Academia de Ciências de São Petersburgo, que formulará esta ideia de forma bem clara:

"Adotarei em princípio nesta memória de geometria que se uma figura goza de uma dessas propriedades que denominamos de posição, quando as partes que a compõem têm uma disposição particular, esta figura goza ainda da mesma propriedade qualquer que seja a maneira geral com a qual se tenha invertido a ordem ou a disposição das figuras" (PONCELET, 1862, p. 374).

O objetivo do enunciado dos princípios é, portanto, de erigir em método geral o método que Brianchon aplica apenas a certas situações. Este método envolve unicamente as propriedades de posição e ficam nítidas as diferenças entre essas propriedades e aquelas que envolvem distâncias, razão de distâncias e ângulos.

O Quinto Caderno e a redação dos Princípios da doutrina das projeções

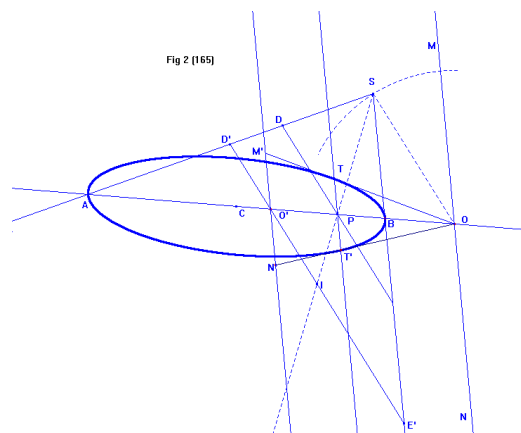
O quinto caderno, *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques*, que constitui, como o ressalta Poncelet (1864, p. 365, nota de rodapé), a Memória apresentada à Académie de Science de Paris em 1º de maio de 1820, é redigida em Paris entre 1815 e 1820. Esta memória contém muitos desdobramentos na enunciação e na justificativa dos princípios se for comparada com os enunciados do terceiro caderno de Saratoff. São em todo dezoitos teoremas dos quais os oito primeiros dizem respeito a projeções de feixe de retas. Poncelet aborda projeção de cônicas apenas no teorema IX. Nas demonstrações, Poncelet utiliza apenas

a geometria sintética. No teorema IX trata-se de encontrar o lugar geométrico dos vértices do cone oblíquo tal que a reta pl seja projetada no infinito quando a sub-contrariante é projetada como um círculo. Os teoremas X, XI e XII são conclusões deduzidas da figura do teorema IX.

“Uma reta e uma seção cônica em um mesmo plano podem ser geralmente consideradas como a projeção de outra, tal que a reta é conduzida inteiramente para o infinito e a seção cônica torna-se um círculo, de modo que segundo o teorema VII, qualquer sistema de retas contínuas que concorrerem em um ponto da reta em questão é tornado em um sistema de retas paralelas...”

Para demonstrar este Princípio de uma maneira completa, Poncelet reformula o problema já considerado como paradigmático no terceiro caderno de Saratoff.

“São dados uma reta (MN) e uma seção cônica (c) sobre o plano, fig. 2 (165). Encontrar o centro e um plano de projeção tal que a reta dada MN seja projetada no infinito sobre este plano e que a seção cônica (c) seja ao mesmo tempo projetada sobre um círculo.”



Suponha o problema resolvido. Seja S o centro de projeção; Considere o cone oblíquo que teria o seu vértice neste ponto e base a secção cônica dada. A projetante desta curva será a superfície cônica; Considere um plano que passe pela reta MN e pelo ponto S , será a projetante desta reta. Conforme a condição do problema existe certo plano de projeção que secciona a superfície projetante segundo uma circunferência, e conduz a reta MN ao infinito.

Então:

- 1- A reta dada MN não deverá intersectar a secção cônica dada, ou seja, MN é uma secante ideal.

- 2- Os planos paralelos seccionam segundo uma circunferência, dita, sub-contrariante ou conjugada da cônica dada.

Considere um plano por SAB este plano chamaremos de diametral. Observa-se que este plano secciona os diâmetros das sub-contrariantes ao meio e contém o vértice S . A circunferência de centro O e raio OT contida no plano diametral é o L.G. dos pontos S procurado. Tal qual o problema de Saratoff, aqui fica claro as condições de possibilidade da construção e obtenção do ponto S .

Estes princípios e justificativas aparecem na terceira parte da memória. A primeira é consagrada ao estudo das propriedades das cônicas, a segunda ao estudo dos círculos e eixos radicais. A terceira parte enuncia, portanto, o método que relaciona a primeira parte com a segunda, já que pelo método da projeção central as cônicas se transformam em círculos, mantendo as propriedades que Poncelet chama de posição. Os enunciados mais precisos e progressivos da terceira parte manifesta o desejo de Poncelet de explicitar cuidadosamente o que rege o seu método.

CONCLUSÃO

São as duas demonstrações primeiramente no 3º caderno (Saratoff) e posteriormente no 5º caderno que conduzem Poncelet ao Princípio da Continuidade nas construções geométricas. Quando Poncelet aborda o Princípio em Saratoff o faz apenas com base nos trabalhos que recorda de Brianchon, pois se encontrava encarcerado e isolado dos meios acadêmicos. Quando aborda os Princípios no 5º caderno, já em Paris, vemos que é muito mais elaborado, com dezoito teoremas, e que já neste momento, ao apresentar à *Académie de Sciences* de Paris, demonstra que pretende publicar um Tratado sobre projeções. O que veio a fazer com o *Traité des propriétés des figures projectives* de 1822.

A busca de Poncelet em proporcionar à geometria sintética as mesmas ferramentas que possui a geometria analítica e que lhe confere ser uma potente ferramenta, é que o leva as considerações das possibilidades ou impossibilidades das construções geométricas. E por fim ao Princípio da continuidade que será fruto de uma forte crítica no Relatório de Cauchy,

apresentado pela *Académie de Sciences de Paris* em 1820. Neste relatório nos fica claro que Poncelet já tinha a intenção de publicar uma obra mais completa sobre o seu método.

Referências Bibliográficas

BELHOSTE, B. De l'École Polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet. **Bulletin de la SABIX** (Société des Amis de la Bibliothèque de l'École Polytechnique), n.19, p. 9-29, 1998. Disponível em: <<http://sabix.revues.org/854>>. Acessado em: 10/2012.

BRIANCHON, C. Solution de plusieurs problem de géométrie. **Journal de l'École Polytechnique**, p. 1-15, 1810.

FRIEDELMEYER, J. L'impulsion originale de Poncelet dans l'invention de la géométrie projective, 2010. In: **Eléments d'une biographie de l'Espace projectif** (Coleção Histoires de géométries), 2010, p 55-158.

PONCELET, J. **Application d'analyse et de géométrie I**. Paris: Gauthier-Villares, 1862. 584 p.

PONCELET, J. **Application d'analyse et de géométrie II**. Paris: Gauthier-Villares, 1864. 613 p.

TATON, R. **La géométrie projective en France de Desargues à Poncelet**. Alençon: impr, de Pouet-Malassis, 1951. 23 p.