

**TK051 - SELECIONANDO EPISÓDIOS DA HISTÓRIA DO CÁLCULO PARA
O ENSINO DO CONCEITO MODERNO DE LIMITE DE FUNÇÃO**

Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias¹Universidade Federal do Pará - UFPA
alice.messias@gmail.com**João Cláudio Brandemberg²**Universidade Federal do Pará - UFPA
brand@ufpa.br**RESUMO**

Este trabalho apresenta os estudos desenvolvidos em uma pesquisa de mestrado em andamento, cujo objetivo principal foi realizar um estudo exploratório sobre *imagens conceituais* de estudantes universitários sobre o conceito de limite de função. Por meio de questionários e entrevistas realizadas junto a estudantes do curso de licenciatura em matemática de duas universidades públicas no estado do Pará (Brasil), observamos e analisamos as *imagens conceituais evocadas* (VINNER, 1991) sobre esse conceito, relacionando-as com nosso referencial teórico que foi constituído, sobretudo, pelos estudos de Tall e Vinner (1981), Jordaan (2005) e Juter (2006). Mediante os resultados obtidos, bem como o levantamento histórico realizado em relação ao conceito de limite de função, optamos por elaborar atividades baseadas nos estudos de Sarvestani (2011) com o intuito de promover aos estudantes de Cálculo discussões que viabilizem a formação de *imagens conceituais* coerentes com a *definição conceitual formal* de limite de função por meio da história da matemática.

Palavras-chave: Limite de função, Imagem Conceitual, Definição Conceitual, História da matemática.

ABSTRACT

This paper presents the studies of a developing master's research that has the purpose of accomplishing an exploratory study concerning to students' concept images of the concept of limit of a function. We observed and analyzed, through questionnaires and interviews performed with students from two public universities in the state of Pará (Brazil) that were majoring in math, the evocated concept images (VINNER, 1991) about this concept, connecting them with our theoretical frame that was especially constituted by the studies developed by Tall e Vinner (1981), Jordaan (2005) e Juter (2006). From the results and the historical study that was done about the conceptual development of the concept of limit of a function, we've built activities that were based on Sarvestani (2011) and had the aim of promoting discussions that would help Calculus students form concept images consistent with the formal concept definition of limit of a function, through the mathematics' history.

Key words: Limit of a function, Concept image, Concept definition, Mathematics' history.

Introdução

As dificuldades de aprendizagem em *Cálculo* se fazem presentes em todos os tópicos constituintes desse campo de conhecimento, sobretudo no que concerne à apreensão dos conceitos envolvidos, tais como: função, limite, continuidade, derivada, integral, dentre outros. Em virtude dessas noções serem objeto de estudo em inúmeros

¹ A autora será responsável pela apresentação do trabalho; Considerar seu endereço para correspondência.

² Orientador da pesquisa realizada.

cursos de graduação e pós-graduação, verificamos – cada vez mais – o empenho de estudiosos em desenvolver pesquisas que busquem oportunizar/viabilizar uma melhor compreensão em relação aos entraves inerentes à aprendizagem desses tópicos.

Frente a essas constatações, direcionamos nossa pesquisa de mestrado para o âmbito do Cálculo optamos por investigar a problemática da apreensão do conceito de limite de função, dada sua importância para o entendimento dos conceitos adjacentes a ele. Para isso, fez-se necessário um levantamento bibliográfico sobre o desenvolvimento histórico/conceitual de limite de função.

Esse levantamento viabilizou nosso entendimento acerca das dificuldades inerentes à construção histórica desse conceito. Além disso, realizamos uma busca em dissertações, teses e periódicos que levantassem a discussão sobre a sua aprendizagem. Nesse sentido, encontramos, sobretudo, nos trabalhos de Tall e Vinner (1981), Vinner (1991), Jordaan (2005), Juter (2006) suporte teórico necessário para o levantamento/delimitação das hipóteses de nossa pesquisa, cujo foco principal consistiu em investigar – mediante os instrumentos de coleta de dados – os elementos que compõem a *Imagem Conceitual* (TALL&VINNER, 1981; VINNER, 1991) de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função. Os resultados obtidos foram analisados conforme os pontos de conformidade e/ou não conformidade com o quadro teórico previamente estabelecido.

A seguir, destacamos algumas das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados em nossa pesquisa. Foi a partir dessas mobilizações e do estudo histórico realizado que buscamos elaborar uma proposta para o ensino de limite de função por meio de discussões atreladas a episódios da história do desenvolvimento desse conceito.

Limite de função: definição conceitual x imagem conceitual

Atribuímos à *imagem conceitual* as associações não verbais efetivadas em nossa mente quando em contato com o nome de determinado conceito. Estão incluídas, nesse sentido, suas representações visuais, figuras mentais, impressões e experiências que podem ser traduzidas em formas verbais por meio dessas associações (VINNER, 1991). Evidenciamos, portanto, que as experiências vivenciadas pelo indivíduo são de extrema

importância para a formação de sua *imagem conceitual* sobre determinado conceito. Isso porque:

(...) abrange todas as representações de experiências ligadas a um conceito, no qual pode haver diversos conjuntos de representações construídas em contextos diferentes que possivelmente se fundem quando o indivíduo se torna mais matematicamente maduro (JUTER, 2006, p. 17, tradução nossa).

Em virtude da *imagem conceitual* de um conceito também ser construída a partir de experiências vivenciadas pelo indivíduo, ela não é necessariamente coerente, podendo conter propriedades e/ou interpretações contraditórias. Ainda assim, a formação de uma *imagem conceitual* – por meio do exercício de múltiplas representações de um conceito – permite que o sujeito recupere suas impressões e experiências relacionadas a esse conceito e, talvez, garanta sua contextualização (BRANDEMBERG, 2010). Por conseguinte, assumimos que:

(...) adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber de cor a definição de um conceito não garante seu entendimento. Entender, assim supomos, significa apresentar uma imagem conceitual. Determinado significado deve estar associado às palavras (VINNER, 1991, p. 69, tradução nossa).

Entendemos que a *definição conceitual* consiste nas definições, memorizadas ou auto – construídas, pelos indivíduos sobre um conceito. Tall e Vinner (1981) atribuem a essa noção as palavras utilizadas para especificar um conceito. Sempre que a definição de um conceito é dada ou construída pelo indivíduo, esta sofrerá variações de tempo em tempo. Para Cornu (1983), *definição conceitual* é:

(...) frases apreendidas mecanicamente, mais ou menos ligadas a um conceito; pode ser uma reconstrução, uma reformulação pessoal de uma definição matemática; é também o conjunto de palavras que empregamos para explicar o conceito. Essa fraseologia é própria ao indivíduo: ela não coincide sempre com a definição formal do conceito, ou seja, com a definição comumente admitida pela comunidade matemática (p. 66, tradução nossa).

Em se tratando do conceito de limite de função, observamos junto aos sujeitos investigados em nossa pesquisa que eles *evocaram imagens conceituais* que por vezes se manifestaram incoerentes com sua *definição conceitual formal*. Dentre diversas mobilizações evidenciadas no decorrer da pesquisa, destacamos as seguintes:

a) *Ideia de aproximação em relação a determinado valor*: Este tipo de evocação se fez presente em grande parte das manifestações dos sujeitos investigados quanto ao conceito de limite. Suas *imagens conceituais* são pautadas na percepção de que podemos nos aproximar cada vez mais do valor do limite sem, no entanto, alcançá-lo. Esse tipo de mobilização encontra-se em conformidade com Tall e Vinner (1981), Jordaan (2005) e Juter (2006).

b) *A função jamais alcança o valor do limite (definição conceitual pessoal x definição conceitual formal)*: Dentre as *imagens conceituais* evocadas pelos sujeitos, evidenciamos que estão voltadas para a ideia de que o limite é um valor do qual nos aproximamos sem, no entanto alcançá-lo (TALL&VINNER, 1981; JUTER, 2006). Essas mobilizações caracterizam um conflito em relação às *definições conceituais pessoais* dos sujeitos e à *definição conceitual formal* de limite. Isso porque, sabemos que o limite pode ser alcançado em determinado ponto se a função for contínua nesse ponto.

c) *Para o limite em determinado ponto existir, a função deve ser contínua*: Para alguns dos estudantes, a existência do limite está atrelada à continuidade da função, ou seja, $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009). Mais uma vez, observamos um conflito entre essas *evocações* e a *definição conceitual* de limite de função, dado que a continuidade depende da existência do limite e não o contrário.

Por meio da análise dos resultados, evidenciamos que as três *evocações* acima foram as que mais se fizeram presentes nas *imagens conceituais* dos estudantes, fato que nos motivou a (re) pensar no processo de ensino de limite de função. A partir dessa percepção e – baseando-nos no levantamento histórico que realizamos no início de nossa pesquisa, bem como nos estudos de Sarvestani (2011) – optamos por elaborar atividades para o ensino desse conceito, de maneira a levar os estudantes a formarem *imagens conceituais* que estejam de acordo com a *definição conceitual formal* de limite de função. O esboço dessas atividades encontra-se destacada no tópico a seguir.

Escolhendo episódios da história do cálculo para o ensino de limite de função

Primeiramente, ressaltamos que nos baseamos nos estudos de Sarvestani (2011) para a construção das atividades e, portanto, concordamos com a autora no sentido de que seja possível levar os estudantes a adquirirem uma *imagem conceitual* coerente com a *definição conceitual formal* de limite a partir de uma visão dinâmica. Nesse sentido, assumimos que apesar dos erros dos estudantes estarem ligados à ideia de movimento, embebida no conceito, a imagem formal poderia ser obtida a partir dessa característica de limites, incluindo a definição com ε e δ . Sendo assim, optamos pelos seguintes episódios:

a) Paradoxos de Zenão:

Zenão de Elea (sec. V a. C), mediante seus paradoxos que em muito afetaram as concepções da época, em virtude da dificuldade de relacionar determinados fenômenos à noção de continuidade também ocupa posição de destaque nos primórdios da história do desenvolvimento do *Cálculo*. O *paradoxo da dicotomia* aponta que antes de determinado objeto percorrer certa distância, deve percorrer metade dela e antes disso, um quarto dessa distância, mas antes um oitavo da distância e assim sucessivamente. Dessa maneira, o movimento do objeto não acontecerá, pois a distância percorrida se aproximará cada vez mais do ponto de partida. (BARTO, 2004). No *paradoxo de Aquiles e a tartaruga*, percebemos que ao disputar uma corrida com uma tartaruga, Aquiles será derrotado se a tartaruga largar determinada distância à frente. Isso porque:

(...) assim que Aquiles alcançar a posição inicial da tartaruga, ela já se deslocou dali, mesmo que seja pouca coisa. Quando Aquiles chegar ao local onde a tartaruga devia se encontrar agora, esta já adiantou-se outro pequeno espaço, e assim por diante, de modo que a tartaruga sempre está à frente de Aquiles, até cruzar vitoriosa a reta de chegada (BROLEZZI, 1996, p. 22 – 23).

O *paradoxo da flecha* aponta que ao se disparar uma flecha, percebemos que ela nunca sairá do lugar, dado que em cada instante a flecha se encontra imóvel.

Acreditamos que ao explorarmos os paradoxos de Zenão, podemos fazer com que os estudantes vivenciem as dúvidas em relação à ideia de movimento (de forma semelhante aos gregos na antiguidade). A partir dessas dúvidas, os estudantes poderão buscar, intuitivamente, conceitos como o de continuidade, infinito, convergência,

extrínsecos ao pensamento matemático grego e necessários para solucionar tais paradoxos.

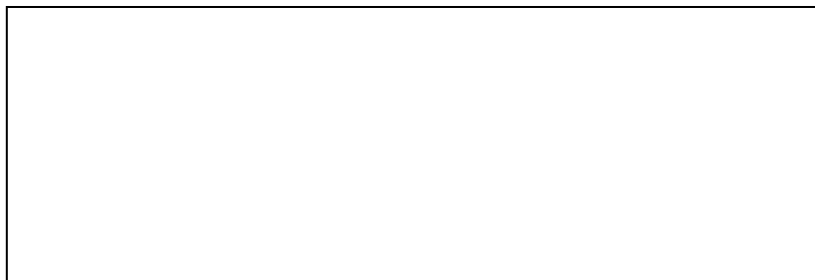
Algumas das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados em nossa pesquisa, tais como *o limite é um número que a função se aproxima sem nunca alcançar* ou *o limite é uma grandeza da qual nos aproximamos tanto quanto queiramos* podem ser explorados durante atividades que envolvam essa parte da história.

b) A quadratura da parábola

Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a. C) – considerado o maior matemático da antiguidade – teve, mediante seus notáveis resultados, grande importância para as antecipações do cálculo integral. Dentre seus trabalhos, destacamos as aplicações do método de exaustão o cálculo do volume de segmentos de conóides e de cunhas cilíndricas, os centros de gravidade do semicírculo, de segmentos parabólicos e de segmentos de uma esfera.

No que concerne à quadratura da parábola, Arquimedes inscreveu triângulos dentro do segmento parabólico aumentando cada vez mais o número de triângulos (ver figura 1).

Figura 1: Quadratura da Parábola



Fonte: Sarvestani (2011, p. 20)

O método de exaustão foi utilizado por Arquimedes na quadratura da parábola com o intuito de encontrar a área do segmento parabólico. Evidenciamos, nesse sentido, a presença de *quantidades infinitamente pequenas* que jamais chegam a zero caracterizando a área remanescente entre o polígono e a parábola. Acreditamos que este episódio pode, mais uma vez, desfiar o comportamento dos estudantes no que concerne ao cálculo dessa área remanescente, além de explorar *imagens conceituais* comumente pautadas nos conflitos vivenciados por eles, tais como: *o limite é determinado a partir da aproximação de números em relação a um número dado, até que o limite é*

alcançado, o limite é um número ou um ponto que a função se aproxima, mas nunca alcança ou o limite é uma aproximação que pode ser realizada tanto quanto queiramos (TALL&VINNER, 1981; JUTER, 2006; SARVESTANI, 2011).

Acreditamos que esses dois episódios podem auxiliar no processo de apreensão do conceito de limite de função, entretanto, não são suficientes. Por isso, optamos por incluir atividades inspiradas no cálculo de velocidade instantânea de Newton. Nossa pesquisa encontra-se atualmente voltada para o estabelecimento da relação entre os dois primeiros episódios e o Cálculo de Newton para que possamos, por fim, elaborar todas as discussões inerentes a essa proposta de ensino, conectando-as com as *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados em nossa pesquisa, conforme mencionado anteriormente.

Considerações finais

Propusemo-nos, com nossa pesquisa, investigar os elementos que compõem a *imagem conceitual* de estudantes universitários de licenciatura em Matemática no que concerne ao conceito de limite de função. Realizamos, *a priori*, a revisão de literatura que subsidiou a delimitação de nossas hipóteses, das questões norteadoras e dos objetivos para a pesquisa. Destacamos, nesse sentido, que os estudos de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) sobre *Imagem Conceitual e Definição Conceitual* foram estabelecidos como o principal referencial teórico de nossa pesquisa.

Os resultados obtidos em nossa investigação – inferidos a partir de questionários e entrevistas – encontram-se em conformidade com o referencial teórico pré-estabelecido e motivaram-nos a elaborar atividades para o ensino de limite de função. Essas atividades estão em fase de construção e baseiam-se em episódios da história do Cálculo, conforme destacado no tópico anterior deste artigo.

Ressaltamos que nossa pesquisa encontra-se em fase de conclusão e têm-se mostrado relevante para o âmbito do ensino de limite de função, pois, além de termos evidenciado dificuldades inerentes à aprendizagem deste conceito, elaboramos uma proposta que, *a posteriori*, será experimentada para que possamos, enfim, viabilizar a formação das *imagens conceituais* dos estudantes acerca do conceito de limite de função.

Referências Bibliográficas

BARTO, M. C. *Um olhar sobre as ideias matemáticas em um curso de cálculo: a produção de significados para continuidade*. Dissertação de mestrado (Educação Matemática). PUC (SP), 2004.

BRANDEMBERG, J.C. *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

COTRILL *et al.* Understanding the limit concept: beginning with a coordinate process schema. *In: Journal of mathematical behavior*, vol. 15, 1996, p. 167 – 192.

JORDAAN, T. *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students*. Dissertação de mestrado (Educação Matemática). University of South Africa, 2005.

JUTER, K. *Limits of functions: University students' concept development*. Tese de doutorado (Educação Matemática). Lulea University of Technology, 2006.

NAIR, G.S. *College students' concept image of asymptotes, limits and continuity of rational functions*. Tese de doutorado (Filosofia). Ohio State University, 2010.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *In: Educational Studies in Mathematics*, n. 12, p. 151 – 169, 1981.

SARVESTANI, A.K. *Contemplating problems taken from the history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept*. Tese de doutorado. Universiteit van Amsterdam, 2011.

VINNER, S. The role of definitions in teaching and learning. *In: Advanced Mathematical Thinking* (Ed. David Tall). Kluwer publications, 1991.