TK062 - EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU EM SALA DE AULA: UMA ABORDAGEM AO MÉTODO DE VIÉTÈ

Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Instituto Federal de Minas Gerais - IFMG
davidson.oliveira@ifmg.edu.br

Caio César Pereira de Paula
Instituto Federal de Minas Gerais - IFMG
caiobq@hotmail.com

Maria Maroni Lopes
Instituto Federal de Minas Gerais - IFMG
marolopes@hotmail.com

Resumo
Esse artigo apresenta os resultados de uma pesquisa desenvolvida junto a uma escola pública federal do interior de Minas Gerais. O qual discutimos aspectos relativos a inserção da História da Matemática na sala de aula de Matemática, em específico na abordagem do estudo de equação do segundo grau. Adotamos em nosso estudo o método de resolução de equações de Viétè. A pesquisa foi desenvolvida em três dias letivos com duas turmas de primeira série do Ensino Médio de um curso técnico. Para análises dos dados fizemos a categorização das atividades de acordo com as respostas dos alunos em cada atividade proposta.

Palavras-chave: História da Matemática. Equação do segundo grau. Método de Viétè

Abstract
This article presents the results of a research project carried out at a federal public school in Minas Gerais. The aspects which we discussed the inclusion of the history of mathematics in the classroom mathematics, specifically in addressing the study of quadratic equation. We adopt in our study the method of solving equations Viète. The research was conducted in three school days with two classes of first grade of high school in a technical course. For data analysis we made the categorization of activities according to the students' responses in each proposed activity.

Keywords: History of Mathematics. Quadratic equation. Method Viétè

Introdução

A motivação da nossa investigação está relacionada a dois fatores: a prática enquanto professor do Ensino Básico e ao resultado de um teste diagnóstico realizado com turmas de primeira série do Ensino Médio da escola de atuação do primeiro autor. Essas vivências nos possibilitaram pontuar as dificuldades dos alunos no que se refere a conteúdos do ensino fundamental, em específico ao estudo da manipulação de símbolos algébricos. A isso se somou as leituras realizadas a partir de um levantamento bibliográfico de pesquisas em Educação Matemática que tratam de dificuldades dos alunos em conteúdos como produtos notáveis e fatoração, tendo como perspectiva situar nosso estudo no contexto da literatura existente.

De acordo com Lochhesd e Mestre (1995) muitos alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas algébricos, mesmo aqueles aparentemente simples, quando se faz necessário a passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica. Para Oliveira (2002), algumas dificuldades se configuram no ensino e na aprendizagem da álgebra pelo fato do aluno trazer para o contexto algébrico, limitações com o aprendizado no contexto aritmético.

Essa, talvez, é uma justificativa para o baixo rendimento dos alunos desta experiência de ensino em questões relativas à produtos notáveis e fatoração. Em um teste diagnóstico realizado com os referidos alunos foi classificado como hipercrítico pelos dezesseis professores de matemática da escola o conhecimento desses estudantes em relação à produtos notáveis e fatoração visto que somente nove dos 64 alunos que realizaram o teste acertaram essa questão, o que representa 14,06%.

Nesse sentido, buscou-se na História da Matemática ferramentas que propiciassem ao professor a elaboração de atividades que pudessem ser realizadas em sala de aula para potencializar o aprendizado dos estudantes em relação à manipulação de símbolos algébricos. Foi realizado, então, um recorte de uma pesquisa intitulada *"Elaboração de uma proposta pedagógica para o estudo da resolução de equações do segundo grau na primeira série do ensino médio baseada nas resoluções históricas",* financiada pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica do Instituto Federal Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto. Nesta pesquisa discute-se aspectos relativos a inserção da História da Matemática na sala de aula de Matemática, em específico na abordagem do estudo de equação do segundo grau por meio de atividades e informações históricas.

Apesar de Refatti e Bisognin (2005) ressaltarem que a resolução de uma equação do segundo grau tem suas origens em conhecimentos de técnicas geométricas e destacarem que, atualmente, são dadas ênfases nas resoluções algébricas neste trabalho ressaltamos a parte algébrica por considerarmos importantes as técnicas de manipulações de símbolos para o desenvolvimento do pensamento matemático atual.

Assim, a abordagem algébrica com a manipulação de símbolos é fundamental para que os alunos possam continuar os estudos tanto em matemática quanto em outras áreas que dependem da linguagem algébrica simbólica. Nesse sentido, Bonetto (1999) afirma que a falta dessa escrita simbólica dificultou ou mesmo retardou

Oresme de desenvolver mais a matemática. Assim, o simbolismo algébrico é fundamental, também, para o aprendizado da matemática.

Com isso pretendeu-se com a atividade aqui relatada expandir o conhecimento dos alunos ao apresentar outra maneira de resolver equações do segundo grau por um método sem a aplicação de fórmulas, mas que ao utilizá-lo pode-se demonstrar a fórmula aprendida no Ensino Fundamental. Além disso, ressaltar como a matemática vem sendo construída pelos homens dentro de distintas culturas de diversas sociedades. O foco desse trabalho foi analisar o desenvolvimento dos alunos ao resolverem equações do segundo grau de acordo com a resolução de Viétè.

História da Matemática em sala de aula da Matemática

Em estudos recentes, a História da Matemática é utilizada de duas maneiras distintas: explícita e implícita. Essas duas maneiras de utilizar a História da Matemática, nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, foram utilizadas por Ferreira e Rich (2001) *apud* Dambros (2006). Apresentamos nesse artigo um relato de experiência no qual a história da matemática foi utilizada de modo explícito, pois faz referência a maneira como Viétè resolvia equações do segundo grau.

Entretanto, Radford (1997) considera que as atividades matemáticas não devem ser, necessariamente, reconstruções idênticas àquelas ocorridas na história. Assim, o fato de se utilizarem situações não idênticas àquelas ocorridas na história também é ressaltado por Brito e Mendes (2009), pois, de acordo com esses autores, dentre as preocupações de se recorrer à História da Matemática está a de criar problemas que possibilitem emergir discussões sobre dúvidas que frequentemente nossos alunos apresentam. Tais problemas não são obrigatoriamente os mesmos que os encontrados na história da Matemática, mas recriações desses (p. 17).

No entanto, a fim de se conseguir recriações, ou mesmo, utilizar situações históricas, é importante que os professores conheçam a história do conteúdo a ser ensinado (LIU, 2003). Em concordância com esse ponto de vista, Furinghetti (1997, p.420) argumenta que "um bom conhecimento da História da Matemática pode promover a criatividade pedagógica para integrar a história em atividades matemáticas".

Diante dessa perspectiva, o método de Viétè foi adaptado aos dias atuais ao se utilizar a notação algébrica usual e não a notação de Viétè.

Metodologia e Análise das Atividades

O presente relato de experiência foi desenvolvido em três dias letivos com duas turmas de primeira série do Ensino Médio de um curso técnico em uma escola pública federal do interior de Minas Gerais.

O primeiro dia ocorreu sem a presença do professor e foi entregue aos alunos as atividades com as devidas instruções dividido em duas partes: (1) revisão de como resolver, algebricamente, equações do segundo grau incompletas com explicações e exercícios de repetição; (2) breve biografia de François Viétè e o modo como ele propôs que equações do segundo grau fossem resolvidas por meio de uma mudança de uma incógnita pela soma de duas outras.

Os alunos sentaram-se em grupo para estudar o que lhes foi entregue, resolver os exercícios propostos e se preparar para um seminário na aula seguinte com a apresentação por um dos alunos da sala a nova técnica aprendida, esse aluno foi escolhido por sorteio. Após a apresentação do referente trabalho foi sucedido por outra atividade que já procurava incentivar os alunos a exporem mais o conhecimentos que obtiveram com o primeiro material. Mas, permitindo que eles além de resolverem um exercício proposto pudessem descrever por meio de duas questões pessoais, o que cada um permitiu absorver sobre o material.

Com a resolução da atividade proposta aos alunos, foi feita uma correção, organização e análises dos trabalhos de acordo com o desenvolvimento de cada aluno das questões apresentadas aos mesmos e suas opiniões sobre o método.

Descrição das atividades

Atividade 1 – Abordando o método de Viéte

Viété introduzia uma vogal para representar uma quantidade desconhecida e uma consoante para uma grandeza ou número supostamente conhecido, elaborando uma fórmula geral conhecida $ax^2 + bx + c = 0$. Usava-se esse método de substituir vogais e consoantes na incógnita para conseguir simplificar a equação o máximo possível e torná-la mais simples para que pudessem resolvê-las com mais facilidade, transformando no final a equação do segundo grau na conhecida fórmula de Bháskara[1].

O método de Viétè consiste em substituir à incógnita x por outras duas (u e v) a fim de transformar a equação inicial em uma equação incompleta, tornando-se mais compreensível e mais explicativo chegando ao final de seu desenvolvimento na fórmula de Bhaskara.

Generalização do método de Viétè

Apresentamos aos alunos como Viétè resolvia uma equação do segundo grau de forma geral, ou seja, encontrava as raízes de uma equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Conforme dito anteriormente, ele substituía a incógnita x por uma soma de duas outras incógnitas, ou seja: $x = u + v$

Substituindo na equação anterior teremos: $a(u+v)^2 + b(u+v) + c = \mathrm{a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0}$

Resolvendo o produto notável $(u+v)^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u^2 + 2uv + v^2$ e substituindo na equação anterior temos: $a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u+v) + c = 0$ Aplicando a propriedade distributiva e efetuando as multiplicações temos:

$$au^2 + 2uva + av^2 + bu + bv + c = 0$$

É fácil ver que podemos colocar em evidência a incógnita v, e obtermos assim: $av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = \mathrm{av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0}$ (*). Procuram-se os valores de u em função de v, que anulam o coeficiente v, que é uma das incógnitas usadas, junto com o u, da mesma forma que poderíamos anular u. Dessa forma a equação passa a ter somen[te uma inc]ógnita.

Dessa forma: $2au + b = 0 \quad 2au = -b$ $\boxed{u = -\dfrac{b}{2a}}$

Substitui-se o valor encontrado para u em (*) teremos:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0$$

[1] Segundo Nobre (2006) a denominação que essa fórmula recebe é utilizada somente no Brasil, não recebendo esse nome em outros países. Carvalho *et al* (2001) afirmam que a primeira aparição do nome dado à fórmula pode ter sido a apresentada no livro *Elementos de Álgebra* de André Perez Y Marin escrito em 1928, porém o hábito de nomeá-la como tal ganhou força a partir da segunda metade da década de 70 sendo que um dos incentivadores pode ter sido Benedito Castrucci e Geraldo dos Santos Lima no livro C*urso de Matemática* de 1960.

$$av^2 + \left(2a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right)v + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

Resolvendo as operações necessárias é fácil ver que:

$$av^2 + (-b + b)v + a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

Efetuando simplificações algébricas:

$$av^2 + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Longrightarrow av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

Calcule o mínimo múltiplo comum da equação acima para efetuarmos a soma das frações obtemos:

$$\frac{4a^2v^2 + b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = 0$$

Como temos que $a \neq 0$ a equação se reduz a:

$$4a^2v^2 + b^2 - 2b^2 + 4ac = 0 \Longrightarrow 4a^2v^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Como queremos encontrar a solução da equação para a incógnita v resolvemos isolando no primeiro membro da equação essa incógnita.

$$4a^2v^2 = b^2 - 4ac \Longrightarrow v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Consideraremos que $b^2 - 4ac \geq 0$, pois, caso contrário, não teremos raiz real e, portanto, a equação não terá raiz real.

Logo temos para os valores de v que: $v = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

Podemos calcular a raiz quadrada do denominador para simplificarmos o valor de *v*, assim:

$$\boxed{v = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Porém queremos encontrar os valores de *x*. Lembrando que fizemos inicialmente $x = u + v$ podemos facilmente por simples substituição encontrar as raízes, pois já encontramos os valores de *u* e *v*. Anteriormente encontramos $u = -\frac{b}{2a}$ e $v = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Portanto, $x = u + v \Longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Efetuando a adição das duas frações obtemos uma fórmula para as raízes de uma equação do segundo grau.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

A descrição e a explicação desse método foram apresentadas na primeira atividade proposta aos alunos, porém, foi demonstrado de forma exemplificada para os alunos, aqui foi descrito de uma forma geral.

Atividade 2 – Interpretando o método de Viétè

Na segunda atividade, foram apresentadas inicialmente duas questões para que os alunos pudessem responder de forma espontânea mostrando as impressões, as concepções e suas dificuldades no método apresentado.

As questões proposta foram:

1- Quais foram as principais dificuldades encontradas para realizar as atividades de equações do segundo grau segundo Viéte?
2- Qual foi a sua opinião em relação a esse método de resolução de equações do segundo grau?

Análises das atividades desenvolvidas com os alunos

Para a correção dos respectivos trabalhos optamos por separar cada trabalho de acordo com a semelhança de resolução, de forma que os que acertaram foram determinados em um grupo e os que erraram em outro e esses divididos em subgrupos de acordo com o que cada um errou ou teve dificuldade, explicando de melhor forma a seguir: Foram realizadas 33 atividades e separados em cada grupo de acordo com o critério determinado.

Primeiramente dividimos as correções dos exercícios em dois grupos, os que acertaram e os que erraram, explicitando a quantidade referente ao total de exercícios. As primeiras categorias: alunos que acertaram o exercício proposto – foram 9 – alunos que erraram o exercício proposto – foram 24.

Depois foram divididos os alunos que erraram em quatro categorias: alunos que erram por causa dos sinais, trocaram os sinais por erro de conta, ou outro motivo: foram 9; alunos que não deram continuidade a resolução do exercício: foram 6; alunos que erraram na conta, em alguma parte do exercício, como em subtração ou soma, ou em outra operação: foram 6; alunos que não fizeram o exercício ou fizeram apenas uma parte, ou seja, a parte do questionário pessoal ou a parte da resolução do exercício proposto: foram 3

Considerações finais

Para entender um pouco sobre cada grupo de alunos foram observadas as semelhanças dos comentários dos alunos nas questões pessoais, como das suas dificuldades e opinião de cada um.

Sobre os 9 alunos que acertaram a quatro dos comentários na parte de dificuldades, foi que não houve dificuldades, e os outros cinco se queixaram sobre quando tem que colocar a incógnita em evidência.

Os alunos que não deram continuidade no exercício alegaram que, o exercício era cansativo, que tiveram problemas com frações, tiveram problemas com incógnitas e por ser extenso. No tocante aos alunos que erram na parte dos sinais tiveram em comum a dificuldade na parte da substituição das incógnitas, e acharam complicado o método; os alunos que erraram na conta alegaram que o método era muito cansativo e que a quantidade de frações e raízes dificulta um pouco a resolução; e os alunos que não fizeram os exercícios ou não foram na aula no dia da explicação e da apresentação do trabalho ou não compreenderam o método.

De forma geral observou-se que quase todos os comentários foram sobre a relevância de se aprender sobre outros métodos de resolução de equação do 2ª grau, no entanto foi destacado que na prática seria desnecessário gastar tanta energia no método de Viétè, visto que, já existem outros métodos de resolução mais fácil de equação do segundo grau que a fórmula de Bháskara mencionada pelos alunos.

REFERÊNCIAS

BONETTO, G. A. *A construção da representação gráfica e o seu papel no ensino de funções: uma visão histórica.* (Dissertação de Mestrado) Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 1999.

BRITO. A de J. ; MENDES, I. Matemática e Investigação em Sala de Aula: tecendo redes de cognitivas na aprendizagem. Ed. Ver. e aum. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DAMBROS, Adriana Aparecida. *O conhecimento do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos e o ensino de matemática: possíveis relações.* 2006. 193p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2006.

FURINGHETTI, Fulvia. History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Casa Studies in Linking Different Domains. In: For the Learning of Mathematics. 17,1, February, 1997. FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canadá.

LIU, Po-Hung, *Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in Their Teaching?*, Connecting Research to Teaching. Mathematics Teacher. Vol. 96. N° 6. September 2003.

LOCHHEAD, J. ; MESTRE, J. P. Das Palavras à Álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

NOBRE, S. Equações algébricas: uma abordagem histórica sobre o processo de resolução da equação de segundo grau. In: SILVA, C.C(Org.). Estudo de história e filosofia das ciências: subsídio para aplicação no ensino. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

OLIVEIRA, A. T. de C. C. Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo: SBEM, ano 9, n. 12, p. 35-39, jun. 2002.

RADFORD, L. *On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics*. For the Learning of Mathematics 17,1. February, 1997 FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada.

REFATTI, L. R.; BISOGNIN, E. Aspectos Históricos e Geométricos da Equação Quadrática. Disc. Scientia. Série: **Ciências Naturais e Tecnológicas.** Santa Maria, v.6. n.1, p.79-95, 2005.